

# Kapitola 8

## Gravitace

### 8.1 Gravitační zákon

#### 8.1.1 Isaac Newton a objev gravitačního zákona

Kepler objevil své revoluční zákony o pohybu planet v roce 1609 a 1619. Dlouho však byly jeho výsledky přijímány s nedůvěrou. Například samotný Galileo nikdy nepřijal představu eliptických drah planet za svou a trval na kruhových pohybech. Zákon o plošných rychlostech byl ignorován zhruba 80 let, pouze třetí Keplerův zákon byl přijat ostatními astronomy záhy po svém objevu.

V roce 1679 napsal ROBERT HOOKE dopis ISAACU NEWTONOVI, v němž vysvětloval, že pohyb planet může souviset s přitažlivou silou, která planety trvale odchyluje od jejich pohybu po přímce. Newton se tehdy ještě domníval, že dráhou částice vržené z vysoké věže bude spirála, Hooke naopak správně tvrdil, že dráhou bude elipsa, stejně jako u planet. Newton uznal, že jeho vlastní představa není správná, ale tvrdil, že Hookovo řešení předpokládá, aby gravitace byla konstantní. Hooke odpověděl, že jeho teorie vychází ze zákona, podle něhož gravitace klesá se čtvercem vzdálenosti od zdroje. Později Hooke tvrdil, že gravitační zákon objevil jako první on sám a nikoliv Newton.

Že přitažlivá síla Slunce klesá se čtvercem vzdálenosti planety od Slunce, dokázal také roku 1683 EDMOND HALLEY. Dokázal to s použitím třetího Keplerova zákona, ovšem jen pro kruhové dráhy. Od správně tušeného zákona až k jeho objevu bylo v tuto chvíli ještě daleko. Především bylo třeba dokázat, že přitažlivá síla klesá podle stejného zákona i pro eliptické dráhy planet.

V roce 1684 CHRISTOPHER WREN, Hooke a Halley diskutovali v Královské společnosti, zda eliptický tvar drah planet je důsledkem zákona poklesu intenzity gravitace s druhou mocninou vzdálenosti od Slunce. V srpnu 1684 Halley navštívil Newtona v Cambridge, aby se ho dotázal na jeho názor. Newton potvrdil, že dráha bude eliptická, příslušné výpočty, které to dokazují, sice už někde založil, ale pokud si Halley přeje, dokáže to znova. Newton na základě své korespondence s Hookem z roku 1680 své důkazy přepracoval a Halleymu poslal devítistránkový

článek *De motu corporum in gyrum* (O pohybu těles na dráze). Tento spis se později rozrostl v Newtonovo stěžejní dílo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematické principy filozofie přírody), které vyšlo roku 1687 nemalou zásluhou Halleyho. Položil v něm základy mechaniky se svými třemi slavnými pohybovými zákony, dále předložil univerzální gravitační zákon a dokázal, že tento zákon vede k pohybu těles po elipse, parabole nebo hyperbole. Newton zavedl také pojem *gravitas* (latinsky váha, tíha) pro univerzální přitažlivost těles.

14. listopadu 1680 byla objevena jasná kometa, která byla viditelná až do 5. prosince, kdy se přiblížila ke Slunci. Pak se znovu objevila za dva týdny, kdy se od Slunce vzdalovala. Newton ukázal, že její dráhou je parabola.

Newton v Principiích odvodil také třetí Keplerův zákon a pokoušel se řešit problémem tří těles. Později toho však nechal s poznámkou, že tento problém překračuje možnosti lidského myšlení.

Halley použil Newtonovu metodu a zjistil u většiny komet parabolické dráhy. Když roku 1705 počítal dráhy tří komet, které se objevily postupně v letech 1531, 1607 a v roce 1682, kdy pozorování provedl sám, zjistil, že jejich dráhy jsou téměř identické. Halley odtud správně usoudil, že jde o jedinou kometu a určil, že kometa musela být viditelná také v letech 1456 a 1378. Vypočetl eliptickou dráhu této komety a uvedl, že planety Jupiter a Saturn ideální dráhu komety slabě narušují. Halley započel perturbace těchto planet a předpověděl, že kometa bude opět v perihéliu 13. dubna 1759. Halleyova kometa byla znovu pozorována v prosinci 1758 a perihéliem prošla 12. března 1759. Šlo tak o první matematicky předpovězenou kometu.

### 8.1.2 Gravitace

Vše na Zemi podléhá působení tíže, potýkáme se s ní tak často, že si ji ani patřičně neuvědomujeme. Zemská tíže nás drží na povrchu Země, stejně jako vodu a atmosféru. Nakonec i Zemi samotnou utváří gravitace, a proto má Země sférický tvar. Totéž platí i o jiných planetách a hvězdách. Gravitace je zodpovědná za vesmírný řád, udržuje planety na jejich dráhách a také Zemi udržuje v optimální vzdálenosti od životadárného Slunce. Gravitace formuje hvězdy, galaxie a celý vesmír. Bez zemské tíže by život nemohl vzniknout. Jak ale dosvědčuje zkušenost kosmonautů, člověk může bez zemské tíže žít.

Co je příčinou zemské tíže, dlouho nebylo známo. Podle antického učence Aristotela byla příčinou zemské tíže přirozenost věcí dostat se do středu světa. Nešlo tedy podle něj o žádné vzájemné působení těles. Pohyby planet kolem Slunce byly popsány Keplerovými zákony, ty se však zdály být naprosto odlišnými od pozemských zákonů mechaniky. Připomeňme si, že v té době stále ještě nebyla definitivně překonána aristotelovská představa o tom, že zákony pohybu na zemi jsou zcela jiné, než zákony pohybu na nebesích. A ti, kdož hlásali opak, jako například Galileo Galilei, byli pronásledováni. V 17. století nebylo známo dokonce ani to, že stejná síla, která nutí všechny předměty padat na zem, nutí také obíhat Měsíc kolem Země.

Gravitační zákon byl nejprve objeven v kosmu a až pak na Zemi. Největší zásluhu na jeho objevu má geniální zakladatel moderní mechaniky ISAAC NEWTON.

Někteří fyzikové, především Huygens a Hooke, už dříve tušili, že gravitace ubývá se čtvercem vzdálenosti, ale nemohli to dokázat, protože neznali diferenciální a integrální počet. Ten objevil až Newton někdy v letech 1665 až 1670. Bez znalosti matematické analýzy není možné spojit Keplerovy zákony se zákonem gravitačním.

### 8.1.3 Silové působení Slunce na planety

Ukažme si nyní, jak Newtonovi současníci dospěli k přesvědčení, že sluneční přitažlivost ubývá se čtvercem vzdálenosti. Předpokládejme planetu, která obíhá rovnoměrně po kruhové dráze o poloměru  $r$  kolem Slunce rychlostí  $v$ . Je-li  $T$  oběžná doba planety, pak platí

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

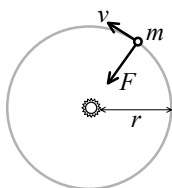
Planetu přidržuje na kruhové dráze přitažlivá síla Slunce  $F$ , která je rovna dostředivé síle, proto platí

$$F = \frac{mv^2}{r} = 4\pi^2 \frac{mr}{T^2} \sim \frac{mr}{T^2}.$$

Podle třetího Keplerova zákona však platí  $T^2 \sim r^3$ , takže po dosazení za  $T^2$  odtud dostaneme pro přitažlivou sílu závislost

$$F \sim \frac{m}{r^2}.$$

Přitažlivá síla Slunce je tedy nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti planety od Slunce a je také úměrná hmotnosti planety.




---

Ilustrace k odvození gravitačního zákona pro planetu obíhající po kruhové dráze kolem Slunce.

---

Tento výsledek pro kruhové dráhy odvodil EDMOND HALLEY roku 1683. Dokázat jej pro obecnou eliptickou dráhu je ovšem mnohem složitější a na tom všichni ztroskotali. Teprve až Newtonovi se podařilo matematicky dokázat, že i pro eliptické oběžné dráhy vyjde stejný gravitační zákon.

**Příklad 8.1** Dokažte, že síla působící na planetu v perihéliu a aféliu je nepřímo úměrná čtverci její vzdálenosti od Slunce.

**Řešení:** Elementárně se to dá dokázat pomocí druhého Keplerova zákona

$$v_A r_A = v_P r_P = 2w.$$

Dostředivá síla působící na planetu v perihéliu a aféliu je

$$F_P = ma_P = m \frac{v_P^2}{R} = \frac{4mw^2}{R} \frac{1}{r_P^2} \quad \text{a} \quad F_A = ma_A = m \frac{v_A^2}{R} = \frac{4mw^2}{R} \frac{1}{r_A^2},$$

kde  $R$  je poloměr křivosti elipsy v perihéliu a aféliu. Jak je tedy vidět, přitažlivá síla klesá skutečně se čtvercem vzdálenosti planety od Slunce i v případě vrcholů eliptické dráhy.

### 8.1.4 Měsíc a zemská tíže

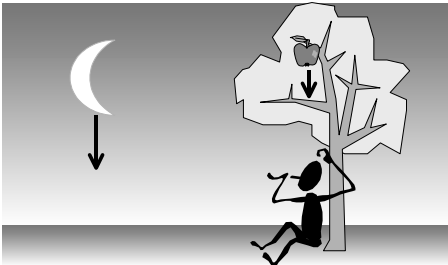
Kromě toho, že Newton objevil matematickou podstatu sil, které řídí pohyby nebeských těles, dokázal také, že tato síla je stejného druhu, jako běžná přitažlivost zemská. Rozhodující nápad dostal údajně v okamžiku, kdy mu na hlavu spadlo jablko ze stromu, pod nímž ve své zahradě seděl. Přemýšlel právě o tom, jaká síla nutí Měsíc, aby obíhal kolem Země. Newton dostal nápad, že by to mohla být síla stejného druhu jako síla, která nutí padat na zem jablko, tedy síla zemské tíže. Měsíc však, na rozdíl od jablka, nespadne na zem, protože má dostatečně velkou obvodovou rychlost  $v = 2\pi r/T \approx 1.026 \text{ km/s}$ , kde  $r \approx 385\,000 \text{ km}$  značí průměrnou vzdálenost Měsíce od středu Země a  $T \approx 27.3$  dne oběžnou dobu Měsíce vzhledem ke hvězdám. Aby Měsíc obíhal kolem Země po kruhové dráze, musí na něj Země působit přitažlivým zrychlením  $g_M$ , které je právě rovno dostředivému zrychlení

$$g_M = a_M = \frac{v^2}{r} \approx 0.00273 \text{ m/s}^2.$$

Newton již také věděl, že gravitace ubývá se čtvercem vzdálenosti a protože Měsíc obíhá ve vzdálenosti asi 60 zemských poloměrů, je zřejmé, že při povrchu Země by toto přitažlivé zrychlení mělo být asi  $60^2$  krát větší. Tak dospěl Newton k numerickému výsledku

$$g \approx 60^2 g_M \approx 9.8 \text{ m/s}^2.$$

No a protože mu touto úvahou vyšlo *obyčejné* tíhové zrychlení popisující i pád výše zmíněného jablka, dospěl Newton k nezvratnému přesvědčení, že zemská tíže je stejného původu jako síla, která drží Měsíc na jeho oběžné dráze kolem Země a že se obě síly dají popsat jediným univerzálním gravitačním zákonem, který platí pro pohyby těles na zemi stejně jako na nebi.




---

Síla, která nutí jablko i Měsíc padat k Zemi, je tatáž síla gravitační.

---

### 8.1.5 Gravitační zákon z Keplerových zákonů

Dokažme nyní, že z Keplerových zákonů skutečně plyne, že na planety obíhající po eliptických dráhách působí centrální síla  $F \sim 1/r^2$ . To byl zároveň ten nejdůležitější

matematický krok, který musel Newton udělat, aby roku 1684 konečně dospěl k objevu gravitačního zákona.

Hledáme zrychlení planety ze známé kinematiky planet určené Keplerovými zákony. Jako nejvhodnější se ukazuje popis pohybu v polárních souřadnicích, tam totiž nejlépe využijeme faktu, že Slunce leží v ohnisku elipsy. Připomeňme, že zrychlení má v polárních souřadnicích dvě složky, radiální a azimutální, pro které platí

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \quad \text{a} \quad a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}.$$

Podle druhého Keplerova zákona platí

$$r^2\dot{\phi} = 2w, \tag{8.1}$$

kde plošná rychlost  $w$  je konstantou pro danou planetu. Protože za periodu  $T$  musí být průvodičem opsána celá elipsa o ploše  $\pi ab$ , platí také  $w = \pi ab/T$ . Vzhledem ke druhému Keplerovu zákonu (8.1) je azimutální složka zrychlení rovna nule

$$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r} \left( r^2\dot{\phi} \right)' = \frac{1}{r}\dot{w} = 0.$$

To však znamená, že na planetu působí síla směřující vždy do Slunce. Nyní spočteme radiální složku zrychlení planety  $a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$ . Chceme ji vyjádřit jako funkci polohy, musíme proto odstranit všechny výrazy obsahující časové derivace souřadnic  $r$  a  $\phi$ . Nejprve nahradíme  $\dot{\phi}$  výrazem  $2w/r^2$  podle (8.1), dostaneme

$$a_r = \ddot{r} - \frac{4w^2}{r^3}.$$

Ještě musíme upravit  $\ddot{r}$ . Podle prvního Keplerova zákona platí

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \phi), \tag{8.2}$$

což je rovnice elipsy v polárních souřadnicích. Odtud derivací podle času dostaneme

$$\frac{1}{r^2}\dot{r} = \frac{1}{p}e\dot{\phi} \sin \phi \quad \text{neboli} \quad \dot{r} = \frac{1}{p}2ew \sin \phi,$$

kde jsme k vyloučení  $\dot{\phi}$  opět využili (8.1). Další derivací podle času pak dostaneme

$$\ddot{r} = \frac{1}{p}2ew\dot{\phi} \cos \phi.$$

Výraz  $e \cos \phi$  odstraníme pomocí definice elipsy (8.2) a  $\dot{\phi}$  pomocí (8.1), tak dostaneme

$$\ddot{r} = \frac{4w^2}{r^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right).$$

Radiální složka zrychlení planety je tedy rovna

$$a_r = \frac{4w^2}{r^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) - \frac{4w^2}{r^3} = -\frac{4w^2}{p} \frac{1}{r^2}.$$

Takže nám vyšlo, že zrychlení planety má jen radiální složku

$$a = a_r = -\frac{k}{r^2},$$

kteřá závisí jen na vzdálenosti  $r$  planety od Slunce a že planeta je přitahována ke Slunci silou, která klesá se čtvercem vzdálenosti. Navíc, konstanta úměrnosti

$$k = \frac{4w^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \text{konst} \quad (8.3)$$

je vzhledem ke třetímu Keplerovu zákonu pro všechny planety obíhající kolem Slunce stejná a nezávisí ani na velikosti planety, ani na její vzdálenosti od Slunce. Při poslední úpravě konstanty  $k$  jsme dosadili za plošnou rychlost  $w = \pi ab/T$  a za parametr  $p = b^2/a$ . Planeta je tedy ke Slunci přitahována silou

$$F = ma = -k \frac{m}{r^2}.$$

Ze symetrie silového působení obou těles, tj. planety o hmotnosti  $m$  a Slunce o hmotnosti  $M_S$ , se dá očekávat, že výsledná síla bude mít tvar symetrický vzhledem k oběma tělesům. To splňuje jen gravitační zákon ve tvaru

$$F = -\varkappa \frac{mM_S}{r^2}.$$

Pro konstantu  $k$  tedy máme vyjádření  $k = \varkappa M_S$ , kde  $\varkappa$  je univerzální konstanta.

Stručnější odvození přitažlivé síly se dostane také z **Binetova vztahu**

$$u'' + u = -\frac{m}{L^2} \frac{F}{u^2}, \quad (8.4)$$

který platí pro centrální silová působení. Pokud se planeta pohybuje po eliptické dráze, platí

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \phi),$$

po dosazení do Binetova vztahu (8.4) dostaneme pro gravitační sílu výraz

$$F = -\frac{L^2 u^2}{mp} = -\frac{L^2}{mpr^2}.$$

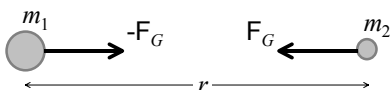
Protože  $L = 2mw$ , dostaneme odtud opět výsledek  $F = -km/r^2$ , kde  $k$  je dáno vztahem (8.3).

### 8.1.6 Univerzální gravitační zákon

Jakmile se Newton ujistil, že silové působení Slunce na planety, silové působení Země na Měsíc a zemská tíže jsou všechny popsány stejným zákonem, formuloval roku 1684 **univerzální gravitační zákon**:

Libovolná dvě tělesa se přitahují silou, která je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti.

Newtonův gravitační zákon platí v celém vesmíru a určuje pohyby planet, komet, umělých satelitů, stejně jako hvězd a galaxií. Gravitace způsobuje sférický tvar velkých nebeských těles. Gravitace umožňuje hvězdám dosáhnout dostatečného tlaku a teploty k zapálení termojaderné reakce. Gravitace přidržuje vodu a vzduch k povrchu Země. Proměnná gravitace způsobená pohybem Měsíce a Slunce způsobuje pravidelná dmутí hladiny všech moří, tzv. přílivy a odlivy.



Ilustrace ke gravitačnímu zákonu

Univerzální gravitační zákon vyjádřen vzorcem zní

$$F_G = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

kde konstanta úměrnosti  $\varkappa$  se nazývá **gravitační konstanta** a má hodnotu

$$\varkappa \approx 6.6732 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2.$$

Velikost gravitační konstanty Newton neznal, poprvé ji naměřil až HENRY CAVENDISH roku 1798 pomocí přesných torzních vah. Podařilo se mu poprvé změřit malé přitažlivé síly, kterými na sebe působí dvě velké a dvě malé olovené koule. Konstanta  $\varkappa$  je dodnes jednou z nejméně přesných fyzikálních konstant.

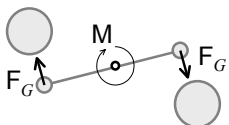


Schéma uspořádání Cavendishova experimentu. Z reakce torzního vlákna na silový moment  $\mathbf{M}$  je možno určit gravitační sílu a odtud gravitační konstantu.

O nepatrné velikosti gravitačních sil svědčí například tato skutečnost. Kdybychom měli ve volném prostoru dvě stejné olovené koule, každou o průměru jeden metr, ve vzdálenosti jeden kilometr od sebe a na počátku v klidu, pak by se obě koule vzájemným gravitačním přitahováním uvedly do pohybu a srazily by se až za 460 dní!

Směr přitažlivé síly je určen spojnicí obou těles, jak to vyžaduje zákon akce a reakce. Proto je možno zapsat gravitační zákon také v obecném vektorovém tvaru

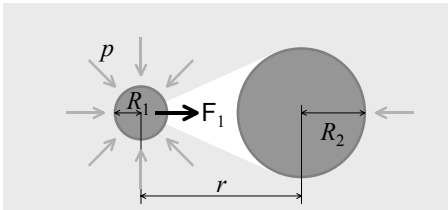
$$\mathbf{F}_G = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (8.5)$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor tělesa  $m_2$  vzhledem k  $m_1$  a  $\mathbf{F}_G$  je síla, jakou je hmotný bod  $m_2$  přitahován k  $m_1$ .

Až do objevu gravitačního zákona působily všechny známé síly kontaktem těles, tedy na blízko. Gravitace byla první silou, která působí na dálku, *ad distantio*, a to podle Newtona okamžitě. Všechna astronomická pozorování to skutečně potvrzují. Nicméně ani sám Newton silovému působení na dálku nerozuměl a pokud byl dotázán na podstatu své gravitační síly, odpovídal výrokem: *Hypotheses non fingo* (Hypotézy nevymýšlím). Moderní výklad silového působení na dálku spočívá v zavedení hmotného silového pole v prostoru, kde se tělesa nacházejí. Ukazuje se také, že silové působení není okamžité, ale má konečnou rychlost, kterou je rychlost světla. Tato většinou malá zpřesnění popisuje teorie gravitace ALBERTA EINSTEINA z roku 1916, která je známá spíše pod názvem *obecná teorie relativity*.

### Jeden krásný, ale nesprávný model gravitace

Jak jsme již uvedli, Newton nepodal ke svému gravitačnímu zákonu žádné vysvětlení původu gravitace. Proto se objevilo mnoho pokusů o mechanické vysvětlení toho, odkud se gravitace bere. Jedna z populárních teorií je založena na představě, že celý vesmír je naplněn mořem velmi rychlých a drobných částic, které se pohybují náhodně všemi směry a občas narážejí do kosmických těles. Tím jim udělují silový impulz, který působí podobně jako tlak v plynu ze všech stran stejně, a nemá proto žádného mechanického účinku. Pokud však přiblížíme k sobě dvě tělesa, budou se před tímto proudem částic navzájem stínit, čímž dojde k narušení izotropnosti tlaku částic a ve výsledku se budou tělesa k sobě přitahovat. Silový efekt *stínění* bude pochopitelně tím větší, čím budou obě tělesa větší a čím budou k sobě blíže. Snadno se ukáže, že výsledná přitažlivá síla bude klesat se čtvercem vzdálenosti obou těles.




---

Podle modelu je přitažlivost těles způsobena vzájemným odstíněním obou těles před nárazy drobných a rychlých částic přicházejících rovnoměrně ze všech možných stran kosmu.

---

Skutečně, mějme dvě koule o velikostech  $R_1$  a  $R_2$  ve vzdálenosti  $r$  od sebe. Koule napravo odstíní částice, které by jinak dopadly na levou kouli, a to z prostorového úhlu o velikosti

$$\Omega_2 \approx \frac{\pi R_2^2}{r^2}.$$

Odstíněná (bílá) plocha na levé kouli bude mít velikost

$$S_1 \approx \Omega_2 R_1^2 \approx \frac{\pi R_1^2 R_2^2}{r^2}.$$



Pokud písmenem  $p$  označíme velikost izotropního tlaku částic, které bombardují obě naše tělesa, pak výsledná síla působící na levou kouli bude rovna

$$F_1 \approx pS_1 \approx p \frac{\pi R_1^2 R_2^2}{r^2}.$$

Výsledná síla tedy bude silou přitažlivou a bude mít směr spojnice obou těles. Snadno se ukáže, že stejně velká síla působí i na druhé těleso a je tedy splněn zákon akce a reakce. Pokles přitažlivé síly se čtvercem vzdálenosti plyne naprosto přirozeně z uvedeného modelu. Model by fungoval i případě více než dvou těles.

Tento model mechanismu gravitace proslavil pod názvem *kinetická teorie gravitace* roku 1782 GEORGE-LUIS LE SAGE. Myšlenka je však ještě starší a pochází od NICOLAS FATIO DE DUILLIERA, který s ní roku 1690 seznámil CHRISTIAANA HUYGENSE. Bohužel, popsaný model není skutečným mechanismem gravitace. Nesprávně totiž předpokládá, že gravitační síla nezávisí na hmotnostech, ale jen na geometrických rozměrech těles. Z modelu dále plyne nesprávný závěr, že při pohybu tělesa v moři částic vzniká odporová síla úměrná absolutní rychlosti tělesa. Protože však planety obíhají kolem Slunce po miliardy let, aniž by se jejich pohyb nějak zpomalil, je zřejmé, že žádná odporová síla neexistuje.

### 8.1.7 Hmotnost Země a Slunce

Velikost gravitační konstanty Newton neznal, poprvé ji naměřil až HENRY CAVENDISH roku 1798. Do té doby byl znám z pohybu Měsíce a z měření tíhového zrychlení jen součin gravitační konstanty a hmotnosti Země  $\varkappa M_Z$ , případně z pohybů planet součin gravitační konstanty a hmotnosti Slunce  $\varkappa M_S$ . Zjednodušeně, ale vcelku správně, se proto říká, že Cavendish ve své laboratoři zvážil Zemi a Slunce.

Hmotnost Země můžeme určit například pomocí tíhového zrychlení na povrchu Země. Z gravitačního zákona plyne vzorec

$$g = \frac{F_G}{m} = \varkappa \frac{M_Z}{R_Z^2}.$$

Velikost Země  $R_Z$  známe, stejně tak tíhové zrychlení  $g$ , a proto najdeme

$$M_Z = \frac{gR_Z^2}{\varkappa} \approx 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

Newton sám odhadl hmotnost Země z velikosti a hustoty Země. Porovnáním hustoty běžných minerálů odhadl hustotu Země jako  $\rho_Z \approx 5000 \text{ kg/m}^3$ , a tak dostal pro hmotnost Země odhad

$$M_Z \approx \rho_Z V_Z \approx \frac{4}{3} \pi \rho_Z R_Z^3 \approx 5 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

Pro hmotnost Slunce dostaneme z rovnosti odstředivého a přitažlivého zrychlení

$$\frac{v^2}{r} = \varkappa \frac{M_S}{r^2}$$

vzorec

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa T^2} \approx 1.99 \times 10^{30} \text{ kg},$$

kde  $r \approx 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$  je střední vzdálenost Země od Slunce a  $T \approx 365 \text{ dní} \approx 3.15 \times 10^7 \text{ s}$  je oběžná doba.

### 8.1.8 Zákon zachování energie a potenciální energie

Dva hmotné body  $m_1$  a  $m_2$  se vzájemně přitahují podle Newtona gravitační silou

$$\mathbf{G}_1 = \kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad \text{a} \quad \mathbf{G}_2 = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}.$$

Pokud chceme tělesa od sebe oddálit, musíme vykonat práci. Vykonaná práce zvyšuje energii soustavy  $A = \Delta E = \Delta T + \Delta U$ . Spočteme nyní potřebnou práci. Pohybové rovnice obou těles jsou

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{G}_1 \quad \text{a} \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{G}_2.$$

Přírůstek práce obou sil je tedy

$$dA = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = (m_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{G}_1) \cdot d\mathbf{r}_1 + (m_2 \mathbf{a}_2 - \mathbf{G}_2) \cdot d\mathbf{r}_2 = dT + dU,$$

kde přírůstek kinetické energie je

$$dT = m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = d\left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right)$$

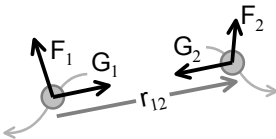
a přírůstek potenciální energie je

$$dU = -\mathbf{G}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 - \mathbf{G}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = d\left(-\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right),$$

kde  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  je relativní vzdálenost obou těles. **Potenciální gravitační energie**

$$U = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$$

obou těles je tedy závislá jen na relativní vzdálenosti a hmotnostech obou těles.




---

Ilustrace k odvození potenciální energie gravitačních sil.

---

Potenciální gravitační energie vychází vždy záporně, největší potenciální energii mají od sebe nekonečně vzdálená tělesa, jejich potenciální energie je rovna nule

$U = 0$ . Pokud na soustavu těles nepůsobí vnější síly, je vložená práce rovna nule  $A = 0$  a musí platit **zákon zachování energie** soustavy dvou hmotných bodů

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \varkappa\frac{m_1m_2}{r_{12}} = \text{konst.}$$

Často je jedno z těles mnohem hmotnější než druhé a téměř se nepohybuje, například Slunce je třístatisíckrát hmotnější než Země nebo Země je o dvacet řádů těžší než satelit. V tom případě bude mít zákon zachování energie jednodušší tvar

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \varkappa\frac{mM}{r} = \text{konst.},$$

kde  $m$  je hmotnost malého a  $M$  hmotnost velkého tělesa. Pokud se vzdálenost obou těles příliš nemění, tak jako například při šikmém vrhu kamene, můžeme psát  $r = R_Z + h$ , kde  $R_Z$  je poloměr Země a  $h$  výška tělesa nad povrchem Země. Podle předpokladu platí  $h \ll R_Z$ , takže vzorec pro potenciální energii můžeme rozvinout do Taylorovy řady. Pokud se omezíme na první dva členy, dostaneme

$$U = -\varkappa\frac{mM_Z}{R_Z + h} \approx -\varkappa\frac{mM_Z}{R_Z} + \varkappa\frac{mM_Z}{R_Z^2}h = -U_R + mgh,$$

kde  $g = \varkappa M_Z / R_Z^2$ . Potenciální energie roste přibližně lineárně s výškou od zemského povrchu, stejně jako tomu bylo v homogenním tíhovém poli, veličinu  $g$  proto můžeme interpretovat jako tíhové zrychlení Země. Zákon zachování energie pak má známý tvar

$$E \approx \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{konst.}$$

## 8.2 Keplerova úloha

### 8.2.1 Formulace Keplerovy úlohy

Poté, co Newton postuloval gravitační zákon, obrátil úlohu a začal zkoumat pohyb tělesa, na které působí Slunce podle gravitačního zákona (8.5). Protože podle zákona akce a reakce působí také planeta na Slunce stejně velikou silou jako Slunce na planetu, musí se i Slunce pohybovat. I pro tu největší planetu sluneční soustavy však platí, že její hmotnost je ve srovnání s hmotností Slunce téměř zanedbatelná. Například Jupiter je tisíckrát a Země dokonce třístatisíckrát lehčí než Slunce. Proto lze v prvním přiblížení předpokládat, že Slunce se vůbec nepohybuje. Pohyb planety v gravitačním poli nehybného centrálního tělesa řeší tzv. **Keplerova úloha**.

Řešením Keplerovy úlohy Newton zjistil, že těleso se v gravitačním poli Slunce nemusí pohybovat vždy po elipse, ale může se pohybovat obecně po jakékoliv kuželosečce. **Kuželosečky** jsou všechny křivky, které dostaneme při rovinném řezu kuželové plochy. Podle sklonu řezu dostaneme kružnici, elipsu, parabolu nebo hyperbolu. Konkrétní typ kuželosečky – dráhy je určen mechanickou energií planety. Je-li energie planety záporná, trajektorii je elipsa nebo kružnice a těleso obíhá

periodicky kolem Slunce. Je-li energie rovna nule, trajektorií je parabola. Konečně, je-li energie tělesa kladná, trajektorií je hyperbola a těleso proletí kolem Slunce jen jedinkrát a zase se vzdálí do nekonečného kosmu. Takto se chovají například některé komety. V každém případě je však společným ohniskem všech těchto kuželoseček Slunce.

## 8.2.2 Řešení Keplerovy úlohy

Budeme tedy zkoumat, podobně jako Newton, pohyb planety nebo komety o hmotnosti  $m$  v gravitačním poli nehybného Slunce o hmotnosti  $M_S$ . Pohyb planety je popsán pohybem rovnicí

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\varkappa \frac{M_S}{r^3} \mathbf{r}.$$

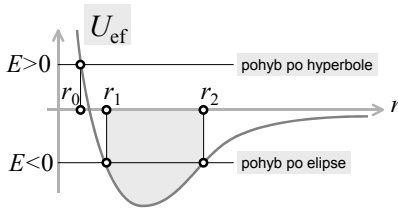
Trajektorii planety můžeme pohodlně najít například pomocí Binetova vzorce, jako jsme to dělali již dříve v dynamice. Nás však zajímá i časový průběh pohybu. Ukážeme si proto jiné řešení, které využívá integrálů pohybu, tj. **zákona zachování energie**

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \varkappa \frac{mM_S}{r}$$

a **zákona zachování momentu hybnosti** planety

$$L = mr^2\dot{\phi}, \quad (8.6)$$

který je jen jiným vyjádřením druhého Keplerova zákona.



Průběh efektivního potenciálu  $U_{\text{ef}}(r)$  a celková energie  $E$  určují, zda bude pohyb planety omezen na interval  $r_1 \leq r \leq r_2$  (pohyb po elipse) nebo omezen jen zdola  $r_0 \leq r$  (pohyb po hyperbole).

V polárních souřadnicích je možno psát mechanickou energii planety ve tvaru

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \varkappa \frac{mM_S}{r}.$$

Vyloučením  $\dot{\phi}$  pomocí (8.6) dostaneme

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} - \varkappa \frac{mM_S}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{ef}}(r),$$

kde  $U_{\text{ef}}(r)$  představuje **efektivní potenciální energii**. Tato rovnice představuje diferenciální rovnici pro funkci  $r(t)$ , kterou můžeme upravit do tvaru

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2\varkappa M_S}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

a vyřešit. Hledejme ale nejprve rovnici trajektorie  $r(\phi)$ . Čas z rovnice vyloučíme opět pomocí druhého Keplerova zákona (8.6). Platí

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = r' \dot{\phi} = r' \frac{L}{mr^2},$$

kde čárkou označujeme derivace podle azimutu  $\phi$ . Substituce

$$u = \frac{1}{r} \quad \text{dává} \quad \dot{r} = -u' \frac{L}{m},$$

a odtud

$$u' = \frac{du}{d\phi} = \pm \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2\kappa M_S m^2}{L^2} u - u^2}.$$

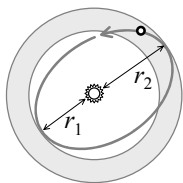
Tuto diferenciální rovnici umíme vyřešit například separací proměnných. Označíme-li kořeny kvadratické funkce pod odmocninou jako  $u_1$  a  $u_2$ , pak bude řešení  $u(\phi)$  reálné, jen pokud platí  $u_1 \geq u \geq u_2$ . Pomocí kořenů  $u_1$  a  $u_2$  lze diferenciální rovnici zapsat ve tvaru

$$u' = \pm \sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}.$$

Které znaménko u odmocniny skutečně platí, to rozhodnou počáteční podmínky. Pro kořeny  $u_1$  a  $u_2$  platí známé **Viětovy věty**

$$u_1 + u_2 = \frac{2\kappa M_S m^2}{L^2} \quad \text{a} \quad u_1 u_2 = -\frac{2mE}{L^2}.$$

Oba kořeny jsou tudíž kladné, jen když je  $E \leq 0$ . Planeta je pak vázána v gravitačním poli Slunce  $r_1 \leq r \leq r_2$  a nemůže jej opustit. V případě  $E = 0$  vychází  $u_2 = 0$ , takže planeta se může vzdálit až do nekonečna  $r_2 \rightarrow \infty$ . Konečně v případě, že  $E > 0$ , bude  $u_2$  i  $r_2$  záporné a pohyb planety je rovněž omezen jedinou podmínkou  $r_1 \leq r$ .




---

Keplerova úloha. Planeta obíhá po elipse v prstenci vymezeném dvěma extrémními hodnotami vzdálenosti  $r_1$  a  $r_2$  od Slunce.

---

Separací proměnných dostaneme nejprve rovnici

$$\pm d\phi = \frac{du}{\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}},$$

a odtud její integrací dostaneme

$$\mp (\phi - \phi_0) = \arccos \frac{u - \frac{u_1 + u_2}{2}}{\frac{u_1 - u_2}{2}}.$$

Obvykle volíme počátek měření azimutu  $\phi$  v perihéliu, tj. tam, kde je  $u = u_1 = u_{\max}$ , resp.  $r = r_1 = r_{\min}$ , proto je  $\phi_0 = 0$ . Zároveň azimut měříme obvykle na tu stranu, na kterou azimut přirozeným pohybem planety skutečně roste. Proto platí jen znaménko plus. Řešení rovnice má tedy tvar

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \cos \phi, \quad (8.7)$$

což je obecná **rovnice kuželosečky**

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \phi). \quad (8.8)$$

Z geometrie kuželoseček je známo, že pro  $e = 0$  dostaneme  $r = p = a$ , tj. **kružnici**, pro  $e < 1$  dostaneme **elipsu**, pro  $e = 1$  dostaneme **parabolu** a konečně pro  $e > 1$  dostaneme jednu větev **hyperboly**. Porovnáním řešení (8.7) s rovnicí elipsy (8.8) dostaneme pro parametr  $p$  rovnici

$$\frac{1}{p} = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{\varkappa M_S m^2}{L^2} \quad (8.9)$$

a pro excentricitu  $e$  rovnicí

$$e = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} = \sqrt{1 - \frac{4u_1 u_2}{(u_1 + u_2)^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\varkappa^2 M_S^2 m^3}}. \quad (8.10)$$

Tím jsme dokázali **první Keplerův zákon** pro pohyb planet. Zároveň jsme jej rozšířili o poznatek, že dráha tělesa nemusí být eliptická, pokud má těleso dostatečnou energii. V případě, že je celková energie  $E$  tělesa kladná, je jeho dráha hyperbolická, protože pak je  $e > 1$ . V případě, že energie tělesa je přesně rovna nule, pohybuje se těleso po parabole, neboť je  $e = 1$ . Speciálně pro elipsu je velká poloosa rovna

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{u_1 + u_2}{2u_1 u_2} = -\frac{\varkappa m M_S}{2E} \geq 0.$$

Obráceně platí také

$$E = -\frac{\varkappa m M_S}{2a}, \quad (8.11)$$

takže celková energie planety závisí jen na velké poloose její oběžné dráhy. Podobně z rovnice (8.9) vyjádříme orbitální moment  $L$  pomocí dráhových elementů

$$L^2 = \varkappa M_S m^2 p. \quad (8.12)$$

Orbitální moment můžeme vyjádřit také přes plošnou rychlost  $w = \pi ab/T$  vztahem  $L = 2mw = 2\pi mab/T$ . Dosazením do (8.12) odtud dostaneme po malé úpravě **třetí Keplerův zákon** ve tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\varkappa M_S}{4\pi^2}.$$

Pomocí univerzálního gravitačního zákona jsme tak pohodlně dokázali všechny tři Keplerovy zákony.

### 8.2.3 Rychlost planety

Celková energie planety je podle (8.11) rovna

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM_S}{r} = -\kappa \frac{mM_S}{2a},$$

odtud se spočte okamžitá rychlost planety jako

$$v = \sqrt{\kappa M_S \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (8.13)$$

Například pro perihélium  $r_P = a(1 - e)$  a afélium  $r_A = a(1 + e)$  vycházejí rychlosti

$$v_P = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{a} \frac{1+e}{1-e}} \quad \text{a} \quad v_A = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{a} \frac{1-e}{1+e}}.$$

V případě kruhové dráhy  $r = a$  je zřejmě

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{a}}.$$

### 8.2.4 Keplerova rovnice

Trajektorii planety  $r(\phi)$  už známe, musíme ještě najít závislost polohy planety na čase, hledáme tedy dále funkce  $\phi(t)$  a  $r(t)$ . Z (8.6) a (8.12) máme

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{\sqrt{\kappa M_S p}}{r^2} = \frac{\sqrt{\kappa M_S p}}{p^2} (1 + e \cos \phi)^2,$$

takže separací proměnných a integrací odtud dostaneme

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 + e \cos \phi)^2} = \int_0^t \sqrt{\frac{\kappa M_S}{p^3}} dt = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{p^3}} t.$$

Integrál vlevo upravíme pomocí vhodné substituce

$$y = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}$$

a spočteme. Tak dostaneme

$$M = 2 \left( \operatorname{arctg} y - e \frac{y}{1+y^2} \right),$$

kde výraz na levé straně rovnice

$$M = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{a^3}} t = nt \quad (8.14)$$

se nazývá **střední anomálie** a  $n = \sqrt{\kappa M_S/a^3}$  **střední pohyb** planety. Pro praktické výpočty v astronomii je tento vzorec nevhodný, protože se jedná o relativně složitou transcendentní rovnici vzhledem k  $y$ . Proto se zavádí dále **excentrická anomálie**  $E$  vztahem

$$y = \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad \text{pak je} \quad \frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{2} \sin E.$$

Tak dostaneme mnohem vhodnější vzorec k výpočtu excentrické anomálie známý jako **Keplerova rovnice**

$$M = E - e \sin E. \quad (8.15)$$

Při výpočtu polohy planety se tedy v praxi postupuje takto: Pro dané parametry elipsy  $a, e$  spočteme v daný okamžik  $t$  nejprve střední anomálii  $M$  planety podle (8.14). Odtud pak pomocí Keplerovy rovnice (8.15) najdeme excentrickou anomálii  $E$  a z ní pak spočteme **pravou anomálii** (azimut)  $\phi$  pomocí vzorce

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

Vzdálenost planety pak spočteme buď již ze známé pravé anomálie  $\phi$  a z rovnice elipsy (8.8) anebo s pomocí excentrické anomálie  $E$  ze vztahu

$$r = a(1 - e \cos E),$$

který dostaneme úpravou vzorce (8.8), kam dosadíme za výraz

$$\cos \phi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

### 8.2.5 Hyperbolická dráha

Je-li celková energie tělesa, například komety, kladná, vychází excentricita větší než jedna  $e > 1$  a velká poloosa dráhy záporně  $a < 0$ . Dráhou tělesa je tudíž hyperbola. Ze stejného důvodu vycházejí také střední anomálie  $M$  a excentrická anomálie  $E$  jako ryze imaginární veličiny. Formálně však zůstávají všechny výše odvozené vzorce nadále v platnosti. Pokud definujeme nové reálné veličiny  $M^*$  a  $E^*$  vztahy  $M = iM^*$  a  $E = iE^*$  a využijeme známých komplexních identit

$$\sin(ix) = i \sinh x, \quad \cos(ix) = \cosh x \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{tgh} x,$$

dostaneme pro výpočet polohy tělesa na hyperbolické dráze následující mírně upravené vztahy. Pro střední anomálii

$$M^* = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{|a|^3}} t,$$



pro excentrickou anomálii upravenou Keplerovu rovnici

$$M^* = e \sinh E^* - E^*,$$

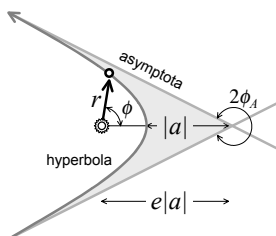
pro pravou anomálii rovnici

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tgh} \frac{E^*}{2}$$

a pro výpočet vzdálenosti máme

$$r = |a| (e \cosh E^* - 1)$$

nebo stále platící (8.2). Geometrický význam parametru  $p = a(1 - e^2) > 0$  se nemění a nadále platí, že parametr  $p$  určuje vzdálenost tělesa od Slunce v kvadratuře  $p = r(\pi/2)$  nebo poloměr křivosti dráhy ve vrcholu hyperboly  $p = R(0)$ .




---

Asymptoty hyperbolické dráhy svírají navzájem úhel  $2\phi_A$ .

---

Pohyb po hyperbole už není periodický, protože harmonické funkce nahradily funkce hyperbolické. Polohu asymptot, to jest přímek, k nimž se dráha tělesa v nekonečnu přibližuje, najdeme snadno z rovnice hyperboly. Asymptoty odpovídají takovým směrům  $\phi = \pm\phi_A$ , kdy vzdálenost  $r$  jde do nekonečna a tedy, kdy jmenovatel  $1 + e \cos \phi$  jde k nule. Odtud máme

$$\cos \phi_A = -\frac{1}{e}.$$

Pro  $e \approx 1$  máme parabolu a asymptoty jsou maximálně rozevřené, neboť pak je  $\phi_A \approx \pi$ .

### 8.2.6 Parabolická dráha

Parabolický pohyb odpovídá limitnímu případu, kdy celková energie tělesa je rovna nule. Příslušné rovnice popisující pohyb dostaneme třeba limitním přechodem z eliptické dráhy. Místo parametru  $a$ , který roste do nekonečna, je v tomto případě vhodnější užívat konečného parametru  $p$ . Pro  $e \approx 1$  dostaneme místo Keplerovy rovnice přímo rovnici pro pravou anomálii

$$M = \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\phi}{2}, \quad (8.16)$$

kde střední anomálii definujeme vztahem

$$M = \sqrt{\frac{4\pi M_S}{p^3}} t.$$

V dobách, kdy ještě nebyly počítače, nebylo snadné numericky vyřešit kubickou rovnici (8.16), proto se hledaly způsoby, jak numerické řešení kubické rovnice obejít. V našem případě takový způsob existuje a my si jej nyní ukážeme. Metoda je založena na goniometrické identitě

$$\cotg 2x = \frac{1}{2} (\cotg x - \operatorname{tg} x).$$

Zavedme tedy pomocný argument  $\gamma$  vztahem

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = 2 \cotg \gamma = \cotg \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

a dosadíme do pravé strany rovnice (8.16). Po jednoduché úpravě dostaneme

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\phi}{2} = \frac{1}{3} \cotg^3 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2}.$$

Pokud dále zavedeme ještě argument  $\beta$  vztahem

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2},$$

můžeme pravou stranu dále upravit

$$\frac{1}{3} \cotg^3 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3} \cotg^3 \frac{\beta}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2} = \frac{2}{3} \cotg \beta,$$

takže máme nakonec výsledek

$$M = \frac{2}{3} \cotg \beta.$$

Dostali jsme tak přímou souvislost mezi střední anomálií  $M$  a argumentem  $\beta$ , z něhož pohodlně najdeme  $\gamma$  a z něho pak pravou anomálii  $\phi$ . Vzdálenost tělesa od Slunce pak už snadno spočteme třeba podle vzorce

$$r = \frac{p}{1 + \cos \phi} = p \sec^2 \frac{\phi}{2}.$$

### 8.2.7 Lambert-Eulerův vzorec

Známe-li parametry dráhy, můžeme spočítat vzdálenost a polohu planety v libovolném čase. Obrácenou úlohou je problém řešený poprvé JOHANN HEINRICH LAMBERTEM<sup>1</sup> roku 1761. Z astronomických pozorování jsou známy vzdálenosti  $r_1$  a  $r_2$

<sup>1</sup>JOHANN HEINRICH LAMBERT se zabýval vedle mechaniky také optikou a termodynamikou. V matematice dokázal roku 1768 iracionálnost čísla  $\pi$ , jako první se systematicky zabýval studiem hyperbolických funkcí.

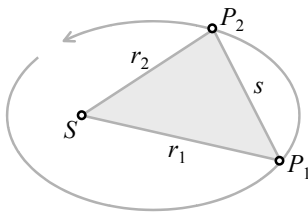
stejně planety ve dvou různých místech  $P_1$  a  $P_2$  odpovídající časovým okamžikům  $t_1$  a  $t_2$  a dále je známa úhlová vzdálenost planety  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ . Pomocí kosínové věty tedy dokážeme určit také vzdálenost

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \Delta\phi}$$

mezi oběma polohami  $P_1$  a  $P_2$ . Předpokládejme tedy, že známe  $r_1, r_2$  a  $s$  a dále, že známe poloosu  $a$  dráhy planety a hmotnost centrálního tělesa  $M_S$  nebo střední denní pohyb planety

$$n = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{a^3}}.$$

Máme určit, jaký časový interval  $\Delta t = t_2 - t_1$  mezi oběma pozorováními  $P_1$  a  $P_2$  uběhl. Vzhledem k transcendentnosti Keplerovy rovnice je problém netriviální.




---

Ilustrace k Lambertově větě. Máme určit dobu, za kterou se planeta přemístí z  $P_1$  do  $P_2$ .

---

Z řešení Keplerovy úlohy víme, že platí

$$nt_1 = E_1 - e \sin E_1, \quad nt_2 = E_2 - e \sin E_2,$$

kde  $E_1$  a  $E_2$  jsou excentrické anomálie. Odtud

$$n\Delta t = E_2 - E_1 - 2e \sin \frac{E_2 - E_1}{2} \cos \frac{E_2 + E_1}{2}.$$

Pomocí substituce

$$g = \frac{E_2 - E_1}{2} \quad \text{a} \quad \cos h = e \cos \frac{E_2 + E_1}{2}$$

to lze upravit do tvaru

$$n\Delta t = 2g - 2 \sin g \cos h. \quad (8.17)$$

Pro vzdálenosti planety platí

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1) \quad \text{a} \quad r_2 = a(1 - e \cos E_2),$$

odtud je

$$r_1 + r_2 = 2a - 2ea \cos \frac{E_2 - E_1}{2} \cos \frac{E_2 + E_1}{2},$$

takže platí

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos g \cos h). \quad (8.18)$$

Konečně pro vzdálenost  $s$  z geometrického významu excentrické anomálie platí

$$s^2 = a^2 (\cos E_2 - \cos E_1)^2 + b^2 (\sin E_2 - \sin E_1)^2.$$

Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$s^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{2} \sin^2 \frac{E_2 + E_1}{2} + b^2 \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{2} \cos^2 \frac{E_2 + E_1}{2}$$

anebo do tvaru

$$s^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{2} \left( 1 - e^2 \cos^2 \frac{E_2 + E_1}{2} \right),$$

což můžeme přepsat pomocí výše definovaných parametrů  $g$  a  $h$  jako

$$s = 2a \sin g \sin h. \quad (8.19)$$

Sečtením a odečtením rovnic (8.18), (8.19) a známých trigonometrických vzorců dostaneme

$$\cos(h \pm g) = \cos g \cos h \mp \sin g \sin h = 1 - \frac{r_1 + r_2}{2a} \mp \frac{s}{2a}.$$

Odtud veličiny  $\lambda_1 = h + g$  a  $\lambda_2 = h - g$  splňují rovnice

$$\cos \lambda_1 = 1 - \frac{r_1 + r_2 + s}{2a} \quad \text{a} \quad \cos \lambda_2 = 1 - \frac{r_1 + r_2 - s}{2a},$$

takže podle (8.17) spočteme hledaný časový interval  $\Delta t$  z rovnice

$$n\Delta t = \lambda_1 - \lambda_2 - 2 \sin \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = (\lambda_1 - \sin \lambda_1) - (\lambda_2 - \sin \lambda_2).$$

Těmito vztahy je problém vyřešen, poslední rovnice přitom představuje hledaný **Lambertův vzorec**.

Pro hyperbolickou dráhu bychom dostali podobný vzorec

$$n\Delta t = (\sinh \lambda_1 - \lambda_1) - (\sinh \lambda_2 - \lambda_2),$$

kde

$$\cosh \lambda_1 = 1 + \frac{r_1 + r_2 + s}{2|a|} \quad \text{a} \quad \cosh \lambda_2 = 1 + \frac{r_1 + r_2 - s}{2|a|}.$$

Pro parabolickou dráhu je  $e \rightarrow 1$  a  $a \rightarrow \infty$ , vzorce se výrazně zjednoduší a platí

$$\Delta t \approx \frac{1}{6n} (\lambda_1^3 - \lambda_2^3),$$

kde

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{a}} \quad \text{a} \quad \lambda_2 \approx \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{a}}.$$

Po dosazení a malé úpravě tak dostáváme **Eulerův vzorec**

$$\Delta t \approx \frac{1}{6\sqrt{\kappa M_S}} \left[ (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2} \right].$$

### 8.2.8 Laplace-Runge-Lenzův vektor

Při zkoumání Keplerovy úlohy jsme využili zákonů zachování, tedy integrálu energie a momentu hybnosti. Ukazuje se, že existuje ještě jeden nezávislý integrál pohybu, který objevil roku 1799 PIERRE-SIMON LAPLACE a ten nyní najdeme. Pohyb planety je popsán Newtonovou pohybovou rovnicí

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\kappa m M_S}{r^3} \mathbf{r}.$$

Spočtěme nejprve derivaci součinu  $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ . Vzhledem k tomu, že  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  se zachovává, dostaneme hned

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = -\frac{\kappa m M_S}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{\kappa m^2 M_S}{r^3} [r^2 \mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r}].$$

Nyní se podívejme na derivaci jednotkového vektoru  $\mathbf{r}/r$ . Derivováním dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\mathbf{v}}{r} + \mathbf{r} \left( -\frac{1}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{1}{r^3} [r^2 \mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r}].$$

Porovnáním obou výsledků je zřejmé, že vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \kappa m^2 M_S \frac{\mathbf{r}}{r}$$

je v čase neměnný. Tento integrál se nazývá **Laplace-Runge-Lenzův vektor** nebo stručněji **Laplaceův vektor**.

Snadno se ukáže, že Laplaceův vektor  $\mathbf{A}$  je kolmý na  $\mathbf{L}$  a leží tudíž v rovině trajektorie planety. Skutečně platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - \kappa m^2 M_S \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0.$$

Vektor  $\mathbf{A}$  má totiž směr rovnoběžný s vektorem  $\overrightarrow{CP}$ , kde  $C$  je silové centrum a  $P$  je pericentrum. Skutečně, když dosadíme za  $\mathbf{r}_P$  a  $\mathbf{v}_P$ , máme

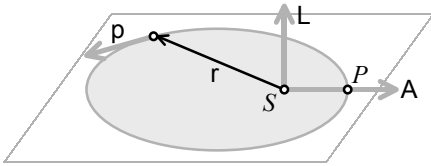
$$\mathbf{A} = m \mathbf{v}_P \times (\mathbf{r}_P \times m \mathbf{v}_P) - \kappa m^2 M_S \frac{\mathbf{r}_P}{r_P} = m^2 v_P^2 \mathbf{r}_P - \kappa m^2 M_S \frac{\mathbf{r}_P}{r_P},$$

neboť  $\mathbf{r}_P$  a  $\mathbf{v}_P$  jsou v pericentru vzájemně kolmé, odtud dostaneme

$$\mathbf{A} = m^2 r_P \left( \frac{v_P^2}{r_P} - \frac{\varkappa M_S}{r_P^2} \right) \mathbf{r}_P,$$

přičemž vždy platí

$$\frac{v_P^2}{r_P} - \frac{\varkappa M_S}{r_P^2} > 0.$$




---

Moment hybnosti  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  je kolmý k rovině dráhy planety, zatímco Laplaceův vektor  $\mathbf{A}$  leží v rovině trajektorie a má směr spojnice  $SP$  (tj. přímky apsid).

---

Konečně, spočteme ještě skalární součin

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - \varkappa m^2 M_S r = L^2 - \varkappa m^2 M_S r,$$

kde jsme dosadili za

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{L} = L^2.$$

Vzhledem k tomu, že úhel mezi vektorem  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{r}$  představuje přímo azimut  $\phi$ , platí také  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \phi$ , a proto musí být

$$Ar \cos \phi = L^2 - \varkappa m^2 M_S r.$$

Odtud už máme hned rovnici trajektorie planety

$$\frac{1}{r} = \frac{\varkappa m^2 M_S + A \cos \phi}{L^2},$$

z níž je zřejmé, že jde o kuželosečku

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \phi)$$

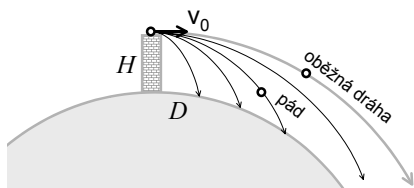
s parametrem  $p = L^2 / \varkappa M_S m^2$  a excentricitou  $e = A / \varkappa M_S m^2$ .

## 8.3 Umělé satelity a kosmické sondy

### 8.3.1 První kosmická rychlost

Již Newton zkoumal, jak by se měnil pád koule vystřelené horizontálně z děla na věži o výšce  $H$  nad zemským povrchem, kdybychom zvyšovali počáteční rychlost

koule. Galileo ukázal, že pro malé rychlosti  $v_0$  by se koule pohybovala po parabole a na zem by dopadla za čas  $t_0 = \sqrt{2H/g}$ , přitom by doletěla do vzdálenosti  $D = v_0 t_0 = v_0 \sqrt{2H/g}$ .




---

Trajektorie dělové koule při zvyšování počáteční rychlosti  $v_0$ .

---

Kdybychom rychlost koule dále zvyšovali, dopadala by koule dál a dál od věže, až by se počalo výrazněji projevovat zakulacení povrchu Země. Při určité rychlosti  $v_0 = v_I$  by koule padala k Zemi právě tak rychle, jak rychle by pod ní povrch Země ubíhal. To by nastalo právě v tom okamžiku, kdy by se křivost dráhy koule rovnala křivosti povrchu Země. A protože poloměr křivosti dráhy koule při vodorovném vrhu je  $r = v_0^2/g$  a poloměr Země je  $R_Z$ , dostaneme z podmínky  $r = R_Z$  rychlost

$$v_I = \sqrt{gR_Z} = \sqrt{\varkappa \frac{M_Z}{R_Z}} \approx 7.9 \text{ km/s}. \quad (8.20)$$

Tato rychlost se nazývá **první kosmická rychlost** a je to nejmenší rychlost, kterou musíme satelitu udělit, aby nespádl zpět na povrch Země. Pochopitelně, zde neuvažujeme odpor atmosféry.

První kosmickou rychlost můžeme pohodlně získat také úvahou, že koule bude obíhat kolem Země po kruhové dráze o poloměru  $R_Z$ , pokud bude mít takovou rychlost  $v_I$ , že jeho dostředivé zrychlení  $a = v_I^2/R_Z$  bude právě rovno tíhovému zrychlení  $g$ . Odtud opět dostaneme vzorec (8.20).

Oběžná doba satelitu, případně kosmické lodi, obíhajícího kolem Země je tedy rovna

$$T = \frac{2\pi R_Z}{v_I} = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z^3}{\varkappa M_Z}} \approx 83 \text{ min}.$$

Jestliže sem dosadíme za hmotnost Země výraz  $M_Z = \frac{4}{3}\pi\rho_Z R_Z^3$ , dostaneme pro oběžnou dobu vzorec

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\varkappa\rho_Z}},$$

podle kterého nezávisí perioda oběhu satelitu překvapivě na velikosti planety, ale jen na její střední hustotě  $\rho_Z$ . Z oběžné doby  $T$  nízkoleteckých satelitů můžeme naopak počítat hustotu planety podle vzorce

$$\rho = \frac{3\pi}{\varkappa T^2}.$$

Reálné satelity musí obíhat Zemi nad atmosférou, tedy ve výškách nad 200 km. Má-li satelit obíhat ve výšce  $H$ , bude poloměr jeho kruhové dráhy  $r_0 = R_Z + H$ . Dostředivá síla na kruhové oběžné dráze se musí rovnat přitažlivé síle gravitační, odtud je potřebná **kruhová rychlost** satelitu rovna

$$v_K = \sqrt{\varkappa \frac{M_Z}{r_0}} = \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{R_Z + H}} \leq v_I.$$

Kruhová rychlost je tedy vždy menší než první kosmická rychlost.

### 8.3.2 Obecná dráha satelitu

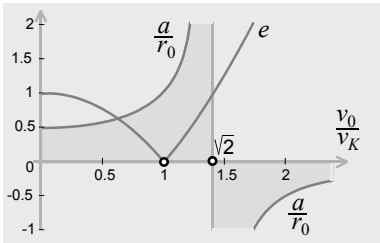
Vratme se zpátky k Newtonovu dělu. Jestliže vystrelíme dělovou kouli rychlostí  $v_0$  horizontálně ve vzdálenosti  $r_0 = R_Z + H$  od středu Země, pak moment hybnosti koule je roven  $L = mr_0 v_0$  a energie koule je rovna

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \varkappa \frac{m M_Z}{r_0} = \frac{1}{2} m (v_0^2 - 2v_K^2).$$

Pro excentricitu její dráhy platí vzorec (8.10), jestliže tam dosadíme za  $L$  a  $E$  podle posledních dvou vzorců, dostaneme po úpravě výsledek

$$e = \left| 1 - \frac{v_0^2}{v_K^2} \right|, \quad \text{kde} \quad v_K = \sqrt{\varkappa \frac{M_Z}{r_0}} \quad (8.21)$$

je kruhová rychlost příslušná dané vzdálenosti  $r_0$  od středu Země.




---

Závislost excentricity  $e$  a velké poloosy  $a$  dráhy koule na její počáteční rychlosti  $v_0$ . Všimněte si dvou významných bodů  $v_0 = v_K$ , kde je trajektorií kružnice a  $v_0 = v_K \sqrt{2}$ , kde je trajektorií parabola.

---

Velká poloosa dráhy se najde ze vzorce (8.11)

$$a = \frac{r_0}{2 - v_0^2/v_K^2}. \quad (8.22)$$

Pro  $v_0 > v_K \sqrt{2}$  vychází poloosa  $a$  záporná, elipsa tedy přechází v hyperbolu. Parametr  $p$  však zůstává kladný a stále monotónně roste s počáteční rychlostí koule. Parametr  $p$  se spočte pohodlně ze vzorce (8.9), odtud po dosazení za orbitální moment  $L$  najdeme

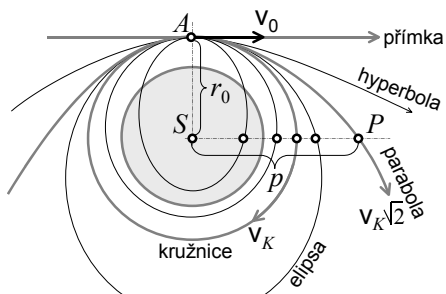
$$p = r_0 \frac{v_0^2}{v_K^2}.$$



Parametr  $p$  je na obrázku zobrazen pro každou trajektorii kvadraturou, tj. úsečkou  $SP$ , která je kolmá na vertikálu  $AS$ . Vzorec je možno přepsat také do tvaru

$$\frac{v_0^2}{p} = \frac{v_K^2}{r_0} = \varkappa \frac{M_Z}{r_0^2} = g,$$

z něhož je zřejmé, že parametr  $p$  má význam poloměru křivosti trajektorie koule ve vrcholu  $A$  dráhy.




---

Trajektorie koule v závislosti na počáteční rychlosti  $v_0$ .

---

Nyní provedeme stručnou diskuzi těchto výsledků. Pro malé rychlosti bude  $e \rightarrow 1$  a  $a \rightarrow r_0/2$ . Dráhou koule bude velmi výstředná elipsa, téměř parabola  $AS$ , jak věděl již Galileo. Pro  $v_0 < v_K$  bude  $e < 1$  a  $a < r_0$ . Dráhou koule bude elipsa se středem uprostřed Země. Pro  $v_0 = v_K$  bude  $e = 0$  a  $a = r_0$ . Dráhou koule tedy bude kružnice a koule se stane umělou družicí Země, pohybující se první kosmickou rychlostí. Pro  $v_0 = v_K\sqrt{2}$  bude  $e = 1$  a velká poloosa trajektorie diverguje  $a \rightarrow \infty$ . Dráhou koule bude parabola a jde o pohyb druhou kosmickou rychlostí. Konečně pro  $v_0 > v_K\sqrt{2}$  bude excentricita větší než jedna  $e > 1$  a velká poloosa bude záporná  $a < 0$ . Dráhou koule tedy bude hyperbola a koule unikne navždy z oblasti zemské přitažlivosti.

### 8.3.3 Geostacionární družice

Zvláštní význam v telekomunikační technice dnes mají **geostacionární družice**. Jak je zřejmé z názvu, jde o satelity, které visí nehybně nad určitým místem zemského povrchu. Tyto družice pokrývají dvacet čtyři hodin denně vybrané území televizním signálem nebo slouží k internetovému a telefonnímu spojení území s ostatním světem. Snadno se ukáže, že geostacionární družice se musí nacházet nad rovníkem a obíhat kolem Země v takové výšce, aby její oběžná doba byla totožná s periodou rotace Země kolem osy vzhledem ke hvězdám. Perioda geostacionární družice tedy musí být rovna délce hvězdného dne  $T \approx 23^{\text{h}}56^{\text{m}}$ . Ze třetího Keplerova zákona dostaneme pro poloměr její oběžné dráhy

$$r = \left( \frac{\varkappa M_Z}{4\pi^2} T^2 \right)^{3/2} \approx 6.67R_Z.$$

Výška geostacionární družice nad povrchem Země je tudíž rovna

$$h = r - R_Z \approx 5.67R_Z \approx 36\,000 \text{ km}.$$

### 8.3.4 Druhá kosmická rychlost, úniková rychlost

Pokud budeme chtít vyslat kosmickou sondu mimo dosah gravitačního působení Země, musíme jí dodat rychlost, kterou nazýváme **druhou kosmickou rychlostí**. Je to nejmenší možná rychlost, která umožní tělesu odletět nekonečně daleko od Země. Příslušnou dráhou je zřejmě parabola. Minimální rychlost sondy najdeme z podmínky, že její celková energie je rovna nule

$$E = \frac{1}{2}mv_{II}^2 - \varkappa \frac{mM_Z}{R_Z} = 0.$$

Odtud máme druhou kosmickou rychlost

$$v_{II} = \sqrt{2\varkappa \frac{M_Z}{R_Z}} = v_I \sqrt{2} \approx 11.2 \text{ km/s}.$$

Tato rychlost se běžně nazývá také **únikovou rychlostí**.

### 8.3.5 Černá díra a úniková rychlost

U některých velmi kompaktních těles je úniková rychlost tak vysoká, že se blíží nejvyšší možné rychlosti, tj. rychlosti světla. Pokud je úniková rychlost větší než rychlost světla, nazýváme takový objekt **černou dírou**. Termín zavedl JOHN ARCHIBALD WHEELER až roku 1967. Z černé díry z definice nemůže nic uniknout, ani světlo, a proto bude její povrch absolutně černý. Černou díru není možno pozorovat, její existenci může potvrdit jen její gravitační působení na okolní tělesa.

Popis černé díry nevystačí s Newtonovou teorií gravitace, musí se použít Einsteiнова teorie relativity. Poloměr černé díry přesto Newtonova teorie dokáže přesně předpovědět. Jestliže úniková rychlost z povrchu černé díry je rovna rychlosti světla

$$v_{II} = \sqrt{2\varkappa \frac{M}{R}} = c,$$

pak odtud poloměr černé díry musí být

$$R = \frac{2\varkappa M}{c^2}.$$

Stejný výsledek pro poloměr černé díry, přesněji pro poloměr jejího horizontu událostí, plyne z teorie relativity. Nazývá se **Schwarzschildův poloměr** a odvodil jej již roku 1916 KARL SCHWARZSCHILD. Pro Slunce vychází tento Schwarzschildův poloměr asi 3 km a pro Zemi asi 9 mm. Skutečné rozměry těchto těles jsou tedy velmi vzdálené parametrům černé díry.

### 8.3.6 Třetí kosmická rychlost

Země obíhá kolem Slunce přibližně po kruhové dráze. Její rychlost najdeme jako příslušnou kruhovou rychlost podle vzorce

$$v_{IS} = \sqrt{\varkappa \frac{M_S}{r_S}} \approx 29.8 \text{ km/s}.$$

Tuto rychlost najdeme také tak, že využijeme znalosti o délce oběžné dráhy a délce oběžné doby Země kolem Slunce. Zřejmě je  $v_{IS} = 2\pi r_S / T \approx 29.8 \text{ km/s}$ , kde  $r_S \approx 1 \text{ AU} \approx 149.6$  milionů kilometrů je vzdálenost Země od Slunce a  $T \approx 365.25$  dne je siderická oběžná doba. Pokud bychom chtěli, aby Země opustila sluneční soustavu, museli bychom jí udělit rychlost  $v_{IIS}$  takovou, aby se mohla vzdálit do nekonečna po parabolické dráze, tedy jakousi druhou kosmickou sluneční rychlost. Zřejmě platí

$$v_{IIS} = v_{IS} \sqrt{2} \approx 42.1 \text{ km/s}.$$

Pokud budeme Zemi urychlovat ve směru její nynější obvodové rychlosti  $v_{IS}$ , stačí jí udělit jen dodatečnou rychlost

$$v_{IIS} - v_{IS} \approx 12.3 \text{ km/s}.$$

Totéž platí pro kosmické sondy, které chceme vyslat pryč ze sluneční soustavy. Nejmenší rychlost  $v_{III}$ , která kosmické sondě dovolí opustit sluneční soustavu, se nazývá **třetí kosmická rychlost**. Předpokládejme, že sonda je po startu urychlena na rychlost  $v_{III}$  ve směru orbitální rychlosti Země kolem Slunce. Část této rychlosti však sonda ztratí na překonání gravitačního pole Země, v dostatečné vzdálenosti od povrchu Země musí mít sonda rychlost  $v_\infty = v_{IIS} - v_{IS} \approx 12 \text{ km/s}$ , kterou najdeme ze zákona zachování energie sondy

$$\frac{v_\infty^2}{2} \approx \frac{v_{III}^2}{2} - \frac{\varkappa M_Z}{R_Z} = \frac{v_{III}^2}{2} - \frac{v_{II}^2}{2}.$$

Symbol  $\approx$  jsme zde použili vzhledem ke skutečnosti, že změnu gravitační energie Země a sondy vzhledem ke Slunci v této aproximaci zanedbáváme. Odtud již dostaneme pro třetí kosmickou rychlost známý vztah

$$v_{III} \approx \sqrt{v_\infty^2 + v_{II}^2} = \sqrt{(v_{IIS} - v_{IS})^2 + v_{II}^2} \approx 16.6 \text{ km/s}.$$

### 8.3.7 Čtvrtá kosmická rychlost

Někdy se používá ještě pojem **čtvrté kosmické rychlosti** jako nejmenší počáteční rychlosti nezbytné k tomu, aby kosmická sonda dopadla na povrch Slunce. K tomu dojde, když sondu tentokrát urychlíme ve směru opačném ke směru orbitální rychlosti Země a ta po překonání gravitačního pole Země získá rychlost  $v_\infty = -v_{IS}$  vzhledem k Zemi nebo  $v'_\infty \approx 0$  vzhledem ke Slunci, takže pak sonda dopadne volným pádem na povrch Slunce. Pomocí zákona zachování energie opět najdeme přibližný vztah mezi  $v_{IV}$  a  $v_\infty$ , platí

$$\frac{v_\infty^2}{2} \approx \frac{v_{IV}^2}{2} - \frac{\varkappa M_Z}{R_Z} = \frac{v_{IV}^2}{2} - \frac{v_{II}^2}{2},$$

odtud je potřebná rychlost sondy rovna

$$v_{IV} \approx \sqrt{v_\infty^2 + v_{II}^2} = \sqrt{v_{IS}^2 + v_{II}^2} \approx 31.8 \text{ km/s}.$$

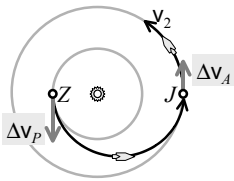
Pokud bychom tedy chtěli poslat umělou kosmickou sondu ke Slunci, museli bychom ji dodat rychlost  $31.8 \text{ km/s}$ , tj. rychlost dvakrát vyšší než je rychlost postačující k opuštění sluneční soustavy. Dostat se ke Slunci je tedy energeticky mnohem obtížnější než uniknout z jeho přitažlivosti pryč.

### 8.3.8 Orbitální manévry

Základním problémem kosmonautiky je přesunout kosmickou sondu z orbity jedné planety na orbitu jiné planety kolem Slunce. Pro jednoznačnost v dalším předpokládáme, že druhá planeta se nachází dále od Slunce než planeta první, v opačném případě by byl postup analogický, jen místo urychlování by se sonda musela zpomalovat. V základní formulaci problému se dále předpokládá, že orbity planet jsou kruhové a že mají poloměry  $r_1$  a  $r_2$  a rychlosti  $v_1$  a  $v_2$ . Nejjednodušší variantou orbitálního manévru je udělit sondě pomocí raketových motorů krátký impulz, čímž vzroste rychlost sondy o  $\Delta v_P$  a sonda přejde na eliptickou dráhu, která se v aféliu dotýká dráhy druhé planety. Protože vzdálenost perihélia je rovna vzdálenosti  $r_1$  první planety od Slunce a vzdálenost afélia vzdálenosti  $r_2$  druhé planety od Slunce, rovná se velká poloosa eliptické dráhy sondy hodnotě

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

V aféliu dostane sonda druhý rychlostní impulz  $\Delta v_A$ , čímž získá rychlost  $v_2$  a přejde na kruhovou dráhu shodnou s orbitou druhé planety. Toto je současně nejekonomičtější mechanismus orbitálního manévru pro přesun mezi planetami a popsal jej již roku 1920 WALTER HOHMANN.




---

Orbitální manévr, sonda odstartovala ze Země  $Z$ , kde dostala impuls  $\Delta v_P$  a letí k dráze Jupitera  $J$ , na kterou přejde po obdržení impulsu  $\Delta v_P$ . Konečná rychlost sondy je  $v_2$ .

---

Najdeme ještě příslušné rychlostní impulzy. Orbitální rychlosti první a druhé planety jsou

$$v_1 = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{r_1}} \quad \text{a} \quad v_2 = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{r_2}}.$$

Rychlosti sondy v perihéliu, kdy je  $r = r_1$  a aféliu eliptické dráhy, kdy je  $r = r_2$  jsou podle vzorce (8.13) rovny

$$v_P = v_1 \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} \quad \text{a} \quad v_A = v_2 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}.$$

Pro rychlostní impulzy  $\Delta v_P = v_P - v_1$  a  $\Delta v_A = v_2 - v_A$  tak máme výsledné vzorce

$$\Delta v_P = v_1 \left( \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) \quad \text{a} \quad \Delta v_A = v_2 \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right).$$

Jako příklad si vezměme sondu vyslanou ze Země na Jupiter. V tom případě je  $r_1 \approx 1 \text{ AU}$  a  $r_2 \approx 5.2 \text{ AU}$ ,  $v_1 \approx 29.8 \text{ km/s}$  a  $v_2 \approx 13.1 \text{ km/s}$ , rychlost sondy v perihéliu a aféliu je  $v_P \approx 38.6 \text{ km/s}$  a  $v_A \approx 7.4 \text{ km/s}$  a tedy potřebné rychlostní impulzy mají velikost  $\Delta v_P \approx 8.8 \text{ km/s}$  a  $\Delta v_A \approx 5.7 \text{ km/s}$ . Celková doba manévru přitom trvá  $\Delta t \approx 2.7$  roku.

S popsáním manévrem bezprostředně souvisí také **randezvous problem**, tj. problém, jak zajistit, aby se na konci manévru nacházela vedle sondy i druhá planeta. Toho se dosáhne jednoduše tak, že celý orbitální manévr správně načasujeme, tj. zahájíme ve správný okamžik. Celková doba letu sondy je zřejmě rovna polovině periody  $T$  příslušné eliptické orbity, platí tedy

$$\Delta t = \frac{1}{2}T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{2\kappa M_S}} = \frac{T_1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \right)^{3/2}.$$

Označíme-li délky planet  $l_1$  a  $l_2$  na počátku  $t_1$  a na konci  $t_2 = t_1 + \Delta t$  manévru, pak za předpokladu kruhových drah platí  $l_1 = L_1 + n_1 t_1$  a  $l_2 = L_2 + n_2 t_2$ , kde

$$n_1 = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{r_1^3}} \quad \text{a} \quad n_2 = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{r_2^3}}$$

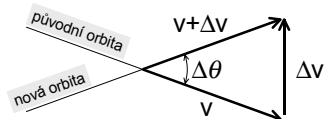
jsou střední pohyby planet a  $L_1$  a  $L_2$  délky planet v okamžiku  $t = 0$ . Aby sonda na konci manévru, tj. v čase  $t_2$  potkala druhou planetu a mohla přejít na parkovací dráhu, musí zřejmě vyjít  $l_2 = l_1 + \pi$ , odtud již dostaneme pro okamžik počátku a konce orbitálního manévru jednoduché vzorce

$$t_1 = \frac{L_2 - L_1 - \pi + n_2 \Delta t}{n_1 - n_2}, \quad t_2 = \frac{L_2 - L_1 - \pi + n_1 \Delta t}{n_1 - n_2}.$$

Startovní okno  $t_1$  souvisí s okamžikem  $t_O$  opozice druhé planety vzhledem ke Slunci jednoduchým vztahem

$$t_1 = t_O + \frac{n_2 \Delta t - \pi}{n_1 - n_2}.$$

Následující startovní okno se dostane jednoduše přičtením synodické periody  $T' = 2\pi / (n_1 - n_2)$ .




---

Změna  $\Delta\theta$  sklonu orbity se dosáhne příčným impulzem  $\Delta v$ .

---

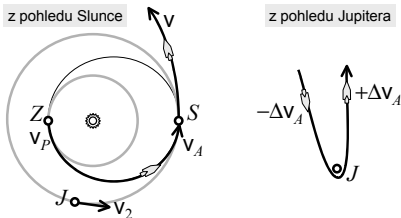
Dalším významným manévrem je změna sklonu orbity. Toho se dosáhne nejnázne příčným impulzem  $\Delta v$  v okamžiku, kdy je sonda v uzlu své dráhy. Tím se sklon dráhy  $\theta$  změní o hodnotu  $\Delta\theta$ , pro kterou ze vzorce pro skládání rychlostí platí

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta v}{2v},$$

kde  $v$  je aktuální rychlost sondy v uzlu.

### 8.3.9 Gravitační manévř

Kosmonautika je velmi drahá, k urychlení každého jednoho užitečného kilogramu sondy až na třetí kosmickou rychlost spotřebujeme zhruba tunu toho nejkvalitnějšího raketového paliva. Pokud by existovala možnost, jak sondu urychlit levněji, mohlo by to kosmonautiku výrazně zlevnit. Jedna taková možnost skutečně existuje a nazývá se **gravitační manévř**, také gravitační asistence nebo metoda gravitačního praku. Spočívá v tom, že sondu urychlí gravitační pole pomocné planety.



Sonda odstartovala ze Země  $Z$ , po urychlení získala rychlost  $v_P \approx 38.6 \text{ km/s}$  a pokud se potká v místě  $S$  s Jupiterem, dojde k jejímu urychlení o  $2\Delta v_A \approx 11.4 \text{ km/s}$  z rychlosti  $v_A \approx 7.4 \text{ km/s}$  na konečnou rychlost  $v \approx 18.8 \text{ km/s}$ .

Uvažujme sondu, která se blíží ke druhé planetě po první fázi Hohmannova orbitálního manévřu. Vzhledem k planetě se sonda pohybuje zhruba po hyperbolické dráze a má relativní rychlost  $\Delta v_A = v_2 - v_A$ . Obětem planety může směr svého letu změnit až o  $180^\circ$ , takže změna rychlosti sondy může dosáhnout až  $2\Delta v_A$ . Vzhledem ke Slunci pak bude mít sonda konečnou rychlost

$$v = v_A + 2\Delta v_A = 2v_2 - v_A = v_2 \left( 2 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right).$$

Gravitační asistence se využívá například k urychlení sond směřujících do vzdálených oblastí sluneční soustavy. Sonda, která ztrácí rychlost tím, jak se vzdaluje od Slunce, získá přesným navedením své dráhy ke vhodné planetě až dvojnásobek rozdílu  $\Delta v_A$  její orbitální rychlosti a rychlosti sondy. Například Jupiter může urychlit pozemskou sondu až o  $2\Delta v_A \approx 11.4 \text{ km/s}$ . Urychlená sonda pak může pokračovat dále rychlostí  $v \approx 18.8 \text{ km/s}$ . Tato rychlost je větší než úniková rychlost  $v_2\sqrt{2} \approx 18.5 \text{ km/s}$  ze sluneční soustavy z oběžné dráhy Jupitera, takže popsany mechanismus skutečně umožňuje vystřelovat sondy do mezihvězdného prostoru.

**Příklad 8.2** Popište parametry letu sondy ze Země na Venuši. Poloměr dráhy Venuše je  $r_V = 0.723 \text{ AU}$  a Země  $r_Z = 1.000 \text{ AU}$ .

**Řešení:** Energeticky nejvýhodnější je dráha, která se v perihéliu dotýká oběžné dráhy Venuše a v aféliu oběžné dráhy Země. Odtud je velká poloosa

$$a = \frac{1}{2}(r_Z + r_V) \approx (0.723 + 1)/2 = 0.862 \text{ AU}$$

a excentricita dráhy

$$e = \frac{r_Z - r_V}{r_Z + r_V} \approx 0.161.$$

Pokud jde o impulzy při orbitálním manévřu, pak platí

$$\Delta v_P = v_Z \left( \sqrt{\frac{2r_V}{r_Z + r_V}} - 1 \right) \approx -2.5 \text{ km/s}$$

a

$$\Delta v_A = v_Z \sqrt{\frac{r_Z}{r_V}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_Z}{r_Z + r_V}} \right) \approx -2.7 \text{ km/s}.$$

Znaménka mínus zde znamenají, že je třeba sondu zpomalit a že je třeba také zaměnit význam označení  $P$  a  $A$ , tj.  $P$  značí ve skutečnosti afélium a  $A$  perihélium. Aby se tedy sonda dostala k Venuši, musí nejprve zpomalit z  $v_Z \approx 29.8 \text{ km/s}$ , což je orbitální rychlost Země kolem Slunce, na  $v_P \approx 27.3 \text{ km/s}$ , a po době letu odpovídající polovině oběžné periody  $T$

$$t = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}T_Z \left( \frac{r_Z + r_V}{2r_Z} \right)^{3/2} \approx 0.400 \text{ roku} \approx 146 \text{ dní}$$

musí znova zpomalit svoji rychlost z  $v_A \approx 27.3 \text{ km/s}$  na  $v_V \approx 24.6 \text{ km/s}$ , což je orbitální rychlost Venuše kolem Slunce.

**Příklad 8.3** Za předpokladu, že planeta obíhá po eliptické dráze s velkou poloosou  $a$  a excentricitou  $e$ , spočtěte jen za pomoci zákonů zachování energie  $E$  a moment hybnosti  $L$  planety, rychlost planety v perihéliu  $v_1$  a v aféliu  $v_2$  a rychlost planety  $v$  ve vzdálenosti  $r$  od Slunce.

**Řešení:** Protože se planeta pohybuje po elipse, je vzdálenost planety od Slunce v perihéliu rovna  $r_1 = a(1 - e)$  a v aféliu  $r_2 = a(1 + e)$ . Ze zákona zachování momentu hybnosti

$$L = mr_1v_1 = mr_2v_2$$

vyjádříme rychlost v aféliu

$$v_2 = v_1 \frac{1 - e}{1 + e}.$$

Nyní dosadíme do zákona zachování energie

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\kappa m M_S}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{\kappa m M_S}{r_2}$$

za  $r_1, r_2$  a  $v_2$ , po úpravě odtud dostaneme vzorec pro rychlost planety v perihéliu a aféliu

$$v_1 = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{a} \frac{1 + e}{1 - e}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{a} \frac{1 - e}{1 + e}}.$$

Jestliže nyní dosadíme do vzorce pro mechanickou energii například  $r = r_1$  a  $v = v_1$ , dostaneme po úpravě výsledek

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa m M_S}{r} = -\frac{\kappa m M_S}{2a}.$$

Pro orbitální moment podobně dostaneme výsledek

$$L = mr_1v_1 = m\sqrt{\kappa M_S a(1 - e^2)} = m\sqrt{\kappa M_S p}.$$

**Příklad 8.4** Pomocí integrálů pohybu  $E$  a  $L$  vyjádřete velkou poloosu  $a$  a excentricitu  $e$  planety.

**Řešení:** Použijeme výsledky předchozí úlohy

$$E = -\frac{\kappa m M_S}{2a} \quad \text{a} \quad L = m\sqrt{\kappa M_S a(1 - e^2)},$$

odtud pro poloosu a excentricitu dostaneme

$$a = -\frac{\kappa m M_S}{2E} \quad \text{a} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\kappa^2 M_S^2 m^3}}.$$

**Příklad 8.5** Spočtěte rychlost satelitu v pericentru a apocentru a periodu oběžné dráhy satelitu, znáte-li vzdálenost pericentra  $r_1$  a apocentra  $r_2$ .

**Řešení:** Ze zadání je zřejmé, že známe také poloosu a excentricitu

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \quad \text{a} \quad e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

Odtud jsou rychlosti

$$v_1 = \frac{1}{r_1} \sqrt{\kappa M \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \quad v_2 = \frac{1}{r_2} \sqrt{\kappa M \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

a perioda

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\varkappa M}{a^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{8\varkappa M}{(r_1 + r_2)^3}}.$$

**Příklad 8.6** Jestliže světelné paprsky dopadají na povrch tělesa, působí na něj jistým malým tlakem. Světelný tlak slunečních paprsků je možno v principu využít k pohonu kosmické sondy. Uvažujte sondu, která obíhá kolem Slunce po kruhové dráze o poloměru  $r_0$ . V jistém okamžiku sonda rozprostře velkou plachtu o ploše  $S$  a automatika zajistí, aby byla plachta po celou dobu orientována kolmo ke slunečním paprskům. Popište pohyb sondy. Úloha je známá jako sluneční plachetnice, F. A. CANDER 1924.

**Řešení:** Sonda se až do okamžiku rozevření plachty pohybuje rychlostí  $v_0 = \sqrt{\varkappa M/r_0}$ . Po rozevření plachty působí na sondu vedle přitažlivé gravitační síly  $G = \varkappa m M/r^2$  také odpudivý světelný tlak  $p$ , který klesá se vzdáleností stejně jako gravitace. Tlaková síla je tedy rovna

$$T = pS = p_0 S r_0^2 / r^2,$$

kde  $p_0$  je tlak slunečního záření ve vzdálenosti  $r_0$  od Slunce a  $S$  plocha plachty. Celková síla působící na sondu je tedy rovna

$$F = G - T = \varkappa m M / r^2 - p_0 S r_0^2 / r^2 = \varkappa m M' / r^2.$$

Síla má nadále charakter coulombovské síly, takže trajektorií sondy bude kuželosečka. Vliv světelného tlaku můžeme chápat jako oslabení gravitační síly Slunce, jako zmenšení hmotnosti Slunce z  $M$  na

$$M' = M - p_0 S r_0^2 / \varkappa m < M.$$

Když dosadíme za  $v_K = \sqrt{\varkappa M' / r_0}$  do vzorců (8.21) a (8.22), dostaneme pro excentricitu a velkou poloosu dráhy kosmické sondy

$$e = \left| 1 - \frac{M}{M'} \right| \quad \text{a} \quad a = \frac{r_0}{2 - M/M'}.$$

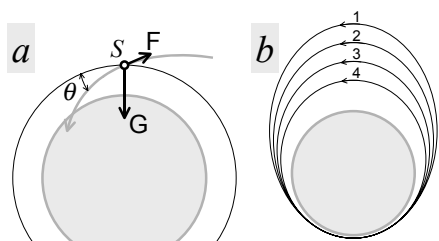
Odtud je zřejmé, že pro  $M/2 < M' < M$  bude trajektorií sondy elipsa, pro  $M' = M/2$  bude trajektorií parabola a pro  $0 < M' < M/2$  bude trajektorií hyperbola. Pro  $M' = 0$  nebude na sondu působit žádná síla a její trajektorií bude proto přímka. Konečně pro  $M' < 0$  bude převažovat tlak záření nad gravitací a sonda se bude pohybovat po obrácené hyperbole. Ve všech případech bude perihélium ležet ve vzdálenosti  $r_0$  od Slunce a bude odpovídat místu, kde byla rozevřena plachta.

Tlak světla je sice slabý, ale zvětšením plachty je možno dosáhnout libovolné tlakové síly. Například pro úplné vyrovnání gravitace Slunce je nutno použít plachtu o rozměru asi  $36 \text{ m} \times 36 \text{ m}$  na každý kilogram váhy sondy, což je technicky dosažitelné.

### 8.3.10 Vliv atmosféry na pohyb satelitu

Umělé družice Země obíhají typicky ve výšce 200 km a výše rychlostí kolem  $8 \text{ km/s}$ , takže jeden oběh se uskuteční zhruba za 90 minut. I když je v těchto výškách střední hustota atmosféry malá, je asi  $10^{10}$  krát menší než u hladiny moře, přesto má odpor vzduchu na pohyb a životnost satelitu velmi významný vliv. Trvalé tření o řídký vzduch způsobuje postupnou ztrátu energie satelitu a jeho nezadržitelný pokles na nižší orbitu. Současně dochází ke zrychlování satelitu a zkracování jeho oběžné doby.





(a) Odporová síla  $\mathbf{F}$  a gravitační síla  $\mathbf{G}$  působící na satelit  $S$ . (b) Pokles výstřednosti orbity způsobený odporem vzduchu.

Pohybové rovnice satelitu můžeme vyjádřit v přirozených složkách síly a zrychlení

$$m\dot{v} = -F + G \sin \theta \quad \text{a} \quad \frac{mv^2}{\rho} = G \cos \theta,$$

kde  $G = \varkappa m M_Z / r^2$  je tíha satelitu,  $F$  odpor vzduchu,  $\rho$  poloměr křivosti dráhy a  $\theta$  sklon dráhy. Z geometrie dále platí  $\sin \theta = -\dot{r}/v$ . Pro přibližně kruhovou orbitu je sklon  $\theta$  malý, pak platí aproximace  $\theta \approx -\dot{r}/v$ ,  $\rho \approx r$  a pohybové rovnice mají tvar

$$m\dot{v} \approx -F + \varkappa m M_Z \theta / r^2, \quad mv^2 \approx \varkappa m M_Z / r.$$

Derivací normálové složky pohybové rovnice dostaneme  $2\dot{v}/v \approx -\dot{r}/r$ , odtud je  $\theta \approx -\dot{r}/v \approx 2\dot{v}r/v^2$ . Po dosazení do tečné složky pohybové rovnice dostaneme  $m\dot{v} \approx F$ , neboť  $G\theta \approx 2m\dot{v}$ . Rychlost tedy skutečně roste úměrně velikosti odporové síly  $F$ . To však znamená, že platí také vzorec  $\theta \approx 2F/G$ . S rostoucím odporem  $F$  se úhel poklesu  $\theta$  zvětšuje a pád satelitu se zrychluje. Při stálém  $\theta$  platí pro výšku satelitu

$$h \approx h_0 + \dot{r}t \approx h_0 - v\theta t,$$

odtud je doba pádu zhruba

$$t_0 \approx h_0 / v\theta. \quad (8.23)$$

V první aproximaci můžeme počítat hustotu atmosféry podle barometrické formule

$$\rho \approx \rho_0 e^{-h/H},$$

kde  $H \approx 8$  km je charakteristická výška atmosféry. Skutečná hustota atmosféry závisí ovšem výrazně na teplotě, která je dána především denní dobou. Například ve výšce 300 km je ve dne hustota vzduchu asi dvakrát a ve výšce 1000 km až třicetkrát vyšší než v noci. Také proto mohou být naše další výpočty jen hrubé a orientační. Pro satelit o rozměru  $a$  a hmotnosti  $m$  je podle Newtonova vzorce odporová síla  $F \approx \frac{1}{2}\rho v^2 a^2$ . Úhel klesání je tedy přibližně dán vzorcem

$$\theta \approx \frac{2F}{G} \approx \frac{\rho v^2 a^2}{mv^2/r} \approx \frac{\rho_0 a^2 r}{m} e^{-h/H}.$$

Numericky pro satelit o rozměru  $a \approx 1$  m a hmotnosti  $m \approx 100$  kg vychází pro  $h_1 \approx 100$  km sklon  $\theta_1 \approx 0.2$ , pro  $h_2 \approx 200$  km je sklon  $\theta_2 \approx 9 \times 10^{-7}$  a pro  $h_3 \approx 300$  km je sklon  $\theta_3 \approx 3 \times 10^{-12}$ . Příslušná doba života satelitu na oběžné dráze je dána vzorcem (8.23), odtud dostaneme  $t_1 \approx 50$  sekund,  $t_2 \approx 320$  dní a  $t_3 \approx 350\,000$  let. Z těchto hrubých odhadů je zřejmé, proč musí být výška satelitu alespoň dvě stě kilometrů nad povrchem Země. Podobný problém však odpadá například u Měsíce, který žádnou atmosféru nemá.

Je-li oběžná dráha eliptická, projeví se odpor vzduchu především v oblasti perigea. Pokles rychlosti má za následek pokles excentricity, takže dráha satelitu se postupně stává kruhovou.

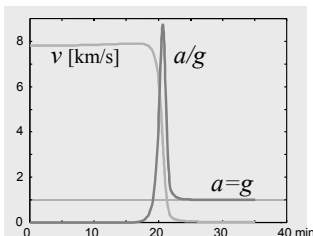
Přesný popis vlivu odporu atmosféry je obtížný pro neznalost přesné hustoty vzduchu. Odhad zbývající doby života satelitu se proto provádí z měření oběžné doby satelitu. Pokud se oběžná doba satelitu zkrátí o  $\Delta T$ , pak tomu odpovídá podle třetího Keplerova zákona pokles výšky o  $\Delta h = 2r\Delta T/3T$ . Satelit proto spadne na zem za čas

$$t_0 \approx \frac{h_0 T}{\Delta h} \approx \frac{3h_0 T^2}{2r\Delta T}.$$

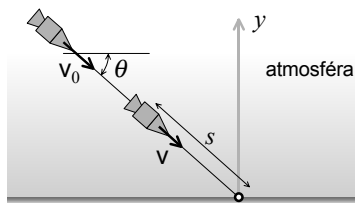
Pokud například naměříme u satelitu ve výšce  $h_0 \approx 200$  km nepatrné zkrácení oběžné doby o  $\Delta T \approx 1$  s, pak to znamená, že satelit klesne při každém oběhu o výšku  $\Delta h \approx 800$  m. Zbývající doba života satelitu činí už jen  $t_0 \approx 15$  dní, tj. asi 250 obletů.

### 8.3.11 Brzdění kosmické lodi v atmosféře

Nejnebezpečnější manévr kosmických lodí je bezesporu okamžik průletu atmosférou. Při neopatrném navedení na brzdnou dráhu může dojít ke shoření lodi nebo zabití posádky obrovským přetížením. Na obrázku je zachycen typický průběh rychlosti a přetížení kosmické lodi v závislosti na čase. Počáteční rychlost lodi  $v \approx 8$  km/s a přetížení  $a \approx 0$  m/s<sup>2</sup> (beztížný stav). Po zapnutí brzdících motorů se sníží rychlost lodi asi o 1 až 2 %. Všimněte si, že po zahájení brzdícího manévru to trvá ještě řádově dvacet minut, než dojde k proniknutí lodi do nižších vrstev atmosféry. Poklesem výšky lodi její rychlost mírně stoupne a loď se přemístí ještě o dobrou čtvrtinu oběžné dráhy dál od místa, kde byl manévr zahájen. Pak během krátkých dvou minut dojde k prudkému nárůstu aerodynamického odporu atmosféry a vzniku silného přetížení  $a \approx 9g$ . Během této krátké doby se loď téměř zastaví a dále padá už jen rovnoměrnou rychlostí odpovídající odporu prostředí.



Typický průběh rychlosti  $v$  a přetížení  $a$  kosmické lodi při brzdění v atmosféře, dole je uveden čas v minutách od zahájení brzdícího manévru. Všimněte si, že během dvou minut se loď téměř zastaví a její zrychlení naroste až na devítinásobek normálního tíhového zrychlení  $g$ .




---

Lod' vletá do atmosféry pod úhlem  $\theta$  rychlostí  $v_0$ . Zkoumáme brzdění kosmické lodi v atmosféře.

---

Podívejme se podrobněji na dynamiku brzdění v atmosféře. Předpokládejme loď o hmotnosti  $m$  vnikající rychlostí  $v_0$  do atmosféry pod úhlem  $\theta$  k horizontále. Pro hustotu atmosféry předpokládáme barometrickou formuli  $\rho = \rho_0 e^{-y/H}$ , kde  $\rho_0$  je hustota na povrchu,  $y$  je výška měřená od povrchu a  $H$  je charakteristická výška atmosféry, přitom zhruba platí  $H \approx 8 \text{ km}$ . Pro odpor vzduchu budeme předpokládat platnost Newtonova vzorce

$$F = \frac{1}{2} c_x \rho v^2 S,$$

podle něhož roste odpor vzduchu s druhou mocninou rychlosti lodi a lineárně s hustotou vzduchu. Pro jednoduchost neuvažujme zakřivení zemského povrchu ani tíhu lodi. Pohyb je pak jednodimenzionální a probíhá po přímce určené úhlem sklonu  $\theta$ . Pohybová rovnice lodi je

$$\frac{dv}{dt} = kv^2 \exp\left(-\frac{y}{H}\right),$$

kde  $k = c_x S \rho_0 / 2m$  je stálý odporový součinitel. Pro loď bez padáku je zhruba  $k \approx 10^{-2} \text{ m}^{-1}$  a pro loď s padákem je  $k \approx 1 \text{ m}^{-1}$ . Loď klesá, ale zrychlení směřuje proti pohybu, je proto kladné. Vynásobme pohybovou rovnici elementem dráhy  $ds = dy / \sin \theta$ , tak dostaneme

$$\frac{dv}{dt} ds = v dv = kv^2 \exp\left(-\frac{y}{H}\right) \frac{dy}{\sin \theta}.$$

Odtud lze odseparovat  $v$  a  $y$  a rovnici integrovat, dostaneme tak

$$v = v_0 \exp\left[-\frac{2kH}{\sin \theta} \exp\left(-\frac{y}{H}\right)\right].$$

Z rozboru řešení plyne, že rychlost lodi se mění prudce až v jisté výšce a brzdění trvá jen relativně krátkou dobu. Důsledkem pak je to, že loď je podrobena krátkému, ale obrovskému přetížení, které ohrožuje nejen loď, ale především její posádku. Zpomalení lodi se spočte ze vzorce

$$a = \frac{dv}{dt} = kv_0^2 \exp\left[-\frac{2kH}{\sin \theta} \exp\left(-\frac{y}{H}\right) - \frac{y}{H}\right].$$

Maximální zpomalení

$$a_{\max} = v_0^2 \frac{\sin \theta}{2eH}$$

překvapivě nezávisí na odporovém součiniteli  $k$ , tj. ani na tvaru, ani na velikosti lodi a je dokonce úplně jedno, zda loď má nebo nemá otevřený padák. Maximálního zpomalení dosáhne loď ve výšce

$$y_{\max} = H \ln \left( \frac{2kH}{\sin \theta} \right),$$

kteřá zase nezávisí na velikosti počáteční rychlosti  $v_0$ . Brzdné zpomalení lze snížit jen zmenšením sklonu dráhy  $\theta$ , tj. zvýšením brzdné výšky  $y_{\max}$ .

Numericky, pro vlet kolmo do atmosféry  $\theta = 90^\circ$  rychlostí  $v_0 = 8 \text{ km/s}$  vychází  $a_{\max} \approx 150g$ , kde  $g$  je normální tíhové zrychlení. Ke zbrzdění dojde ve výšce  $y_{\max} \approx 40 \text{ km}$ , brzdění přitom trvá jen

$$\Delta t \approx \frac{v_0}{a_{\max}} \approx 5 \text{ s},$$

za tu dobu loď urazí asi 20 km. Při úhlu  $\theta = 5^\circ$  bude přetížení ještě stále  $a_{\max} \approx 13g$ , bude trvat 60 s a dojde k němu ve výšce kolem 60 km.

Rychlost při dopadu lodí na povrch země zde vychází téměř nulová, protože neuvažujeme tíhu. Pokud bychom gravitaci započítali, dostali bychom pro rychlost dopadu  $v \approx \sqrt{g/k}$ . Pro loď bez padáku vyjde  $v \approx 32 \text{ m/s}$ , což znamená zničení lodí, za použití padáku vyjde rychlost  $v \approx 3 \text{ m/s}$ .

Nehomogenita hustoty vzduchu může způsobit rotaci lodí, pokud tato není dostatečně stabilizována. Jednoduchý odhad rychlosti rotace zapříčiněné odporem vzduchu dává

$$\omega \approx 4v_0 \cos \theta / H \approx 40 \text{ otáček za minutu.}$$

To se například stalo osudné VLADIMÍRU MICHAJLOVIČI KOMAROVVI, kterému se roku 1967 zamotal přistávací modul do hlavního padáku.

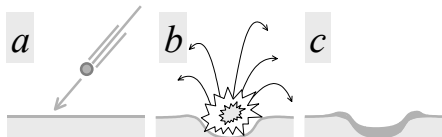
Celkové množství tepla, které se třením kosmické lodí během kritické minuty o atmosféru uvolní, je zhruba rovno počáteční kinetické energii lodí. Toto teplo je schopno ohřát satelit na teplotu  $30\,000^\circ\text{C}$ , naštěstí proudění vzduchu zároveň zajišťuje účinný odvod tepla z povrchu lodí. Přesto je tepelný štít standardní výbavou přistávacích modulů kosmických lodí a raketoplánů.

### 8.3.12 Pád meteoru

**Meteoroidy** jsou tělesa, která vlétají do atmosféry Země z okolního kosmického prostoru, kde většinou ve výšce kolem 100 km shoří. Jejich rozměry se pohybují od zlomků milimetrů až po desítky metrů. Jejich rychlost se pohybuje v intervalu 10 až 70 km/s. Pokud meteoroid zazáří na obloze, hovoříme o **meteoru**. Pokud meteoroid dopadne až na zem, hovoříme o **meteoritu**. Za jasné noci je možno pozorovat na obloze kolem deseti meteorů za hodinu. V případě meteorických rojů tento počet vzrůstá až na desetinásobek. Meteor jasnější než Měsíc nazýváme **bolidem**.

Ročně dopadne na zem kolem 20 tisíc meteoritů, každý z nich je větší než 100 g. Menší meteory shoří v atmosféře, větší se rozpadají na menší části. Největší známý

meteorit váží 60 tun. Občas dopadne na zem i meteorit větší než sto metrů, takový meteorit vytvoří kruhový **kráter** o průměru asi jeden kilometr. Kráterů větších než kilometr je známo na zemi více než sto, ostatní vlivem eroze již zanikly. Odhaduje se ale, že za poslední miliardu let jich muselo vzniknout přes 100 tisíc. Takový meteorit se však při dopadu na zem i s okolním materiálem vypaří, a někdy dává vzniknout přetaveným **tektitům**, jakými jsou například naše **vltavíny**.



Po dopadu meteoritu (b) se odpaří tisícínásobek hmoty samotného meteoritu. Vzniklý hluboký kráter se až následně (c) zanese v důsledku eroze.

Velký meteorit (kometa nebo asteroid) se nestačí v atmosféře vypařit ani zbrzdí a dopadne na zem průměrnou rychlostí  $v_0 \approx 40 \text{ km/s}$ . Tato energie stačí na ohřátí hmoty meteoritu o milión stupňů Celsia. Proto se při dopadu odpaří nejen samotný meteorit, ale i stokrát větší množství okolní pozemské horniny. Tak vzniká typický dopadový kráter, jehož rozměr je zhruba o řád větší než rozměr samotného meteoritu. Například meteorit o rozměru sto metrů vytvoří kráter o průměru jeden kilometr. Odborníci se domnívají, že zánik dinosaurů před 65 milióny let má na svědomí pád asteroidu o průměru asi 10 km. Přitom se uvolnila energie srovnatelná s miliónem atomových bomb svržených na Hirošimu. Obrovské množství prachu, které se přitom dostalo do atmosféry, způsobilo globální ochlazení celé planety a následně vymření mnoha druhů živočichů a rostlin.

Podívejme se nyní na pád malého meteoru v atmosféře. Můžeme k tomu použít přibližných vzorců odvozených při studiu brzdění kosmické lodě v atmosféře. Meteor vlétá do atmosféry rychlostí  $v_0$  pod úhlem  $\theta$  k horizontu. Za předpokladu, že hustota vzduchu klesá podle barometrické formule, je meteor zbrzděn zhruba ve výšce

$$h \approx H \ln \left( \frac{\rho_0 a^2 H}{m \sin \theta} \right).$$

Zpomalení meteoru je přitom  $a_0 \approx v_0^2 \sin \theta / H$ , takže brzdění trvá asi  $t_0 \approx v_0 / a_0 \approx H / v_0 \sin \theta$  a brzdná dráha je dlouhá asi  $s \approx v_0 t_0 / 2 \approx H / 2 \sin \theta$ . Doba brzdění ani brzdná dráha nezávisí na velikosti meteoru, ovšem výška  $h$ , v níž k zbrzdění dojde, na velikosti meteoru závisí. Dráha zářícího meteoru na obloze je tedy dlouhá asi  $\alpha \approx s/h$ .

Pro meteor o rychlosti  $v_0 \approx 40 \text{ km/s}$  vlétající do atmosféry pod malým úhlem  $\theta \approx 5^\circ$  vychází zpomalení  $a_0 \approx 2000g$ , doba brzdění  $t_0 \approx 2 \text{ s}$  a brzdná dráha  $s \approx 50 \text{ km}$ . Pro meteor o typické hustotě  $3000 \text{ kg/m}^3$  a průměru jeden milimetr vychází výška brzdění 80 km a délka stopy na obloze asi  $30^\circ$ , pro meteor o průměru jeden centimetr vychází výška brzdění asi 60 km a délka stopy na obloze asi  $40^\circ$ , konečně pro meteor o průměru jeden metr vychází výška brzdění asi 30 km a délka stopy na obloze asi  $100^\circ$ . Větší meteory se v atmosféře prakticky zbrzdí nestačí vůbec a dopadnou na povrch Země plnou rychlostí.

Tepelný a zářivý výkon meteoru je možno odhadnout vzorcem  $P \approx mv_0^2/2t_0$ .

Meteor o průměru šesti milimetrů a hmotnosti  $m \approx 1 \text{ g}$  zazáří výkonem  $P \approx 400 \text{ kW}$  a meteor o průměru šesti centimetrů a hmotnosti  $m \approx 1 \text{ kg}$  výkonem  $P \approx 4 \text{ GW}$ , což je výkon obou našich jaderných elektráren dohromady. Tak jasný meteor by zazářil na obloze jako velmi jasný bolid, jehož svítivost odpovídá čtyřiceti miliónům stowattových žárovek!

Vzhledem k tomu, že doba průletu, a tím i doba ohřevu meteoru, trvá jen sekundy, musí být meteor dostatečně malý, aby se mohl celý prohřát a odpařit. Vzhledem ke konečné tepelné vodivosti  $\lambda$  a měrné tepelné kapacitě  $c$  meteoru je charakteristický čas ohřevu meteoru o průměru  $a$  roven

$$\tau \approx mc/a\lambda \approx \rho a^2 c/\lambda.$$

Pro typický meteor o průměru  $a \approx 1 \text{ mm}$  je  $\tau \approx 1 \text{ s}$ , takže meteor bezpečně celý shoří v atmosféře. Naopak prohřívání meteoru o průměru  $100 \text{ mm}$  už trvá asi tři hodiny, takže meteor nestačí během průletu atmosférou shořet. Odpaří se z něj jen povrchová vrstva a jádro meteoru dopadne na zem jako meteorit.

## 8.4 Gravitační pole

### 8.4.1 Silové pole

Vezměme malé zkušební těleso o hmotnosti  $m$  a umístujme jej do různých bodů v prostoru. Tak zjistíme sílu, která v daném místě na zkušební těleso působí. Souhrn všech těchto sil nazýváme **silovým polem**. Je sice pravda, že gravitační síla vzniká jen vzájemným působením dvojice těles a obě tělesa jsou nezbytně nutná ke vzniku silové interakce, přesto je pojem silového pole velmi užitečný, především pro svoji geometrickou názornost. O přijetí koncepce silového pole se zasloužil v polovině devatenáctého století především MICHAEL FARADAY, který pomocí geometricky názorných siločar úspěšně studoval elektrická a magnetická pole.

Každé silové pole si lze názorně představit pomocí **siločar**. Siločáry jsou myšlené orientované prostorové křivky, které získáme tak, že v každém bodě prostoru vyneseme malou šipku orientovanou ve směru vektoru síly a všechny tyto šipky pospojujeme. Směr siločáry určuje v každém bodě směr silového působení a hustota siločar intenzitu silového působení v daném místě. Každým bodem prochází vždy jen jedna siločára a z definice se siločáry nikde nemohou křížit ani protínat. Rovnice siločar silového pole závisí jen na směru silového pole  $\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}/F$  a nezávisí na velikosti  $F = |\mathbf{F}|$  silového pole. Tečný vektor siločáry je tedy roven vektoru  $\mathbf{F}^0$  a rovnice siločar je dána předpisem

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{F}^0,$$

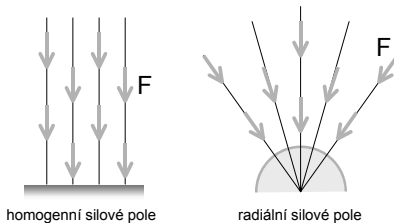
kde  $s$  je přirozený parametr siločáry. Tuto rovnici je možno přepsat rovněž do složkového tvaru

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}.$$

Podle tvaru siločar rozlišujeme homogenní silové pole nebo radiální (centrální) silové pole. **Homogenní silové pole** dostaneme v případě, že síla je všude stejná, jako je tomu například v zemském tíhovém poli. Zde je  $\mathbf{F}^0 = \mathbf{g}^0$ , takže rovnice siločar budou

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{g}^0 s,$$

jde tedy o vertikální přímky ve směru tíhového zrychlení. **Radiální silové pole** vzniká v okolí hmotného bodu, podle gravitačního zákona má síla centrální směr  $\mathbf{F}^0 = -\mathbf{r}^0$ , kde  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ , rovnice siločar mají tedy tvar  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 s$ . Siločáry centrálního silového pole jsou tedy přímky směřující do zdroje pole. V důsledku přitažlivého charakteru gravitace vycházejí siločáry vždy z nekonečna a končí ve zdrojích gravitačního pole.




---

Homogenní a radiální silové pole.

---

**Příklad 8.7** Najděte rovnice siločar v případě pole  $\mathbf{F} = k(x, y, 2z)$ .

**Řešení:** Z definice je

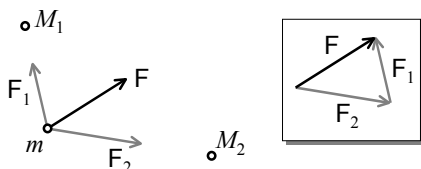
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z},$$

odtud jsou rovnice siločar pole  $\mathbf{r} = (x_0 s, y_0 s, z_0 s^2)$ , jde zřejmě o paraboly.

### 8.4.2 Princip superpozice

Podle Newtonova gravitačního zákona působí každé hmotné těleso na tělesa ve svém okolí gravitační silou  $\mathbf{F}_G$ . Pokud na těleso působí současně přitažlivost dvou nebo více těles, jejich silové působení se sčítá stejně, jako se sčítá současné působení ostatních sil v mechanice a tyto síly se navzájem neovlivňují. Tuto zkušenost s gravitační silou vyjadřuje **princip superpozice**:

Gravitační silové působení několika hmotných bodů na zkušební těleso se dostane jako vektorový součet silových působení všech těles působících nezávisle od sebe.




---

Princip superpozice. Gravitační síla  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  je rovna součtu sil, jimiž je přitahováno těleso  $m$  ke každému z těles  $M_1$  a  $M_2$  nezávisle na sobě.

---

Pokud tedy na zkušební těleso (hmotný bod) o hmotnosti  $m$  působí současně přitažlivá síla od několika těles o hmotnostech  $M_k$ , pak pro výslednou gravitační sílu platí podle principu superpozice

$$\mathbf{F}_G = \sum_k \mathbf{F}_k = - \sum_k \gamma \frac{mM_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k, \quad (8.24)$$

kde  $\mathbf{r}_k$  jsou vzdálenosti jednotlivých těles  $M_k$  od zkušební tělesa  $m$ . Pro lepší odlišení těles vytvářejících gravitační pole budeme jejich hmotnosti značit velkým písmenem, zatímco hmotnost zkušební tělesa, které se v tomto poli pohybuje, budeme značit nadále malým písmenem. Podobně jsme již dříve rozlišovali hmotnost planety  $m$  a hmotnost Slunce  $M_S$  nebo hmotnost satelitu  $m$  a hmotnost Země  $M_Z$ .

### 8.4.3 Intenzita gravitačního pole

Síla a silové pole je pro každé zkušební těleso jiné. Protože výsledná gravitační síla je vždy úměrná hmotnosti zkušební tělesa  $m$ , jak je to vidět z rovnice (8.24), je možno definovat **intenzitu gravitačního pole** nezávisle od vlastností zkušební tělesa. Definujeme ji jako sílu gravitačního pole vztáženou na jednotku hmotnosti zkušební tělesa

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}_G}{m}.$$

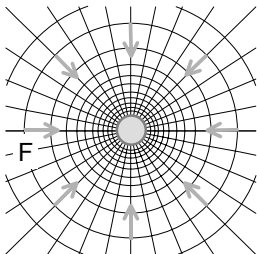
Vzhledem k principu superpozice platí pro soustavu těles

$$\mathbf{K} = \sum_k \mathbf{K}_k = - \sum_k \gamma \frac{M_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k.$$

Jednotkou intenzity gravitačního pole je zřejmě N / kg. Známe-li intenzitu gravitačního pole, snadno spočteme sílu

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{K},$$

kterou bude působit pole na zkušební těleso o hmotnosti  $m$ .




---

Centrální gravitační pole kolem sférického tělesa, siločáry a ekvipotenciální hladiny.

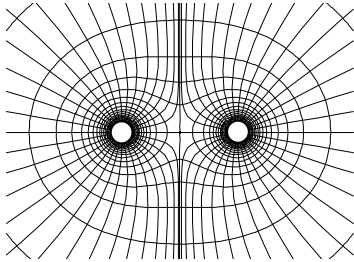
---



Nejjednodušší gravitační pole vytváří osamocený hmotný bod o hmotnosti  $M$ . Jeho silové pole je popsáno přímo gravitačním zákonem

$$\mathbf{K} = -\kappa \frac{M}{r^3} \mathbf{r}.$$

Všechny siločáry směřují radiálně do bodového zdroje gravitace. V okolí zdroje pole se siločáry přirozeně zahušťují, což znamená, že je tam pole nejsilnější.

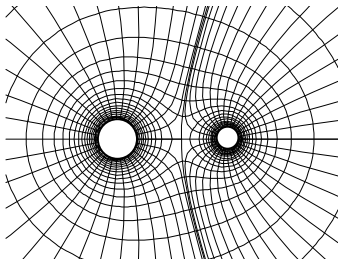



---

Siločáry a ekvipotenciální plochy gravitačního pole dvou stejně hmotných bodů. Všimněte si, že siločáry jsou v každém bodě kolmé k ekvipotenciálním plochám.

---

V případě pole dvou hmotných bodů  $M_1$  a  $M_2$  jsou již analytické rovnice silokřivek příliš složité, omezíme se proto jen na grafické zobrazení silokřivek pole. Na následujících obrázcích jsou zobrazena silová pole pro případ  $M_1 = M_2$  a  $M_1 = 2M_2$ .




---

Siločáry a ekvipotenciální plochy gravitačního pole dvou nestejně hmotných bodů. Hmotný bod vlevo je dvakrát těžší než hmotný bod vpravo.

---

#### 8.4.4 Potenciální energie

Silové pole nazýváme **konzervativním polem**, pokud práce pole po libovolné uzavřené křivce je rovna nule, tj. pokud platí

$$\oint \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Coulombovské pole tuto vlastnost má, proto je i superpozice coulombovských polí konzervativní. Z toho plyne, že gravitační pole soustavy nehybných těles je konzervativní a můžeme v něm definovat potenciální energii  $U$  z práce  $A$  potřebné k přemístění zkušební tělesa předpisem

$$\Delta U = U_B - U_A = A = - \int_A^B \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r}.$$

**Potenciální energie** fyzikálních polí se obvykle normuje na nekonečno, pak je  $U(\infty) = 0$  a

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r}. \quad (8.25)$$

Potenciální energie tělesa v obecném tíhovém poli je rovna práci, kterou musíme vykonat při přemístění tělesa z nekonečna do daného místa.

V případě gravitačního pole bodového zdroje  $M$  dostaneme pro potenciální energii zkušební tělesa  $m$  vzorec

$$U = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \varkappa \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = -\varkappa \frac{mM}{r}.$$

I z výpočtu tohoto integrálu je zřejmé, že  $U$  nezávisí na integrační cestě. Potenciální gravitační energie je vždy záporná, je to obecná vlastnost všech přitažlivých sil. Potenciální energie tělesa dostatečně vzdáleného je přitom rovna nule. Potenciální energie zkušební tělesa v gravitačním poli soustavy hmotných bodů  $M_k$  je podle principu superpozice rovna součtu dílčích potenciálních energií

$$U = \sum_k U_k = - \sum_k \varkappa \frac{mM_k}{r_k}.$$

### 8.4.5 Potenciál gravitačního pole

Všimněte si, že podobně jako síla i potenciální energie závisí lineárně na hmotnosti  $m$  zkušební tělesa. Má proto smysl definovat relativní hodnotu potenciální energie

$$\chi = \frac{U}{m} = - \sum_k \varkappa \frac{M_k}{r_k},$$

kteou nazýváme **potenciál gravitačního pole**. Jeho jednotkou je J/kg. I pro gravitační potenciál platí princip superpozice, platí tedy

$$\chi = \sum_k \chi_k, \quad \text{kde} \quad \chi_k = -\varkappa \frac{M_k}{r_k}$$

představuje gravitační potenciál jednoho gravitujícího hmotného bodu. Všechny body prostoru, které mají stejný potenciál

$$\chi(\mathbf{r}) = \text{konst},$$

tvorí plochu, kterou nazýváme **ekvipotenciální plocha** nebo **ekvipotenciální hladina**. Podobně jako siločáry i ekvipotenciální plochy nám pomáhají představit si názorně geometrii konkrétního gravitačního pole. Například ekvipotenciální

plochy gravitačního pole hmotného bodu dostaneme z podmínky

$$\chi = \varkappa \frac{M}{r} = \text{konst}, \quad \text{odtud} \quad r = \text{konst}.$$

Ekvipotenciální plochy radiálního gravitačního pole jsou tedy soustředné sféry se společným středem v místě zdroje pole.

Potenciální energie a potenciál jsou z definice na celé ekvipotenciální ploše stejné. Při přemísťování tělesa podél ekvipotenciální plochy proto nekonáme žádnou práci. Z toho však plyne, že gravitační síla i intenzita gravitačního pole jsou na ekvipotenciální plochu vždy kolmé. Siločáry proto protínají ekvipotenciální plochy vždy kolmo.

Pojem potenciálu zavedl do mechaniky roku 1733 JOSEPH LOUIS LAGRANGE, termín *potenciál* však zavedl až roku 1839 CARL FRIEDRICH GAUSS.

### 8.4.6 Vztah mezi potenciálem a intenzitou

Jestliže definici potenciální energie (8.25) vykrátíme hmotností  $m$  zkušebního tělesa, dostaneme vzorec svazující potenciál a intenzitu gravitačního pole

$$\chi = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}. \quad (8.26)$$

Potenciál gravitačního pole tedy najdeme integrací přes intenzitu gravitačního pole. Pro přírůstek potenciálu platí  $d\chi = -\mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$  a současně z matematiky pro diferenciál jakékoliv funkce platí

$$d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz = \nabla \chi \cdot d\mathbf{r},$$

kde výraz

$$\nabla \chi = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{r}} = \left( \frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial y}, \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)$$

se nazývá **gradient potenciálu**  $\chi$  a symbol  $\nabla$  se nazývá operátor **nabla**  $\nabla$ . Porovnáním obou vzorců pro diferenciál  $d\chi$  a vzhledem k libovolnosti posunutí  $d\mathbf{r}$  odtud máme důležitý výsledek

$$\mathbf{K} = -\nabla \chi.$$

Vzorec je přímou analogií vzorce  $\mathbf{F} = -\nabla U$  známého již z Mechaniky 1.

Intenzita gravitačního pole je rovna záporně vzatému gradientu z potenciálu gravitačního pole.

Známe-li potenciál pole, najdeme intenzitu stejného pole celkem snadno pomocí gradientu (tj. derivování). Tento postup se velmi často používá, protože výpočet skalárního potenciálu je obvykle mnohem jednodušší než výpočet vektorové intenzity, která má tři složky. Díky tomu stačí obvykle spočítat jediný integrál namísto tří integrálů.

**Příklad 8.8** Najděte intenzitu gravitačního pole, je-li zadán potenciál pole  $\chi = 1 + x^2 + y^2 + z^4$ .

**Řešení:** Podle definice je

$$\mathbf{K} = -\nabla\chi = -(2x, 2y, 4z^3).$$

**Příklad 8.9** Ukažte, že

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{a} \quad \nabla f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

kde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Řešení:** Protože platí  $r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$  a  $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$ , můžeme psát rovnou

$$\nabla r = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Druhý vzorec plyne ze vzorce pro derivování složené funkce

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial\mathbf{r}} = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Vzorec dostaneme pochopitelně i přímým derivováním, protože platí

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

a podobně pro další složky

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{a} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

složením všech tří výsledků máme

$$\nabla r = \left( \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \frac{(x, y, z)}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Podobně platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{x}{r},$$

a tedy

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

**Příklad 8.10** Najděte intenzitu gravitačního pole, je-li zadán potenciál pole

$$\chi_1 = -\varkappa \frac{M}{r} \quad \text{a} \quad \chi_2 = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2.$$

**Řešení:** Podle definice je

$$\mathbf{K}_1 = \nabla \left( \frac{\varkappa M}{r} \right) \quad \text{a} \quad \mathbf{K}_2 = \nabla \left( \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right)$$

Využijeme výsledků předchozí úlohy a pohodlně dostaneme

$$\mathbf{K}_1 = \frac{d}{dr} \left( \frac{\varkappa M}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} = -\varkappa \frac{M}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{a} \quad \mathbf{K}_2 = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left( \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = \omega^2 \mathbf{r}.$$

### 8.4.7 Gravitační pole obecného tělesa

Pokud máme spočíst gravitační pole generované spojitě rozloženou hmotou, nahradíme jednoduše sumy

$$\mathbf{K} = - \sum_k \varkappa \frac{M_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k \quad \text{a} \quad \chi = - \sum_k \varkappa \frac{M_k}{r_k}$$

integrálem a dostaneme

$$\mathbf{K} = - \int \varkappa \frac{dm}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{a} \quad \chi = - \int \varkappa \frac{dm}{r}.$$

Pomocí těchto vzorců můžeme spočítat intenzitu a potenciál libovolného gravitačního pole. Podíváme se proto na nejjednodušší příklady těles se spojitě rozloženou hmotou, jako je sférická slupka nebo homogenní a nehomogenní koule.

### 8.4.8 Gravitační pole slupky

Začneme příkladem gravitačního pole tenké homogenní kulové slupky poloměru  $R$  a hmotnosti  $M$ . Hledáme potenciál

$$\chi = - \int \varkappa \frac{dm}{r}$$

gravitačního pole slupky v bodě  $A$ , který leží ve vzdálenosti  $a = |SA|$  od středu slupky. Celou sféru rozdělíme na prstence, jejichž všechny body  $X$  mají od zvoleného bodu  $A$  stejnou vzdálenost  $r = |AX|$ , takže přispívají k potenciálu rovným dílem. Abychom však mohli integrovat, musíme vhodně vyjádřit hmotnost prstence. Z obrázku je zřejmé, že platí  $S = 4\pi R^2$  a  $dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ , a tedy

$$dm = \frac{M}{S} dS = \frac{1}{2} M \sin \theta d\theta.$$

Z kosínové věty současně platí

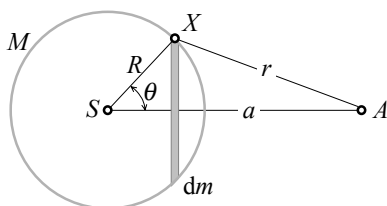
$$r^2 = a^2 - 2aR \cos \theta + R^2,$$

diferencováním tohoto vztahu máme

$$r dr = aR \sin \theta d\theta,$$

takže vyloučením  $\theta$  dostaneme vyjádření  $dm$  jako funkce  $r$

$$dm = \frac{M}{2aR} r dr.$$




---

Ilustrace k výpočtu intenzity gravitačního pole homogenní kulové slupky v bodě  $A$ . Slupka má hmotnost  $M$  a poloměr  $R$ .

---

Nyní již můžeme přikročit k elementární integraci, vzdálenost  $r$  se mění v intervalu  $a - R$  až  $a + R$ , takže

$$\chi = - \int_{a-R}^{a+R} \varkappa \frac{M}{2aR} dr = -\varkappa \frac{M}{a}.$$

Tento výsledek platí za předpokladu, že bod  $A$  leží vně sféry, tedy pro  $a \geq R$ . Intenzita gravitačního pole vně slupky se dostane nejpohodlněji pomocí vzorce

$$\mathbf{K} = -\nabla\chi = -\varkappa\frac{M}{a^3}\mathbf{a},$$

kde jen místo  $\mathbf{r}$  máme vektor  $\mathbf{a} = \overrightarrow{SA}$ .

Gravitační pole vně homogenní slupky je stejné jako gravitační pole hmotného bodu o stejné hmotnosti ležícího ve středu slupky.

Pokud by bod  $A$  ležel uvnitř slupky, tedy pro  $a < R$ , měnila by se vzdálenost  $r$  v intervalu  $R - a$  až  $R + a$ , a tak bychom dostali podstatně odlišný výsledek

$$\chi = -\int_{R-a}^{R+a} \varkappa\frac{M}{2aR}dr = -\varkappa\frac{M}{R}.$$

Protože nyní potenciál nezávisí na poloze bodu  $A$  a je konstantní, bude příslušná intenzita rovna nule

$$\mathbf{K} = -\nabla\chi = \mathbf{0}.$$

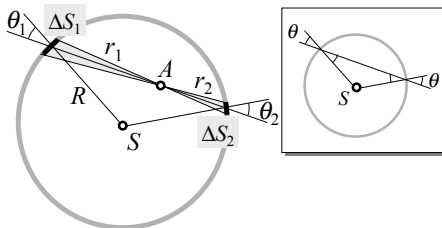
Uvnitř slupky tedy žádná gravitace nepůsobí, vše, co by se tam nacházelo, by bylo v beztížném stavu.

Intenzita gravitačního pole uvnitř homogenní slupky je nulová a potenciál konstantní.

### 8.4.9 Pole uvnitř slupky

To, že uvnitř homogenní sférické slupky žádné gravitační pole nevznikne, je možno ukázat i bez integrace. Uvažujme bod  $A$  ležící uvnitř sféry o poloměru  $R$ . Bod je vrcholem dvou stejných kuželových ploch orientovaných opačnými směry, takže tyto vytknou na sféře plochy  $\Delta S_1$  a  $\Delta S_2$ . Všimněte si, že celou sféru je možno rozložit do podobných sdružených kuželových výřezů. Spočteme nyní výslednou intenzitu  $\Delta K$  gravitačního pole od těchto dvou sdružených elementů v bodě  $A$ . Obě intenzity gravitačního pole budou opačně orientované, a proto platí

$$\Delta K = \Delta K_1 - \Delta K_2 = \varkappa\frac{\Delta M_1}{r_1^2} - \varkappa\frac{\Delta M_2}{r_2^2}.$$




---

Gravitační působení od sdružených částí  $\Delta S_1$  a  $\Delta S_2$  se vzhledem k bodu  $A$  zcela ruší. Z menšího obrázku je zřejmé, že  $\theta_1 = \theta_2$ .

---

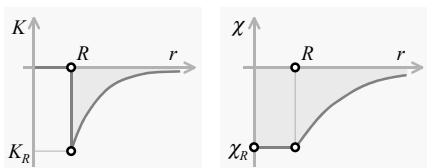
Za předpokladu, že sféra je homogenní, bude výsledná intenzita rovna

$$\Delta K = \varkappa \frac{M}{S} \left( \frac{\Delta S_1}{r_1^2} - \frac{\Delta S_2}{r_2^2} \right).$$

Z definice kuželů je zároveň zřejmé, že obě plochy budou viděny z bodu  $A$  pod stejným prostorovým úhlem  $\Delta\Omega$  a že tedy platí

$$\frac{\Delta S_1}{r_1^2} \cos \theta_1 = \frac{\Delta S_2}{r_2^2} \cos \theta_2.$$

Protože však je zároveň  $\theta_1 = \theta_2$ , bude  $\Delta S_1/r_1^2 = \Delta S_2/r_2^2$ , a proto vyjde  $\Delta K = 0$ . Gravitační síla od sdružených elementů  $\Delta S_1$  a  $\Delta S_2$  homogenní slupky se v bodě  $A$  vzájemně přesně ruší. Uvnitř slupky tedy skutečně žádné gravitační pole nebude.



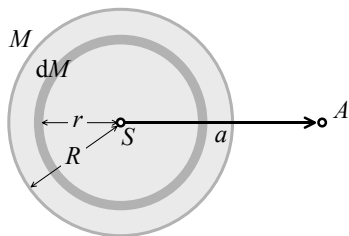

---

Intenzita  $K$  a potenciál  $\chi$  gravitačního pole homogenní slupky o poloměru  $R$ .

---

### 8.4.10 Gravitační pole plné koule

Nyní jsme dostatečně připraveni k výpočtu gravitačního pole plné nehomogenní sféricky symetrické koule o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$ . Takovou kouli můžeme rozložit do homogenních slupek  $dM$  o poloměru  $r$ . Připomeňme, že každá slupka vytváří pole, které je vně slupky ekvivalentní gravitačnímu poli hmotného bodu ležícího ve středu slupky, zatímco uvnitř slupky je pole nulové. Složením polí všech slupek podle principu superpozice dostaneme výsledné gravitační pole koule.




---

Ilustrace k výpočtu gravitačního pole plné koule o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$  v bodě  $A$ . Kouli rozdělíme na tenké sférické slupky o poloměru  $r$ , hmotnosti  $dM$  a tloušťce  $dr$ .

---

#### Bod vně koule

Uvažujme nejprve bod  $A$  ležící vně koule ve vzdálenosti  $a \geq R$  od středu koule. V tom případě k výslednému poli přispějí všechny slupky, takže platí

$$\mathbf{K} = \int -\frac{\varkappa dM}{a^3} \mathbf{a} = -\frac{\varkappa M}{a^3} \mathbf{a}.$$

Podobně pro potenciál dostaneme

$$\chi = \int -\frac{\varkappa dM}{a} = -\frac{\varkappa M}{a},$$

kde  $M = \int dM$  je celková hmotnost koule.

Gravitační pole nehomogenní sféricky symetrické koule je vně koule stejné jako gravitační pole hmotného bodu o hmotnosti celé koule, který se nachází v místě geometrického středu koule.

Vzorce platí nejen pro homogenní kouli, ale i pro nehomogenní kouli, jejíž hustota  $\rho(r)$  se mění se vzdáleností od středu koule. Právě planety a hvězdy (pokud zanedbáme jejich zploštění) jsou typickými představiteli takových nehomogenních sféricky symetrických těles. Je všeobecně známo, že například Země má železné jádro, jehož hustota je pětkrát vyšší než hustota povrchových vrstev. Je tedy zřejmé, že gravitační pole planet a Slunce je možno nahradit gravitačním polem hmotných bodů, a tím se výpočty pohybů planet samozřejmě podstatně zjednoduší.

### Bod uvnitř koule

Nyní zkoume pole v bodě  $A$  ležícím uvnitř koule ve vzdálenosti  $a < R$  od středu koule. V tom případě k výslednému poli přispějí jen ty slupky, které jsou blíže ke středu než uvažovaný bod  $A$ . Naopak slupky, uvnitř kterých bod  $A$  leží, k výslednému poli nepřispějí. Integrací tedy dostaneme výsledek

$$\mathbf{K} = \int_0^a -\frac{\varkappa dM}{a^3} \mathbf{a} = -\frac{\varkappa M(a)}{a^3} \mathbf{a},$$

kde  $M(a) = \int_0^a dM$  je hmotnost všech slupek ležících hlouběji než bod  $A$ .

Závislost intenzity pole na vzdálenosti nemůžeme určit, dokud není známá hustota  $\rho(r)$  jednotlivých slupek. Například pro homogenní kouli  $\rho = \text{konst}$  je

$$M(a) = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi a^3 = M \frac{a^3}{R^3},$$

takže intenzita pole

$$\mathbf{K} = -\frac{\varkappa M}{R^3} \mathbf{a} = -K_R \frac{\mathbf{a}}{R}$$

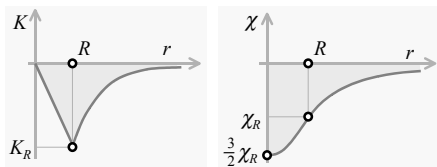
roste lineárně se vzdáleností  $a$  od středu koule, kde je rovna nule  $K(0) = 0$ , až na maximální hodnotu  $K_R = -\varkappa M/R^2$ , kterou dosahuje na povrchu koule  $a = R$ . Také Zemi můžeme považovat v určitém přiblížení za homogenní kouli, intenzita gravitačního pole uvnitř Země je tedy dána vztahem

$$K(r) = g \frac{r}{R},$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení na povrchu Země.



Ke gravitačnímu poli uvnitř nehomogenní sféricky symetrické koule přispívají jen ty vrstvy, které leží hlouběji než bod, v němž gravitační pole zkoumáme.




---

Intenzita  $K$  a potenciál  $\chi$  gravitačního pole homogenní koule o poloměru  $R$ .

---

Podobně spočteme potenciál v místě  $a < R$ . Ke hledanému potenciálu však přispívají všechny slupky, nejen ty vnitřní, proto

$$\chi = \int_0^a d\chi + \int_a^R d\chi = \int_0^a -\frac{\varkappa dM}{a} + \int_a^R -\frac{\varkappa dM}{r}.$$

První integrál je příspěvek vnitřních slupek a je roven  $-\varkappa M(a)/a$ , druhý integrál však bez znalosti rozložení hmoty uvnitř koule nespočteme. Omezíme se proto rovnou na výpočet pro homogenní kouli  $\rho = \text{konst}$ , pak je

$$dM = 4\pi\rho r^2 dr$$

a integrací dostaneme

$$\chi = -4\pi\varkappa\rho \left( \int_0^a \frac{1}{a} r^2 dr + \int_a^R r dr \right) = -\frac{2}{3}\pi\varkappa\rho (3R^2 - a^2)$$

nebo

$$\chi = -\frac{\varkappa M}{2R} \left( 3 - \frac{a^2}{R^2} \right),$$

kde  $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$  je celková hmotnost koule. Na povrchu koule je tedy potenciál

$$\chi(R) = \chi_R = -\varkappa \frac{M}{R}$$

a uprostřed koule

$$\chi(0) = -\frac{3\varkappa M}{2R} = \frac{3}{2}\chi_R.$$

Potenciál dovnitř koule klesá kvadraticky a uprostřed koule dosahuje svého minima.

**Příklad 8.11** Spočtete gravitační pole uvnitř nehomogenní koule, jejíž hustota od středu klesá lineárně podle předpisu  $\rho = \rho_0(1 - r/R)$ .

**Řešení:** Gravitační pole uvnitř koule je

$$K(a) = -\frac{\varkappa M(a)}{a^2} = -\frac{\varkappa}{a^2} \int_0^a \rho 4\pi r^2 dr = -\frac{1}{3}\pi\varkappa\rho_0 a \frac{4R - 3a}{R} = -\frac{\varkappa M}{R^4} (4R - 3a) a,$$

intenzita pole tedy klesá kvadraticky. Uprostřed koule je  $K(0) = 0$  a na povrchu je  $K(R) = -\varkappa M/R^2$ , kde

$$M = \int_0^R 4\pi\rho r^2 dr = \frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$$

je celková hmotnost koule. Potenciál pole je

$$\chi(a) = -\int_{\infty}^a K da = \chi_R - \int_R^a K da = -\frac{\varkappa M}{R^4} (2R^3 - 2Ra^2 + a^3).$$

Uprostřed koule je  $\chi(0) = -2\varkappa M/R$  a na povrchu je  $\chi(R) = -\varkappa M/R$ .

**Příklad 8.12** Spočítejte gravitační pole uvnitř nehomogenní koule, jejíž hustota od středu klesá podle předpisu  $\rho = A/r^2$ . Všechny vrstvy stejné tloušťky  $\Delta r$  tedy přispívají stejnou hmotou  $\Delta m = 4\pi A\Delta r$ .

**Řešení:** Gravitační pole uvnitř koule je

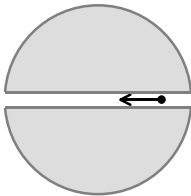
$$K(a) = -\frac{\varkappa M(a)}{a^2} = -\frac{\varkappa}{a^2} \int_0^a 4\pi\rho r^2 dr = -\frac{\varkappa M}{Ra},$$

kde  $M = \int_0^R A4\pi dr = 4\pi AR$  je celková hmotnost koule. Pole tedy roste směrem do středu koule. Potenciál pole je

$$\chi(a) = -\int_{\infty}^a K da = \chi_R - \int_R^a K da = -\frac{\varkappa M}{R} - \frac{\varkappa M}{Ra} \ln \frac{R}{a}.$$

**POZNÁMKA:** Uvažujme sférickou galaxii složenou z miliardy hvězd. Počet hvězd necht' klesá podle stejného předpisu  $\rho = A/r^2$ . Jednotlivé hvězdy musí obíhat kolem středu galaxie, z rovnosti dostředivého zrychlení a gravitační intenzity dostaneme zajímavý výsledek, totiž že orbitální rychlost hvězd nezávisí na jejich vzdálenosti od středu galaxie  $v = \sqrt{Ka} = \sqrt{\varkappa M/R} = \text{konst.}$  Podobné chování hvězd se u galaxií skutečně pozoruje, odtud pak plyne, že rozložení hvězd v galaxii musí klesat přibližně se čtvercem vzdálenosti od středu.

**Příklad 8.13** Skrz zeměkouli byl vyvrtán tunel procházející středem Země. Do tunelu spadl kámen. Za předpokladu, že Země je homogenní koule, spočítejte, za jak dlouho se kámen vrátí zpět. Odpor vzduchu a rotaci Země zanedbejte.



Popište pád kamene tunelem, který prochází skrz naskrz celou zeměkoulí.

**Řešení:** Na kámen působí tíhová síla, která slábne podle rovnice

$$F = mK = -mg \frac{r}{R}.$$

Pohybová rovnice kamene je tedy

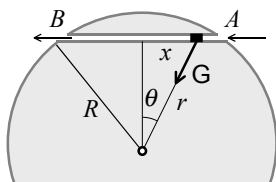
$$\ddot{r} + \frac{g}{R}r = 0,$$

což je rovnice harmonických kmitů. Řešením úlohy je tedy  $r(t) = R \cos \omega t$ , kde  $\omega = \sqrt{g/R}$  je úhlová frekvence kmitů. Kámen se vrátí přesně za jednu periodu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84 \text{ min.}$$

Všimněte si, že jde o stejnou dobu, za kterou satelit obletí Zemi jednou dokola.

**Příklad 8.14** Vyvrtnat tunel skrz žhavé a tekuté jádro je technicky nemožné. Zvažte však možnost, že vyvrtnáme přímý tunel jen v plášti mezi městy  $A$  a  $B$ , které jsou vzdáleny od sebe na vzdálenost  $d$ . Pokud by se do tunelu položily koleje, vlak by se rozjel v jedné stanici vlastní vahou a vyjel by ve stanici druhé a zastavil, aniž by to stálo jakoukoliv energii. Určete, jak dlouho by cesta vlaku (bez tření) trvala.




---

Přímý tunel mezi městy  $A$  a  $B$  má sloužit jako metro, které nepotřebuje ke svému pohonu žádnou energii. Vlak se rozjede vlivem zemské gravitace.

---

**Řešení:** Na vlak působí tíhová síla  $G = mgr/R$ , její složka ve směru pohybu je  $G \sin \theta$ , takže zrychlení vlaku bude

$$a = -\frac{g}{R}r \sin \theta = -\frac{g}{R}x.$$

Zrychlení nezávisí na úhlu  $\theta$  a vede opět na rovnici kmitů. Řešení má tvar

$$x = \frac{d}{2} \cos \sqrt{\frac{g}{R}}t,$$

z něhož je zřejmé, že doba jízdy bude rovna polovině periody

$$t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42 \text{ min.}$$

Stavba takového tunelu by se tedy mohla vyplatit už při vzdálenosti měst nad 100 km.

**Příklad 8.15** Kosmonauti přistáli na asteroidu o průměru  $d \approx 10$  km. Odhadněte gravitaci a únikovou rychlost na povrchu asteroidu.

**Řešení:** Předpokládejme, že asteroid má tvar koule a homogenní hustotu  $\rho$ . Tíhové zrychlení na jeho povrchu pak bude

$$g = \frac{\varkappa M}{R^2} = \frac{2\pi\varkappa\rho}{3}d.$$

Pro obvyklou hustotu  $\rho \approx 3000 \text{ kg/m}^3$  dostaneme  $g \approx 4 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ . Tíha na povrchu asteroidu bude dvaapůltisícekrát menší než je na povrchu Země a bude prakticky zanedbatelná. Pokud jde o únikovou rychlost

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2\varkappa M}{R}} = \sqrt{\frac{2\pi\varkappa\rho}{3}}d,$$

tak ta bude mít velikost asi  $v_{II} \approx 6.5 \text{ m/s}$ . To je už dostatečná rychlost k tomu, aby se kosmonaut nemusel obávat, že při neopatrném pohybu skončí někde v hlubinách kosmu. Při pořádném výskoku na Zemi je možno vyskočit zhruba do výše  $h \approx 0.5$  m, při odrazu je tedy možno dosáhnout rychlosti maximálně  $v \approx \sqrt{2gh} \approx 3 \text{ m/s}$ . S touto rychlostí by mohl kosmonaut na asteroidu vyskočit do výše asi

$$H = \frac{d/2}{v_{II}^2/v^2 - 1} \approx 1.4 \text{ km},$$

ale pak by se vždy zase vrátil na povrch asteroidu. Jeden skok by trval asi půl hodiny.

### 8.4.11 Gravitační energie

Z předchozího výkladu již víme, že gravitační potenciální energie dvou hmotných bodů  $m_1$  a  $m_2$  je dána vzorcem

$$U = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}},$$

kde  $r_{12}$  je vzdálenost obou těles. Potenciální energie je vždy záporná a jsou-li tělesa od sebe nekonečně daleko, je rovna nule. Energie soustavy tří hmotných bodů dostaneme jako součet gravitačních energií všech tří párů (1, 2), (1, 3) a (2, 3), tedy

$$U = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \varkappa \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - \varkappa \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

Zobecněním těchto úvah dostaneme potenciální energii libovolné soustavy hmotných bodů

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \varkappa \frac{m_i m_k}{r_{ik}},$$

kde faktor  $1/2$  opravuje skutečnost, že zde sčítáme energii každé dvojice bodů  $(i, k)$  právě dvakrát.

Je-li hmota rozložena spojitě, pak nezbývá než sumu nahradit integrálem přes veškerou hmotu tělesa

$$U = -\frac{1}{2} \iint \varkappa \frac{dm_1 dm_2}{r_{12}}. \quad (8.27)$$

Pomocí potenciálu je možno výraz pro energii (8.27) přepsat do tvaru

$$U = \frac{1}{2} \int \chi dm = \frac{1}{2} \int \chi \rho dV,$$

který se mnohem lépe hodí pro výpočty, protože zde máme už jen jeden integrál. Například pro homogenní slupku a homogenní kouli o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$  dostaneme (viz příklady na konci kapitoly)

$$U = -\frac{1}{2} \frac{\varkappa M^2}{R} \quad \text{a} \quad U = -\frac{3}{5} \frac{\varkappa M^2}{R}.$$

Gravitační energie tedy roste se čtvercem hmotnosti tělesa a nepřímo úměrně s rozměrem tělesa.

**Příklad 8.16** Spočítejte gravitační energii homogenní kulové slupky o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$ .

**Řešení:** Využijeme vzorec pro potenciál  $\chi = \chi_R = -\varkappa M/R$  uvnitř homogenní slupky. Pro potenciální energii gravitačního pole pak platí

$$U = \frac{1}{2} \int \chi dM = \frac{1}{2} \chi_R M = -\frac{\varkappa M^2}{2R}.$$

**Příklad 8.17** Spočítejte gravitační energii homogenní koule o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$ .

**Řešení:** Použijeme vzorec pro potenciál

$$\chi = -\frac{\varkappa M}{2R} \left( 3 - \frac{a^2}{R^2} \right)$$

uvnitř homogenní koule, pro potenciální energii koule pak platí

$$U = \frac{1}{2} \int \chi dM = \varkappa \frac{M}{4R} \int_0^R \left( \frac{a^2}{R^2} - 3 \right) 4\pi \rho a^2 da$$

a po integraci a malé úpravě dostaneme výsledek

$$U = -\frac{4\pi}{5} \varkappa M R^2 \rho = -\frac{3}{5} \frac{\varkappa M^2}{R}.$$

### 8.4.12 Gravitační kontrakce

Gravitační potenciální energie hraje velmi důležitou roli v evoluci kosmických těles. Pokud se kosmické těleso gravitačně smršťuje, klesá jeho gravitační energie a ta se podle zákona zachování energie mění na kinetickou energii. Ta obvykle není navenek příliš patrná, protože jde o kinetickou energii jednotlivých atomů tělesa, ale projeví se ohřevem tělesa. Teplo, které se uvolní, je rovno rozdílu počáteční a konečné gravitační energie

$$Q = -\Delta U = U_1 - U_2,$$

takže příslušný ohřev tělesa je

$$\Delta T = \frac{Q}{Mc_P} = \frac{U_1 - U_2}{Mc_P},$$

kde  $c_P$  je měrné teplo tělesa při stálém tlaku.

Například teplo, které se uvolnilo gravitačním kolapsem naší planety z původní beztvaré mlhoviny velkého rozměru  $R_1 \approx \infty$  na současný rozměr  $R_2 \approx R_Z$ , způsobilo ohřev nitra Země o teplotu

$$\Delta T \approx \frac{\varkappa M}{R_Z c_P} \approx \frac{v_I^2}{c_P} \approx 60\,000 \text{ K}.$$

Od té doby Země pochopitelně postupně chladne a dnešní teplota uvnitř Země je jen 5 000 K. To je však stále teplota postačující k roztavení zemských hornin a bohaté tektonické činnosti naší planety. Menší planety, stejně jako náš Měsíc, již za miliardy let své existence stačily vychladnout, a jsou proto tektonicky mrtvé. Takové planety nemohou mít ani atmosféru, ani volné oceány. Ze znalosti gravitační energie je možno odhadnout i tlak uvnitř Země vzorcem

$$p \approx \frac{U}{V} \approx \frac{\varkappa M^2}{R^4} \approx 10^{12} \text{ Pa}.$$

Pokud se hvězda smršťuje a její teplota neroste, pak musí hvězda do okolí vyzařovat tepelný výkon, který je roven záporně vzaté derivaci potenciální energie

podle času

$$P = -\frac{dU}{dt} = -\frac{3}{5} \frac{\kappa M^2}{R^2} \frac{dR}{dt}.$$

Celkový tepelný výkon, který naše Slunce vyzařuje, se dá vysvětlit pouhým smršťováním Slunce o deset centimetrů za den. Slunce by proto mohlo zářit tímto mechanismem, stejně vydatně jako dnes, po čtyřicet miliónů let. S kontrakční hypotézou přišel roku 1854 HERMANN HELMHOLZ. Tehdy se soudilo, že Země není starší než dvacet miliónů let, takže Helmholtzova hypotéza se zdála být docela rozumnou. Dnes však již víme, že Slunce září nepřetržitě téměř pět miliard let, takže je zřejmé, že hlavním zdrojem sluneční energie musí být něco mnohem vydatnějšího, než je **gravitační kontrakce**. Zdrojem sluneční energie jsou termonukleární reakce probíhající v nitru Slunce při teplotách  $1.5 \times 10^7$  K a tlacích  $2 \times 10^{15}$  Pa. Ovšem k počátečnímu zažehnutí jaderné fúze bylo teplo z gravitační kontrakce nezbytně nutné, bez něj by byly hvězdy navždy jen studenými plynnými koulemi, tak jako jimi zůstaly dodnes velké planety naší sluneční soustavy. Jejich smršťení a zahřátí nestačilo ke spuštění jaderné fúze.

### 8.4.13 Gravitační síla mezi dvěma koulemi

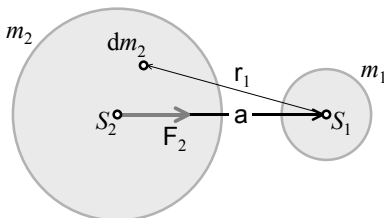
Nebeská tělesa, hvězdy a planety nejsou hmotnými body, ale obrovskými koulemi. Naštěstí přitažlivá síla mezi dvěma středově symetrickými koulemi je stejná jako mezi dvěma hmotnými body, které se nacházejí v místech těžišť obou koulí. Platí to nejen pro homogenní koule, ale i pro nehomogenní koule, jejichž hustota závisí jen na vzdálenosti od středu koule. Tato podmínka je naštěstí pro nebeská tělesa dobře splněna, a proto v nebeské mechanice vystačíme s představou hmotných bodů.

Nejen dva hmotné body, ale i dvě nehomogenní sféricky symetrické koule o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , se přitahují silou

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{a^2},$$

kde  $a$  je vzdálenost jejich středů.

Dvě symetrické koule konečných rozměrů se tedy přitahují stejnými silami, jakými by se přitahovaly, kdyby se smrštkly ve dva hmotné body. Význam zákona si uvědomoval již Newton, a proto také otálel s publikací teorie gravitace, dokud jej neuměl dokázat. Dokážeme si nyní jeho platnost.



Ilustrace k odvození přitažlivé síly  $\mathbf{F}_2$  mezi dvěma středově symetrickými koulemi o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , vzdálenost jejichž středů je  $a$ .

Potřebujeme tedy spočítat sílu

$$\mathbf{F}_2 = -\varkappa \iint \frac{dm_1 dm_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (8.28)$$

kterou působí první koule vpravo na druhou kouli vlevo. Gravitační pole vně první středově symetrické koule  $m_1$  známe. Je stejné jako pole hmotného bodu, který se nachází ve středu  $S_1$  první koule a jeho intenzita je pro  $r_1 > R_1$  dána vzorcem

$$\mathbf{K}_1 = -\varkappa \frac{m_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1,$$

kde  $\mathbf{r}_1$  představuje polohový vektor obecného bodu vzhledem ke středu koule  $S_1$ . Intenzita  $\mathbf{K}_1$  působí na všechny elementy  $dm_2$  druhé koule a výsledná síla je podle principu superpozice dána jejich součtem. Po dosazení a přeskupení dostaneme

$$\mathbf{F}_2 = \int \mathbf{K}_1 dm_2 = m_1 \int -\varkappa \frac{dm_2}{r_1^3} \mathbf{r}_1.$$

Protože intenzita gravitačního pole od levé koule v bodě  $S_1$  je dána výrazem

$$\mathbf{K}_2 = \int -\varkappa \frac{dm_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2 = \int \varkappa \frac{dm_2}{r_1^3} \mathbf{r}_1,$$

kde  $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1$ , můžeme hledanou sílu přepsat také do tvaru

$$\mathbf{F}_2 = -m_1 \mathbf{K}_2(S_1).$$

Ovšem velikost intenzity gravitačního pole druhé koule již také známe, v bodě  $S_1$  je rovna

$$\mathbf{K}_2 = -\varkappa \frac{m_2}{a^3} \mathbf{a},$$

kde  $\mathbf{a} = \overrightarrow{S_2 S_1}$ . Můžeme tedy rovnou napsat výsledek pro sílu

$$\mathbf{F}_2 = \varkappa \frac{m_1 m_2}{a^3} \mathbf{a},$$

aniž bychom museli integraci (8.28) skutečně provést. Koule se tedy přitahují stejnou silou jako dva hmotné body ležící uprostřed každé z obou koulí a soustřeďující v sobě veškerou hmotnost každé z obou koulí. Směr síly je dán spojnicí středů obou koulí. Tím je důkaz hotov.

#### 8.4.14 Singularity a elementární kulička

Intenzita gravitačního pole hmotného bodu  $M$  je popsána vzorcem

$$\mathbf{K} = -\varkappa \frac{M}{r^3} \mathbf{r}.$$

Všimněte si, že pro  $r \rightarrow 0$  je pole singulární, tj. v bezprostřední blízkosti hmotného bodu je gravitační pole nekonečně silné. Také energie gravitačního pole hmotného bodu vychází nekonečně velká.

Nekonečna tohoto druhu nemají pochopitelně ve fyzice co dělat a jsou jen důsledkem přílišné idealizace. Ve skutečnosti totiž nic takového jako hmotný bod neexistuje, každé těleso má konečné rozměry a konečnou energii. Jako reálnou částici generující gravitační pole můžeme vzít malou elementární homogenní kuličku (jakýsi atom) o poloměru  $R$  a hmotnosti  $M$ . Intenzita gravitačního pole generovaného homogenní kuličkou je, jak již víme, vně kuličky rovna

$$\mathbf{K} = -\varkappa \frac{M}{r^3} \mathbf{r}$$

a uvnitř kuličky

$$\mathbf{K} = -\varkappa \frac{M}{R^3} \mathbf{r} = -\frac{4}{3} \pi \varkappa \rho \mathbf{r},$$

kde  $\rho$  je hustota hmoty, z níž je kulička tvořena. Pokud to bude potřeba, můžeme rozměr a hmotnost elementární kuličky limitně zmenšovat k nule při konečné hustotě  $\rho$ . V tom případě již žádné singularity nevzniknou. I gravitační energie elementární kuličky bude vždy konečná

$$U = -\frac{3}{5} \varkappa \frac{M^2}{R} = -\frac{16}{15} \pi^2 \varkappa \rho^2 R^5.$$

### 8.4.15 Gaussova a Poissonova věta

Podobně jako jsme definovali **gradient** pomocí operátoru **nabla**, můžeme definovat **divergenci**. Výraz

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}$$

nazýváme divergencí vektoru  $\mathbf{K}$ . Například platí

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Spočteme nyní divergenci gravitačního pole elementární kuličky. Vně kuličky je divergence pole všude rovna nule

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = -\varkappa M \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\varkappa M \left( \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} \right) = 0,$$

neboť

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad \text{a} \quad \nabla \frac{1}{r^3} = -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5}.$$



Pouze uvnitř kuličky je divergence pole nenulová a je zde rovna

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = -\frac{4}{3}\pi\kappa\rho\nabla \cdot \mathbf{r} = -4\pi\kappa\rho.$$

Pokud si uvědomíme, že hustota hmoty vně kuličky je rovna nule, platí poslední vzorec jak uvnitř, tak i vně kuličky.

Reálnou hmotu můžeme poskládat z elementárních kuliček (atomů) a podle principu superpozice libovolné gravitační pole můžeme poskládat z jednotlivých polí generovaných elementárními kuličkami. Jestliže takto složíme gravitační pole, bude v místě, kde se právě nachází kulička  $M$ , divergence pole dána pouze hustotou této kuličky a ostatní kuličky na ní nemají žádný vliv. Vzorec

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = -4\pi\kappa\rho$$

tudíž platí naprosto obecně a nazývá se **Gaussova věta** (v diferenciálním tvaru). Často se **Gaussova věta** uvádí v integrálním tvaru.

Tok intenzity gravitačního pole uzavřenou plochou je roven  $-4\pi\kappa$  násobku součtu hmotností všech těles uzavřených plochou, vzorcem

$$\oint_S \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\kappa \sum_k m_k.$$

Pokud za intenzitu dosadíme její potenciál podle předpisu  $\mathbf{K} = -\nabla\chi$ , dostaneme z Gaussovy věty rovnici pro potenciál  $\nabla \cdot \nabla\chi = \nabla^2\chi = 4\pi\kappa\rho$ , což je **Poissonova rovnice**

$$\nabla^2\chi = 4\pi\kappa\rho.$$

Řešení Poissonovy rovnice už pochopitelně známe, obecně má tvar

$$\chi(\mathbf{r}) = -\kappa \int \rho(\mathbf{r}') \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

kde integrujeme přes objem tělesa generujícího gravitační pole. Intenzitu gravitačního pole najdeme podle obecného předpisu

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla\chi(\mathbf{r}) = -\kappa \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

Gaussovu větu pro elektrostatiku sestavil roku 1835 CARL FRIEDRICH GAUSS, ale publikoval ji až roku 1867. Poissonovu rovnici odvodil SIMÉON DENIS POISSON roku 1813. Mimo objem tělesa je  $\rho = 0$  a Poissonova rovnice se redukuje na Laplaceovu rovnici  $\nabla^2\chi = 0$ , kterou znal již PIERRE-SIMON LAPLACE roku 1782.

### 8.4.16 Hustota energie gravitačního pole

Potenciální energie tělesa se spojitě rozloženou hmotou se spočte podle vzorce

$$U = \frac{1}{2} \int \chi \rho dV,$$

kde integrujeme jen přes místa, kde je hustota hmoty  $\rho \neq 0$ . Protože jinde je  $\rho = 0$ , můžeme integrační oblast pohodlně rozšířit na celý prostor. Nyní tento vzorec upravíme do tvaru, ve kterém bude vystupovat jen intenzita gravitačního pole  $\mathbf{K}$ . Pokud za  $\rho$  dosadíme podle Gaussovy věty, dostaneme

$$U = -\frac{1}{8\pi\kappa} \int \chi \nabla \cdot \mathbf{K} dV.$$

Dále vezměme identitu

$$\chi \nabla \cdot \mathbf{K} = \nabla \cdot (\chi \mathbf{K}) - \nabla \chi \cdot \mathbf{K}$$

a integrujme přes celý prostor

$$\int \chi \nabla \cdot \mathbf{K} dV = \int \nabla \cdot (\chi \mathbf{K}) dV - \int \nabla \chi \cdot \mathbf{K} dV.$$

První integrál vpravo je možno pomocí Gaussovy integrální věty převést na integraci přes nekonečnou uzavřenou plochu

$$\int \nabla \cdot (\chi \mathbf{K}) dV = \oint \chi \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}.$$

Snadno lze ukázat, že tento integrál musí být roven nule, protože pro nekonečnou sféru poloměru  $R$  klesá  $\chi$  jako  $R^{-1}$  a  $K$  jako  $R^{-2}$ , zatímco  $S$  roste jen jako  $R^2$ . Velikost integrálu je tedy možno odhadnout jako  $\chi K S \sim R^{-1}$ , a to jde k nule. Druhý integrál je roven

$$\int \nabla \chi \cdot \mathbf{K} dV = - \int K^2 dV,$$

takže pro potenciální energii máme nové vyjádření

$$U = -\frac{1}{8\pi\kappa} \int K^2 dV.$$

Integrand

$$w = \frac{U}{V} = -\frac{K^2}{8\pi\kappa} \leq 0$$

je možno interpretovat jako objemovou **hustotu energie gravitačního pole**. Tato hustota je vždy záporná, což je obecná vlastnost všech přitažlivých sil a nenulová jen tam, kde je intenzita  $K \neq 0$ .

**Příklad 8.18** Spočítejte hustotu energie gravitačního pole homogenní slupky o poloměru  $R$  a hmotnosti  $M$ .

**Řešení:** Intenzita pole je nenulová jen vně slupky, kde je  $K = -\varkappa \frac{M}{r^2}$ . Hustota energie je tedy

$$w = -\frac{K^2}{8\pi\varkappa} = -\frac{\varkappa}{8\pi} \frac{M^2}{r^4}$$

a celková energie gravitačního pole je

$$U = \int w dV = -\frac{\varkappa}{8\pi} \int_R^\infty \frac{M^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = -\varkappa \frac{M^2}{2R}.$$

**Příklad 8.19** Spočítejte hustotu energie gravitačního pole homogenní koule o poloměru  $R$  a hmotnosti  $M$ .

**Řešení:** Intenzita pole vně koule je  $K_1 = -\varkappa \frac{M}{r^2}$  a uvnitř koule  $K_2 = -\varkappa \frac{M}{R^3} r$ . Hustota energie je tedy

$$w_1 = -\frac{\varkappa}{8\pi} \frac{M^2}{r^4}, \quad w_2 = -\frac{\varkappa}{8\pi} \frac{M^2}{R^6} r^2$$

a celková energie gravitačního pole je

$$U = \int_R^\infty w_1 dV + \int_0^R w_2 dV = -\frac{3}{5} \varkappa \frac{M^2}{R}.$$

## 8.5 Problém dvou a více těles

### 8.5.1 Problém dvou těles

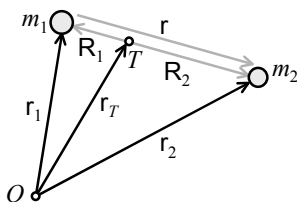
Nejjednodušší dynamická úloha v teorii gravitace je **problém dvou těles**, tj. pohyb dvou hmotných bodů pod vlivem vzájemného gravitačního působení. Označme hmotnosti těles  $m_1$  a  $m_2$  a jejich polohy v prostoru  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$ . Pohybové rovnice obou těles jsou

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12} = \frac{\varkappa m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{a} \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21} = -\frac{\varkappa m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r},$$

kde  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  je relativní vzájemná poloha obou těles. Po vykrácení hmotností  $m_1$  a  $m_2$  je možno obě rovnice odečíst a dostaneme jedinou rovnici pro  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{a} = -\frac{\varkappa (m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r},$$

kde  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$  je relativní zrychlení obou těles.




---

Problém dvou těles  $m_1$  a  $m_2$ , obě tělesa obíhají kolem společného těžiště  $T$

---

Jestliže obě pohybové rovnice sečteme, dostaneme rovnici pro pohyb společného těžiště  $T$  obou těles

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{a}_T = \mathbf{0}.$$

Z ní plyne, že  $\mathbf{a}_T = \mathbf{0}$  nebo  $\mathbf{v}_T = \text{konst}$ , tj. těžiště soustavy je v rovnoměrném setrvačném pohybu. Poloha těžiště je přitom dána známým výrazem

$$\mathbf{r}_T = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

takže pokud najdeme  $\mathbf{r}$ , budeme znát i pohyb obou těles

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_T - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{a} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_T + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Stačí tedy vyřešit pohybovou rovnici pro  $\mathbf{r}$ , která má tvar

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\varkappa(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r}.$$

Tato rovnice odpovídá Keplerově úloze, jen hmotnost centrálního tělesa  $M_S$  je zde nahrazena součtem hmotností obou těles  $m_1 + m_2$ . Řešení rovnice tudíž známe, relativní pohyb obou těles je popsán stejnými rovnice jako Keplerova úloha. Z toho plyne, že obě tělesa obíhají kolem společného těžiště  $T$  po sdružených eliptických drahách se stejnými periodami. Pro obě tělesa platí Keplerovy zákony, takže například **třetí Keplerův zákon** má nyní tvar

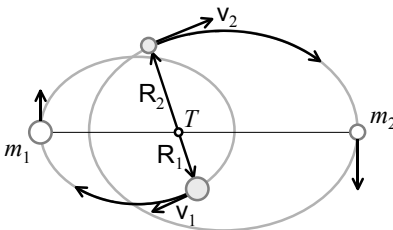
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\varkappa(m_1 + m_2)}{4\pi^2}, \quad (8.29)$$

kde  $a = a_1 + a_2$ . Poloha obou těles vůči těžišti soustavy je dána vektory

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_T = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{a} \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Pro velké poloosy obou drah proto platí

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad \text{a} \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a.$$




---

Problém dvou těles  $m_1$  a  $m_2$ , obě tělesa obíhají kolem společného těžiště  $T$  po eliptických drahách. Společným ohniskem obou elips je těžiště soustavy.

---

Protože hmotnost Slunce výrazně převyšuje hmotnosti planet, je chyba v periodě planet, které se dopustil Kepler tím, že neuvažoval pohyb Slunce, i u Jupitera dostatečně malá a je řádu  $M_J/M_S \approx 1/1050$ . Pro soustavu Země – Měsíc je tento poměr relativně veliký  $M_M/M_Z \approx 1/81$  a nemá ve sluneční soustavě obdoby. V této souvislosti se o Zemi a Měsíci často hovoří jako o dvojhvězdě. Pohyb samotné Země kolem těžiště soustavy Země – Měsíc proto nelze zanedbat. Jde zhruba o kruhový pohyb s poloměrem 4700 km a periodou 27.3 dne.

U pohybu dvojhvězd je pohyb obou složek stejně významný. Někdy dochází k částečným zákrytům hvězd a tím i k periodickému kolísání jasů dvojhvězdy. Je možno měřit i Dopplerovské posuny spekter obou složek. Odtud mohou astronomové určit periodu a hmotnost obou složek dvojhvězdy. Nedávno objevili astronomové první planety u vzdálených hvězd. Objevili je pozorováním periodických změn polohy mateřské hvězdy, která spolu s planetami obíhá kolem společného těžiště.

**Příklad 8.20** Astronomové objevili dvojhvězdu, obě její složky jsou tvořeny hvězdami o stejné hmotnosti, jako má naše Slunce a obíhají kolem společného těžiště po přibližně kruhových drahách. Obě hvězdy jsou od sebe vzdáleny právě o 1 AU. Určete periodu oběhu dvojhvězdy.

**Řešení:** Podle třetího Keplerova zákona (8.29) platí

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\varkappa(m_1 + m_2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{2\varkappa M_S},$$

kde  $M_S$  je hmotnost Slunce, a protože pro Zemi platí podobně

$$T_Z^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\varkappa M_S},$$

máme hned výsledek  $T = T_Z/\sqrt{2} \approx 8.5$  měsíce.

**Příklad 8.21** Za jak dlouho se srazí dvě koule o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , nacházejí-li se na počátku v klidu ve vzdálenosti  $r$  od sebe?

**Řešení:** Obě tělesa se budou pohybovat po velmi protáhlé elipse. Podle třetího Keplerova zákona (8.29) platí

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\varkappa(m_1 + m_2)},$$

kde  $a = r/2$  je poloosa relativního pohybu jednoho tělesa vzhledem ke druhému. Doba pádu je zároveň rovna polovině oběžné doby  $t = T/2$ , takže

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2 r^3}{8\varkappa(m_1 + m_2)}}.$$

Například pro dvě stejné olovené koule o průměru 1 m a vzdálené 1 km dostaneme  $t \approx 460$  dní.

**Příklad 8.22** Najděte periodu a rychlost rotace soustavy dvou hmotných bodů  $m_1$  a  $m_2$  obíhajících kolem společného těžiště po kruhových drahách. Vzdálenost obou těles je  $r$ .

**Řešení:** Z definice těžiště je poloměr dráhy prvního tělesa  $r_1 = rm_2/(m_1 + m_2)$ . Tělesa se přitahují gravitační silou

$$F_G = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

ta se musí rovnat dostředivé síle

$$F_D = m_1 \omega^2 r_1 = \omega^2 r \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Odtud je

$$\omega^2 = \varkappa \frac{m_1 + m_2}{r^3} \quad \text{a} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\varkappa (m_1 + m_2)}}.$$

Výsledky jsou tedy v naprostém souladu se třetím Keplerovým zákonem (8.29).

**Příklad 8.23** Uvažujte soustavu dvou těles  $m_1$  a  $m_2$  obíhajících kolem společného těžiště  $T$  po kruhových drahách. Vzdálenost obou těles je  $r$ . Vypočtete hmotnost  $M_1$ , jakou by muselo mít nehybné centrum  $T$ , aby kolem něj těleso  $m_1$  obíhalo se stejnou periodou.

**Řešení:** Z definice těžiště je poloměr dráhy prvního tělesa  $r_1 = rm_2/(m_1 + m_2)$ . Tělesa se přitahují gravitační silou

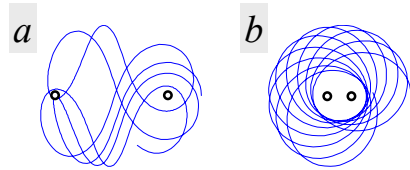
$$F = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2} = \varkappa \frac{m_1}{r_1^2} \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2},$$

kde jsme dosadili za  $r = r_1 (m_1 + m_2) / m_2$ . Tato síla může být chápána jako gravitační síla od centra, které je ve vzdálenosti  $r_1$  a má hmotnost

$$M_1 = \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

### 8.5.2 Problém tří a více těles

Pohyb tří hmotných bodů podrobených vzájemným přitažlivým silám se nedá vyřešit v uzavřeném analytickém tvaru tak jako problém dvou těles, který kompletně vyřešil již JOHANN BERNOULLI roku 1710. Příčinou není ani tak počet rovnic, jako především skutečnost, že pohybové rovnice jsou nelineární. Právě z tohoto důvodu je pohyb tří a více těles analyticky neřešitelný, takže je nutno spoléhat na přibližná řešení nebo numerické výpočty. Příkladem komplikované dynamiky tří těles je následující obrázek dvou možných trajektorií lehkého tělesa v okolí dvojice nehybných těžkých těles.




---

Typický průběh chaotické dynamiky pohybu třetího tělesa kolem dvou stejně těžkých těles. V případě (a) byla energie zkušební tělesa menší než v případě (b).

---

### 8.5.3 Poruchový počet

Pohyby planet a Měsíce však představují důležitý praktický problém, který je nutno řešit. Od 18. století jsou známá přibližná analytická řešení, která využívají poruchového počtu. Použitelnost poruchových rozvoju je založena na skutečnosti, že vliv ostatních planet na pohyb zkoumané planety je mnohem slabší než vliv Slunce.

Změny elementů oběžných drah planet jsou funkcemi poloh ostatních planet. Příslušné rovnice mají tvar Fourierovy řady obsahující stovky poruchových členů tvaru

$$\dot{a}_1 = \sum_{kl} (C_{kl} \cos \Omega_{kl} t + S_{kl} \sin \Omega_{kl} t),$$

kde  $a_1$  je studovaný dráhový element planety  $P_1$ , například velká poloosa,  $C_{kl}$  a  $S_{kl}$  jsou amplitudy poruch,  $\Omega_{kl} = kn_1 + ln_2$  jejich frekvence,  $k, l$  jsou celá čísla a  $n_1, n_2$  představují střední pohyby studované planety a rušící planety. Pro jednoduchost jsme se zde omezili na jedinou rušící planetu  $P_2$ . Integrací dostaneme periodické řešení rovněž ve tvaru Fourierovy řady

$$a = \sum_{kl} \left( C_{kl} \frac{\sin \Omega_{kl} t}{\Omega_{kl}} + S_{kl} \frac{1 - \cos \Omega_{kl} t}{\Omega_{kl}} \right).$$

Problém nastane, když se některá z frekvencí přibližně rovná nule, tj. když pro určitá  $k$  a  $l$  platí

$$\Omega_{kl} = kn_1 + ln_2 \approx 0.$$

Příslušný člen pak již není periodický, ale sekulární

$$C_{kl} \frac{\sin \Omega_{kl} t}{\Omega_{kl}} \approx C_{kl} t,$$

tj. roste monotónně s časem. Dráha planety se díky této **sekulární poruše** soustavně odchyluje od původního tvaru či polohy v prostoru. V tom případě hovoříme o **rezonanci**. Důsledkem rezonance může být mezera v pásu asteroidů nebo naopak zachycení planety nebo měsíce. Například rezonance typu 1 : 2, 3 : 7, 2 : 5 a 1 : 3 oběžných dob asteroidů s oběžnou dobou Jupitera měly za následek postupné odstranění všech asteroidů z jinak homogenně obsazeného širokého pásu mezi Marsem a Jupiterem. Takto vzniklé prázdné pásy se nazývají **Kirkwoodovy mezery**, podle DANIELA KIRKWOODA, který je objevil roku 1866.

Máme-li být úplně přesní, dokonalá rezonance neexistuje. Existují však rezonance s velmi dlouhou periodicitou a velkou amplitudou. V případě rezonance  $\Omega_{kl} \approx 0$  je amplituda poruchy  $C_{kl}/\Omega_{kl}$  mnohem větší než amplituda ostatních poruch. Příkladem je rezonance 2 : 5 mezi oběžnými dobami Jupitera a Saturna. Výsledná perioda  $2\pi/\Omega_{25}$  této poruchy je asi 880 let a amplituda poruchy je asi 49' u Saturna a 21' u Jupitera. Saturn se tak vlivem Jupitera na obloze čtyři století předbíhá a další čtyři století zase opožďuje oproti Keplerovým zákonům s maximální odchylkou až dvacet pět dní.

Problém tří těles je zkoumán více než 200 let, nejvíce se o něj zasloužili LEONHARD EULER, JOSEPH LOUIS LAGRANGE, PIERRE-SIMON LAPLACE v 18. století, URBAIN-JEAN-JOSEPH LE VERRIER, SIMON NEWCOMB, CHARLES-EUGENE DELAUNAY, WILLIAM ROWAN HAMILTON, KARL GUSTAV JACOB JACOBI, GEORGE WILLIAM HILL a HENRI POINCARÉ v 19. století, TULLIO LEVI-CIVITÁ a GEORGE DAVID BIRKHOFF ve 20. století. Výsledkem jejich bádání byly poruchové rozvoje umožňující předvídat polohy planet s dostatečnou přesností v omezeném časovém intervalu trvajícím řádově  $10^4$  let. Ve srovnání s Ptolemaiem to není příliš významný pokrok! I dnes platí, snad ještě více než tomu bylo v minulosti, že astronomická pozorování jsou daleko před možnostmi teoretických předpovědí. Například polohu Měsíce dnes určujeme pomocí laserových dálkoměrů s přesností  $\pm 40$  cm, srovnatelnou přesnost mají předpovědi jeho poloh jen v intervalu asi jednoho tisíce let!

### 8.5.4 Numerická řešení

V případě pohybu soustav srovnatelných hmotností, typickým příkladem je soustava Země a Měsíc, sekulární poruchové rozvoje přestávají konvergovat a nedají se použít. Taktéž v případě rezonancí  $\Omega_{kl} \approx 0$  přestávají mít tyto rozvoje smysl. Jediným východiskem se pak stává moderní výpočetní technika a numerické metody řešení pohybů planet. Pomocí těchto metod je možno určovat polohy planet zhruba na sto miliónů let dopředu. Delší předpovědi není možno získat ze stejného důvodu, proč není možno předvídat počasí. Řešení nelineárních rovnic je totiž exponenciálně citlivé na počáteční podmínky a poruchy. To však znamená, že i naše sluneční soustava je velmi nestabilním útvarem, který se neustále dynamicky vyvíjí. V delším časovém horizontu tedy není možno zaručit stabilitu dráhy žádné z planet, mění se i dráhy měsíců planet a dokonce i jejich počty.

Podobně je možno numericky předpovídat vlastní rotaci, případně sklon os planet. Výpočty ukazují, že například za dvě miliardy let se vzdálí Měsíc od Země natolik, že nastane rezonance s orbitálními poruchami, Měsíc přestane dostatečně stabilizovat zemskou osu, následkem čehož je možno očekávat změny polohy zemské osy v intervalu  $\pm 60^\circ$ . To bude mít pochopitelně pro planetu nedozírné klimatické důsledky. Numerické modely také vysvětlují vznik a stabilitu planetárních prstenců, diskovitý tvar a vznik spirálních ramen galaxií a další jevy, které není možno objasnit analyticky.

### 8.5.5 Speciální řešení problému tří těles

Roku 1772 zkoumal problém tří těles JOSEPH LOUIS LAGRANGE. Zajímal se o pohyb tří těles  $m_1, m_2$  a  $m_3$ , které by se gravitačně přitahovaly a zároveň by při pohybu neměnily vzájemné vzdálenosti  $r_{12}, r_{23}$  a  $r_{31}$ . Lagrange ukázal, že takový pohyb je možný, ale jen za předpokladu, že všechna tři tělesa leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka, tj. platí

$$r_{12} = r_{23} = r_{31} = a.$$

Všechna tři tělesa pak rotují kolem společného těžiště  $T$  úhlovou rychlostí

$$\omega^2 = \frac{\varkappa(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}.$$

Lagrangeovy výsledky nyní dokážeme. Hmotný bod bude rovnoměrně rotovat, pokud bude v rovnováze přitažlivost od zbývajících těles a odstředivá síla vzhledem k těžišti soustavy. Podmínka silové rovnováhy pro bod  $m_1$  zní

$$\frac{\varkappa m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} - \frac{\varkappa m_3}{r_{31}^3} \mathbf{r}_{31} + \omega^2 \mathbf{r}_1 = 0.$$

Poloha hmotného bodu  $m_1$  vzhledem k těžišti  $T$  je

$$\mathbf{r}_1 = \frac{-m_2 \mathbf{r}_{12} + m_3 \mathbf{r}_{31}}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (8.30)$$

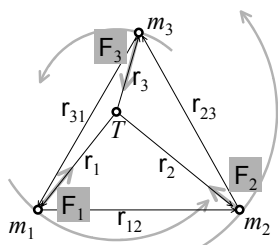


Dostaneme ji pohodlně z definice těžiště vzhledem k bodu  $m_1$ . Po dosazení (8.30) do podmínky pro rovnováhu sil dostaneme po malé úpravě rovnici

$$\left( \frac{\varkappa}{r_{12}^3} - \frac{\omega^2}{m_1 + m_2 + m_3} \right) m_2 \mathbf{r}_{12} = \left( \frac{\varkappa}{r_{31}^3} - \frac{\omega^2}{m_1 + m_2 + m_3} \right) m_3 \mathbf{r}_{31}.$$

Vzhledem k tomu, na každé straně rovnice je vektor jiného směru, je možno rovnici splnit, jen když budou obě závorky rovny nule. Odtud máme  $r_{12} = r_{31}$  (a cyklickou záměnou bychom dostali zbývající relace  $r_{12} = r_{23} = r_{31} = a$ ) a

$$\omega^2 = \frac{\varkappa(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}.$$




---

Tri hmotné body rotující kolem společného těžiště  $T$  udržují vzájemné vzdálenosti, jen pokud tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka.

---

Přitažlivá síla  $F_1$  je rovna odstředivé síle

$$F_1 = m_1 \omega^2 r_1 = m_1 \frac{\varkappa(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3} r_1.$$

Po umocnění (8.30) dostaneme

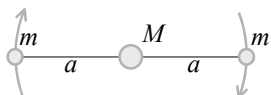
$$r_1 = \frac{\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}}{m_1 + m_2 + m_3} a.$$

Odtud vyjádříme  $a$  a dosadíme do vzorce pro odstředivou sílu a dostaneme

$$F_1 = m_1 \frac{\varkappa(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2 r_1^2}.$$

Hmotný bod  $m_1$  tedy obíhá rovnoměrně kolem společného těžiště, jakoby by toto mělo hmotnost

$$M_1 = \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}.$$




---

Jedna z možných stabilních konfigurací tří těles, které budou stále ležet na jediné přímce.

---

Předtím zkoumal omezený problém tří těles ležících na jediné přímce LEONHARD EULER. Problém vede na algebraické rovnice pátého stupně. Speciálně pro  $m_1 = m_2 = m$  a  $m_3 = M$  bude třetí těleso ležet přesně uprostřed v těžišti soustavy, zatímco první a druhé těleso budou obíhat kolem třetího tělesa ve stejných vzdálenostech  $a$  úhlovou rychlostí

$$\omega^2 = \frac{\kappa(m + 4M)}{4a^3}.$$

### 8.5.6 Orbitální a spin-orbitální rezonance

Všechna tělesa ve sluneční soustavě na sebe navzájem působí a ovlivňují své dráhy. Toto působení je relativně slabé vzhledem ke gravitační síle Slunce, ale protože trvá miliardy let, má viditelné následky. Hlavním výsledkem vzájemného působení jsou rezonance v oběžných dobách a dobách rotace těles.

Například jupiterovy měsíce Io, Europa a Ganymedes jsou v rezonanci 1 : 2 : 4, podobné rezonance se dají najít také u saturnových měsíců Mimas a Tethys 1 : 2 nebo Titan a Hyperion 3 : 4. Neptun a Pluto obíhají kolem Slunce v rezonanci 2 : 3. Planetky ze skupiny Trajánů, Hildy a Thule jsou v rezonanci 1 : 1, 2 : 3 a 3 : 4 s Jupiterem. Naopak většina planetek se vyhýbá poměru 1 : 3 s Jupiterem, proto vzniká v pásu planetek Kirkwoodova mezera, podobná mezera vzniká i pro poměry 2 : 5, 3 : 7 a 1 : 2. Pokud planetka dosáhla některé z výše uvedených rezonancí, byla Jupiterem tak silně ovlivněna, že byla nakonec vychýlena ze své dráhy.

Mezi náhodné a tedy ne úplně přesné rezonance patří dále doby oběhu Venuše a Země v poměru 8 : 13, Jupitera a Saturna 2 : 5, Jupitera a Uranu 1 : 7, Uranu a Neptuna 1 : 2. Jejich dráhové elementy se proto mění periodicky, ovšem jen velmi pomalu, tj. s periodami delšími než tisíc let.

Je dobře známo, že Měsíc k nám obrací stále jednu tvář, jeho siderická oběžná doba a doba rotace jsou tudíž v rezonanci 1 : 1, což je důsledek miliardy let trvajícího slapového působení mezi Zemí a Měsícem. Časem dojde i k srovnání rotace Země a oběhu Měsíce, tj. den a měsíc pak budou trvat stejně dlouho. V případě Pluta a Cháronu již k uzamčení relativního pohybu obou těles došlo, takže oběžná doba kolem společného těžiště i rotační doby obou těles jsou v rezonanci 1 : 1 : 1. Spin-orbitální rezonanci 2 : 3 lze pozorovat také u Merkura, jeden sluneční den (176 dní) tam proto trvá přesně dva sluneční roky (88 dní). Podobně je tomu u Venuše, kde poměr mezi synodickou oběžnou periodou (584 dní) a slunečním dnem (117 dní) dosahuje téměř přesně rezonance 5 : 1, což je zřejmě důsledek slapového působení Země na Venuši. Jeden sluneční rok (225 dní) tedy trvá na Venuši zhruba dva sluneční dny (117 dní).

Existence orbitálních rezonancí dokazuje, že Pýthagorás měl přece jen kus pravdy, když před dva a půl tisícem let hovořil o hudbě sfér. Akordy a rezonance skutečně hrají v životě sluneční soustavy významnou roli.

### 8.5.7 Tlak záření

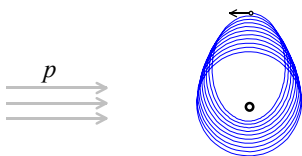
Na každé těleso působí tlak slunečního záření ve směru pryč od Slunce. V okolí Země je tento tlak řádově

$$p = \frac{P_S}{c} \approx 5 \times 10^{-6} \text{ Pa},$$

kde  $P_S$  je solární konstanta a  $c$  je rychlost světla. Tento tlak má pochopitelně tím větší vliv na pohyb částice, čím je tato částice menší. Díky tomuto tlaku vyčistilo Slunce prostor uvnitř sluneční soustavy od prachových částic již záhy po vzniku Slunce. Z podmínky rovnováhy přitažlivých a tlakových sil působících na částici

$$\frac{\kappa M_S}{a^2} m \approx pS$$

je možno spočítat, že částice o rozměru menším než  $r \approx 0.1 \mu\text{m}$  budou vymeteny z prostoru kolem Země. Na větší částice však nemá tlak záření podstatnější vliv. Existuje ale další mechanismus čistící kosmický prostor, a tím je záchyt kosmického prachu planetami. Pokud je prachové zrnko zachyceno planetou, bude se pohybovat po oběžné dráze kolem ní. Ovšem tlak slunečního záření způsobí, že dráha prachového zrnka se bude postupně protahovat ve směru kolmém na sluneční paprsky, až nakonec bude částice zachycena v atmosféře planety, kde jednoduše shoří. Přesný výpočet dráhy prachového zrnka je obtížný, jde o zvláštní případ problému tří těles, ale můžeme si vypomoci počítačem. Numerický výpočet ukazuje průběh dráhy částice při rovnoměrném působení tlaku slunečního záření, které je asi 250 krát slabší než přitažlivé dostředivé zrychlení od planety.




---

Vliv tlaku slunečního záření na původně kruhovou dráhu částice. Dráha se vlivem tlaku protahuje ve směru kolmém na směr tlaku  $p$  záření tak dlouho, až je částice zachycena atmosférou planety, v níž shoří.

---

Pokusíme se odhadnout čas, za který je částice zachycena planetou. Označme periodu oběhu  $T$  a rychlost částice  $v$ . Částice původně obíhá po kruhové dráze o poloměru  $r$ . Tlak záření působí na částici zrychlením  $a \approx pS/m$ . Tlak záření po dobu poloviny oběhu částici urychluje a po druhou polovinu zpomaluje. Tím naroste rozdíl rychlostí na opačných koncích dráhy o  $\Delta v \approx aT$  a excentricita dráhy naroste o

$$\Delta e \approx \Delta v/v \approx aT/v.$$

Dráha částice se tedy stává eliptickou, zvětšuje se její excentricita, ale velká poloosa ani energie její dráhy se nemění. Pokud dosáhne excentricita hodnoty  $e \approx 1$ , bude dráhou natolik protáhlá elipsa, že prachová částice bude nutně zachycena planetou. K tomu dojde za  $1/\Delta e$  oběhů, tedy za čas

$$t \approx \frac{T}{\Delta e} \approx \frac{v}{a} \approx \frac{\rho r v}{p}.$$

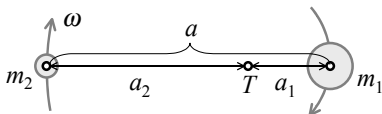
Pro naši prachovou částici  $r \approx 0.1 \mu\text{m}$  vychází doba pobytu na oběžné dráze kolem Země jen asi 10 dní. Dokonce i velká tělesa o velikosti  $r \approx 1 \text{ m}$  budou vymetena z okolí Země za astronomicky krátkou dobu zhruba 100 tisíc let. Sluneční záření je tedy hlavním mechanismem, který čistí prostor kolem Země a jemuž vděčíme za klidný spánek, který neohrožují větší padající meteory.

Tlak záření je zodpovědný také za nádherný nebeský jev, jímž jsou **kometry**. Jádra komet jsou tělesa o velikosti kolem deseti kilometrů. Jsou to jakési neforemné slepence z kamení a ledu a pocházejí z okraje sluneční soustavy. Prakticky jsou jádra komet tvořena materiálem, ze kterého vznikla před pěti miliardami let i naše sluneční soustava. Tento dosud nevyužitý zárodečný materiál tvoří dnes **Oortův oblak**, který má rozměr 100 000 astronomických jednotek. Vnitřní část oblaku o rozměru kolem 3000 astronomických jednotek se nazývá **Cooperův pás**. Z něj se občas vlivem vzájemných gravitačních poruch uvedou některá tělesa na dráhu směřující blíže ke Slunci a stávají se kometami. Když se taková kometa přiblíží ke Slunci, její povrch se zahřeje a uvolní se plyny, vodní páry a prachové částice. Takto vzniklý oblak plynů a prachu pak tlak slunečního záření vyfukuje až do sto miliónů kilometrů dlouhého kometárního ohonu!

Existuje ještě jeden slabší druh záření nazývaný **sluneční vítr**. Jde o korpuskulární záření tvořené především protony, elektrony a částicemi alfa, které jsou vymrštěvány nepravidelně bouřemi ve sluneční koróně. Rychlost proudu částic je řádově 300 km/s a jeho tlak  $10^{-9} \text{ Pa}$ . Tlak tohoto záření může vytvořit druhý ohon komety.

### 8.5.8 Lagrangeovy librační body

Částečný úspěch analýzy problému tří těles je založen na předpokladu, že třetí těleso má zanedbatelnou hmotnost oproti zbývajícím dvěma těžším tělesům, která se tudíž pohybují bez ohledu na pohyb třetího tělesa. Jejich pohyb je určen v prvním přiblížení řešením problému dvou těles. Zbývajícím třetí lehké těleso, to může být měsíc, planetka, kometa nebo umělý satelit, však může konat nejrůznější typ pohybu. Těleso může obíhat po miliardy let kolem planety nebo se může pomalu vzdalovat jako náš Měsíc. Kometa se může nepravidelně vracet ke Slunci, planetka se může dostat do rezonance s Jupiterem anebo může být jednou provždy vymrštěna ven ze sluneční soustavy.




---

Dvě tělesa  $m_1$  a  $m_2$  obíhající kolem společného těžiště  $T$ .

---

Podívejme se na zjednodušený problém tří těles, jehož analýza vede na **Lagrangeovy librační body**. Uvažujme dvě tělesa  $m_1$  a  $m_2$  obíhající kolem společného těžiště po kruhové dráze. To je i v praxi nejběžnější případ. Těmito tělesy mohou být třeba Slunce a Jupiter. Vzdálenost obou těles je  $a$ , od těžiště mají tato tělesa

vzdálenosti

$$a_1 = a \frac{m_2}{m_1 + m_2} = a\mu \quad \text{a} \quad a_2 = a \frac{m_1}{m_1 + m_2} = a(1 - \mu),$$

kde

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.31)$$

je relativní hmotnost menšího z obou těles. Úhlová rychlost otáčení celé soustavy těles je dána třetím Keplerovým zákonem

$$\omega^2 = \frac{\varkappa(m_1 + m_2)}{a^3}.$$

Nyní zkoumejme pohyb třetího malého tělesa  $m_3$  v poli obou těles. Třetí těleso je tak malé, že neruší pohyb těles  $m_1$  a  $m_2$ . Pohybová rovnice pro třetí těleso v soustavě spojené s rotující soustavou obou velkých těles je

$$\mathbf{a} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \omega^2 \mathbf{r} - \frac{\varkappa m_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\varkappa m_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2.$$

První člen představuje Coriolisovo zrychlení, druhý člen odstředivé zrychlení a poslední dva členy gravitační zrychlení od obou velkých těles. Pohybová rovnice třetího tělesa může být zapsána také ve tvaru

$$\mathbf{a} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \nabla\Omega, \quad \text{kde} \quad \Omega = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{\varkappa m_1}{r_1} - \frac{\varkappa m_2}{r_2}$$

představuje efektivní potenciál. Pomocí něj je možno vyjádřit integrál pohybu

$$\frac{1}{2}v^2 + \Omega = C,$$

kde  $C$  je **Jacobiho integrál**. Protože musí být  $v^2 \geq 0$ , je pohyb tělesa omezen jen na oblasti  $\Omega \leq C$ .

Hledejme nyní rovnovážné body, tj. body, v nichž na těleso  $m_3$  nepůsobí žádná síla. Za předpokladu  $a = 0$  a  $v = 0$  dostaneme podmínky pro složky zrychlení

$$a_x = \omega^2 x - \frac{\varkappa m_1}{r_1^3} (x - a_1) - \frac{\varkappa m_2}{r_2^3} (x + a_2) = 0, \quad (8.32)$$

$$a_y = \omega^2 y - \frac{\varkappa m_1}{r_1^3} y - \frac{\varkappa m_2}{r_2^3} y = 0. \quad (8.33)$$

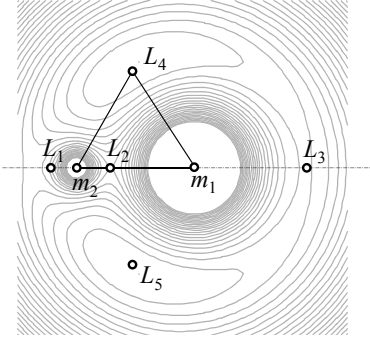
Z rovnice (8.33) máme hned buď  $y = 0$  nebo

$$\omega^2 = \frac{\varkappa m_1}{r_1^3} + \frac{\varkappa m_2}{r_2^3}. \quad (8.34)$$

Řešme nejprve případ  $y \neq 0$ . Pak platí současně (8.32) a (8.34). Obě rovnice je možno splnit současně jen tehdy, když bude

$$r_1 = r_2 = a.$$

Tak dostáváme poslední dva **Lagrangeovy librační body**  $L_4$  a  $L_5$ , které leží ve vrcholech rovnostranných trojúhelníků se základnou  $a$  tvořenou oběma tělesy.




---

Hladiny efektivního potenciálu  $\Omega$  a Lagrangeovy librační body  $L_1$  až  $L_5$  pro  $m_2 = 10m_1$ .

---

Nyní se podívejme na řešení  $y = 0$ . Tato podmínka znamená, že zbývající rovnovážné body leží na ose  $x$ . Najdeme je z rovnice (8.32), kde položíme  $y = 0$ . Odtud také platí  $r_1 = x - a_1$  a  $r_2 = x + a_2$ . Máme tedy rovnici

$$\omega^2 x - \frac{\chi m_1}{|x - a_1|^3} (x - a_1) - \frac{\chi m_2}{|x + a_2|^3} (x + a_2) = 0.$$

Jestliže zde zavedeme bezrozměrný parametr  $\mu$  podle (8.31), dostaneme pro  $\varepsilon = x/a$  rovnici třetího stupně

$$\varepsilon = (1 - \mu) \frac{\varepsilon - 1 + \mu}{|\varepsilon - 1 + \mu|^3} + \mu \frac{\varepsilon + \mu}{|\varepsilon + \mu|^3},$$

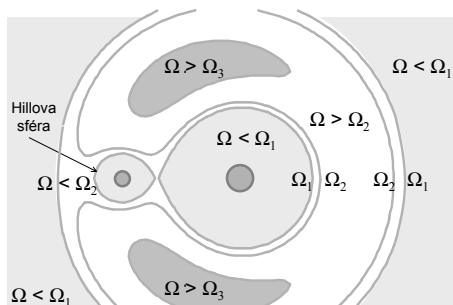
kteřá má tři kořeny odpovídající dalším třem libračním bodům  $L_1$ ,  $L_2$  a  $L_3$ . Bod  $L_1$  přitom leží za  $m_2$ ,  $L_2$  mezi  $m_1$  a  $m_2$  a  $L_3$  za  $m_1$ . Jestliže se omezíme na případ, kdy je první těleso mnohem těžší než druhé těleso, a platí tedy předpoklad  $\mu \ll 1$ , pak přibližná řešení je možno vyjádřit ve tvaru

$$\varepsilon_1 \approx -1 + \mu - (\mu/3)^{1/3}, \quad \varepsilon_2 \approx -1 + \mu + (\mu/3)^{1/3} \quad \text{a} \quad \varepsilon_3 \approx 1 + 5\mu/12.$$

Všimněte si, že body  $L_1$  a  $L_2$  leží souměrně kolem menšího tělesa  $m_2$  ve vzdálenosti

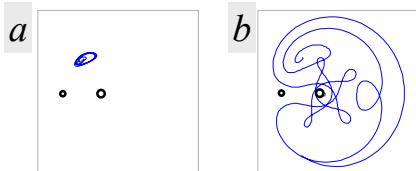
$$r_H = a \left( \frac{\mu}{3} \right)^{1/3},$$

kteřá představuje poloměr **Hillovy sféry**. Třetí těleso, které se nachází uvnitř sféry přitažlivosti (GEORGE WILLIAM HILL 1877), je poutáno gravitačními silami menšího tělesa  $m_2$ . Pokud se těleso dostane ven z Hillovy sféry, bude přitaheno silnějším tělesem  $m_1$ . Konečně bod  $L_3$  leží napravo od většího tělesa ve vzdálenosti  $a(1 - 7\mu/12)$ .



Hilova sféra  $\Omega < \Omega_1$  u menšího z obou těles a oblasti volného pohybu  $\Omega < \Omega_k$  vymezené potenciály  $\Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3$ .

Nalezli jsme tedy pět libračních bodů, pouze dva z nich  $L_4$  a  $L_5$  jsou však stabilní, a to ještě jen pro  $\mu < 0.0385$ . Ve sluneční soustavě je tato podmínka bezpečně splněna pro všechny planety včetně Jupitera. Zbývající librační body  $L_1, L_2$  a  $L_3$  odpovídají sedlovým bodům efektivního potenciálu a žádné těleso se v nich neudrží.



Příklad stabilní polohy (a) tělesa v libračním bodě  $L_4$  pro poměr hmotností 1 : 30 a nestabilní polohy (b) pro poměr hmotností 1 : 20.

V místech odpovídajících stabilním libračním bodům  $L_4$  a  $L_5$  se pro soustavu Slunce – Jupiter skutečně nacházejí shluky planetek *Řeků* a *Trojánů*, které obíhají kolem Slunce se stejnou periodou jako Jupiter. Své názvy dostaly shluky planetek podle toho, že se nacházejí na stejné oběžné dráze a přesto se k sobě nikdy nepřiblíží. Jakoby je poutalo podobné věčné nepřátelství, které trápilo antické Řeky a obyvatele Tróje.

Librační body objevil roku 1772 JOSEPH-LOUIS LAGRANGE při studiu problému tří těles.

**Příklad 8.24** Určete poloměr Hilovy sféry Země, tj. vzdálenost, ve které jsou tělesa poutána gravitací Země.

**Řešení:** Poloměr Hilovy sféry je dán vzorcem  $r_H = a(\mu/3)^{1/3}$ , kde  $a \approx 1$  AU je vzdálenost Slunce a  $\mu = M_Z/M_S \approx 3.0 \times 10^{-6}$  je poměr hmotnosti Země a Slunce. Po dosazení dostaneme  $r_H \approx 0.01$  AU, sféra zemské přitažlivosti tedy sahá asi do jedné setiny vzdálenosti Slunce nebo do čtyřnásobku vzdálenosti Měsíce od Země. Tělesa za touto hranicí již není možno považovat za družice Země.

## 8.6 Gravitace rotačního elipsoidu

### 8.6.1 Rotace kosmických těles

Každé kosmické těleso rotuje kolem své osy, odtud vzniká přirozeně otázka, zda existuje nějaké omezení na velikost rychlosti rotace? Odpověď zní ano, existuje.

Mezní úhlovou rychlost rotace nebeského tělesa dostaneme jako důsledek rovnováhy gravitačního přitahování a odstředivých sil na povrchu tělesa. Při rotaci tělesa musí být na povrchu tělesa odstředivé zrychlení  $a_O = \omega^2 R$  menší než gravitační zrychlení  $a_G = \varkappa M/R^2$ , v opačném případě se těleso rozletí na kusy. Platí tedy  $\omega \leq \omega_{\max}$ , kde maximální rychlost rotace je dána vzorcem

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R^3}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \varkappa \rho.$$

Rychlost maximální rotace závisí jen na průměrné hustotě tělesa a ne na jeho velikosti. Pro nejmenší možnou periodu rotace  $T_{\min}$  dostaneme výraz

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\varkappa \rho}}.$$

Odtud pro těleso o hustotě  $\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$  (voda, běžná hvězda) je  $T_{\min} \approx 200$  minut. Pro Zemi  $\rho \approx 5500 \text{ kg/m}^3$  je  $T_{\min} \approx 84$  minut.

Roku 1967 pozorovali astronomové ANTONY HEWISH a JOCELYN BELL pravidelné rádiové záblesky, které se opakovaly s periodou menší než jedna tisícina sekundy. Zdroje záblesků nazvali **pulsary**. Později byly nalezeny stovky podobných těles, především v rovině Mléčné dráhy. Hewish a Bell dedukovali správně, že pravidelnost rádiových pulsů je způsobena rotací tělesa. Podle výše odvozených vzorců však těmto periodám  $T \approx 10^{-3} \text{ s}$  odpovídá neuvěřitelná hustota

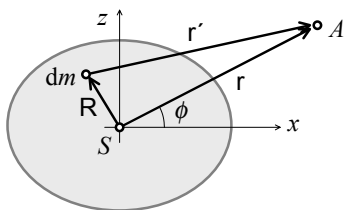
$$\rho > \frac{3\pi}{\varkappa T^2} \approx 10^{17} \text{ kg/m}^3.$$

Z toho je zřejmé, že tyto hvězdy nemohou být obyčejnými hvězdami, ale musí být složeny z mimořádně hustého materiálu. Jediná forma látky, která by mohla dosahovat této hustoty a přitom ještě zářit, je **neutronová hvězda**. Neutronová hvězda je závěrečné stádium ve vývoji velké hvězdy, která již spotřebovala své jaderné palivo a v důsledku své vlastní gravitace zkolabovala do malé koule o velikosti několika kilometrů. Elektronové obaly atomů byly obrovským tlakem *vmáčknuty* do atomových jader. Protony a elektrony se přeměnily na neutrony a celá hvězda se proměnila v jediné gigantické atomové jádro.

### 8.6.2 Gravitační pole rotačního elipsoidu

Většina nebeských těles rotuje kolem vlastní osy, a má proto tvar mírně zploštělého rotačního elipsoidu. Taková tělesa nemají sféricky symetrický tvar a ani jejich gravitační pole není sféricky symetrické. Čím rychleji bude těleso rotovat a čím více bude zdeformované, tím více se jeho gravitační pole bude odlišovat od gravitačního pole hmotného bodu. Znalost odchylky gravitačního pole od symetrického pole hmotného bodu je pro mnoho aplikací velmi důležitá. Spočteme nyní gravitační pole kolem rotačního elipsoidu.






---

 Ilustrace k výpočtu gravitačního pole rotačního elipsoidu v bodě  $A$ .
 

---

Hledáme tedy gravitační potenciál v určitém bodě  $A$  daleko od rotačního elipsoidu. Poloha bodu je určena jeho polohovým vektorem  $\mathbf{r} = \overline{SA}$ , kde bod  $S$  je střed elipsoidu a zároveň počátek souřadné soustavy  $xyz$ . Polohu obecného elementu  $dm$  tělesa označme vektorem  $\mathbf{R}$ . Gravitační potenciál v bodě  $A$  se spočte podle vzorce

$$\chi = -\varkappa \int \frac{dm}{r'},$$

kde

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R} \quad \text{a} \quad r' = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} + R^2}.$$

Za předpokladu, že bod  $A$  je daleko od tělesa, platí  $R \ll r$ . V tom případě můžeme výraz  $1/r'$  rozvinout v řadu podle  $R/r$

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^2}{r^4} + \dots \right).$$

Po dosazení tohoto rozvoje do integrálu dostaneme

$$\chi \approx -\varkappa \frac{M}{r} \left( 1 - \frac{\int R^2 dm}{2Mr^2} + \frac{3 \int (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^2 dm}{2Mr^4} + \dots \right),$$

kde  $M = \int dm$  je hmotnost celého elipsoidu. Druhý člen v rozvoji vypadl, protože jsme vhodně zvolili počátek souřadné soustavy splývající s těžištěm elipsoidu. V tom případě je totiž  $\int \mathbf{R} dm = \mathbf{0}$ . Zbylé integrály můžeme vyjádřit pomocí momentů setrvačnosti. Zvolíme-li dále osu  $z$  za rotační osu elipsoidu, pak polární moment setrvačnosti je definován předpisem

$$J_p = \int (X^2 + Y^2) dm,$$

zatímco rovníkový moment setrvačnosti je roven

$$J_e = \int (X^2 + Z^2) dm = \int (Y^2 + Z^2) dm.$$

Jejich rozdíl je tedy roven

$$\Delta J = J_p - J_e = \int (X^2 - Z^2) dm.$$

Zvolíme-li dále bod  $A$  tak, že jeho vektor bude ležet v rovině  $xz$  a bude svírat s osou  $x$  úhel  $\phi$ , pak pro jeho souřadnice platí

$$x = r \cos \phi, \quad y = 0 \quad \text{a} \quad z = r \sin \phi.$$

První integrál v rozvoji gravitačního potenciálu je roven

$$\int R^2 dm = \int (X^2 + Y^2 + Z^2) dm = \frac{3}{2} J_p - \Delta J$$

a druhý integrál je roven

$$\int (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^2 dm = r^2 \int (X^2 \cos^2 \phi + Z^2 \sin^2 \phi) dm = r^2 \left( \frac{1}{2} J_p - \Delta J \sin^2 \phi \right).$$

Výsledný potenciál gravitačního pole rotačního elipsoidu je tedy dán rozvojem, jehož první členy jsou

$$\chi \approx -\varkappa \frac{M}{r} + \frac{1}{2} \varkappa \frac{\Delta J}{r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) + \dots,$$

neboli

$$\chi \approx -\varkappa \frac{M}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} I_2 \frac{R_e^2}{r^2} (3 \sin^2 \phi - 1) + \dots \right],$$

kde jsme zavedli bezrozměrný parametr

$$I_2 = \frac{\Delta J}{M R_e^2}$$

a rovníkový poloměr tělesa  $R_e$ . Uvedený rozvoj představuje **kvadrupólovou aproximaci** gravitačního potenciálu rotačního elipsoidu. Pro sféricky symetrické těleso je  $\Delta J = 0$ , a proto

$$\chi = -\varkappa \frac{M}{r}.$$

Gravitační pole symetrické koule je tedy stejné, jako gravitační pole hmotného bodu, který se nachází ve středu koule. Pro sféricky nesymetrické těleso  $\Delta J \neq 0$  je potenciál obecně anizotropní a závisí nejen na vzdálenosti, ale i na směru od rotační osy tělesa. Pro rotační elipsoid zploštělý na pólech je  $\Delta J > 0$ , a proto je jeho gravitační potenciál ve směru rotační osy větší než ve směru rovníku. Anizotropie gravitačního pole je řádu  $\Delta J / M r^2$ , ve velkých vzdálenostech od tělesa proto anizotropie gravitačního pole rychle klesá. Daleko od tělesa je možno gravitační pole každého tělesa aproximovat gravitačním polem hmotného bodu, v blízkém okolí tělesa však asymetrii tělesa ignorovat nelze.

### 8.6.3 Precese planety

Nebeská tělesa jsou mírně deformována odstředivými silami a mají tvar zploštělého rotačního elipsoidu. Zploštění těles způsobuje, že působení mezi tělesy není centrální. To se obecně projeví jak poruchami drah planet, tak i pohybem rotační osy planety. Rovnoměrnému pohybu rotační osy planety říkáme **precese**. Je způsobena především Sluncem a velkými satelity planety. U Země je vliv Slunce i Měsíce srovnatelný, hovoříme pak o **lunisolární precesi**. Nyní si odvodíme velikost precese rotační osy planety.

Uvažujme planetu o hmotnosti  $M$ , která rotuje kolem své vlastní osy  $z$  úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Její moment hybnosti je tudíž roven

$$L = J_p \Omega,$$

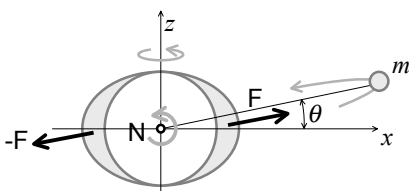
kde  $J_p$  označuje polární moment setrvačnosti planety. Kolem planety necht' obíhá malý satelit o hmotnosti  $m$  po kruhové dráze o poloměru  $r$  skloněné k rovníku planety o úhel  $\theta$ .

Z teorie pohybu setrvačnicku je známo, že precesi způsobuje stálý otáčivý silový moment  $\mathbf{N}$ , který je kolmý na osu rotace. Ten způsobí, že vektor momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  setrvačnicku se začne pomalu otáčet kolem precesní osy, a to stálou úhlovou rychlostí  $\Omega_P$ . Z pohybové rovnice setrvačnicku konajícího regulární precesi dostáváme

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt} \mathbf{L} \approx \Omega_P \times \mathbf{L},$$

a odtud máme pro rychlost precese vzorec

$$\Omega_P = \frac{N}{L \sin \theta}.$$




---

Satelit o hmotnosti  $m$  působí na planetu nenulovým otáčivým silovým momentem  $\mathbf{N}$  a snaží se sklopit její osu rotace  $z$  do směru osy své orbitální roviny.

---

Satelit působí na planetu nenulovým otáčivým momentem, který je důsledkem zploštění planety. Z definice otáčivého momentu vzhledem ke středu planety je

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{R} \times d\mathbf{F} = \int \mathbf{R} \times \kappa m \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} dM = \int \kappa m \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} dM,$$

kde vektor  $\mathbf{r} = (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi, r \cos \phi \sin \theta)$  představuje průvodič satelitu a vektor  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  průvodič elementu  $dM$  planety. Pokud je satelit dostatečně daleko od planety, můžeme jmenovatel aproximovat výrazem

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \approx \frac{1}{r^3} \left( 1 + 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{r^2} + \dots \right).$$

Protože je precese obvykle pomalá, nemusíme počítat silový moment v každý okamžik, ale stačí jej zprůměrovat přes celý jeden oběh satelitu kolem planety. Pro průměrnou hodnotu silového momentu vystředovanou rovnoměrně přes úhel  $\phi$  dostaneme výsledek

$$\bar{N}_x = 0, \quad \bar{N}_y = -\frac{3\mathcal{M}m}{2r^3} \sin \theta \cos \theta \int (X^2 - Z^2) dM, \quad \bar{N}_z = 0.$$

Jedinou nenulovou složkou otáčivého momentu je složka  $\bar{N}_y$ , otáčivý moment má tedy směr osy  $y$ , což je směr uzlové přímky. Otáčivý silový moment satelitu má tendenci pohnout osou rotace planety tak, aby momenty hybnosti satelitu a planety splynuly. Pro velikost tohoto momentu tedy vychází

$$N = -\frac{3\mathcal{M}m\Delta J}{2r^3} \sin \theta \cos \theta, \quad (8.35)$$

a ten způsobuje precesi

$$\Omega_P = \frac{N}{L \sin \theta} = -\frac{3\mathcal{M}m \Delta J}{2\Omega r^3 J_p} \cos \theta.$$

#### 8.6.4 Lunisolární precese

Země má svůj přirozený satelit, Měsíc, který má na precesi Země rozhodující vliv. Protože pro Zemi je poměr  $\Delta J/J_p \approx 0.00327$ , je rychlost precese způsobená naším Měsícem asi  $\Omega_P \approx 36''/\text{rok}$ . Podobně jako Měsíc působí na zemskou osu i Slunce. Přestože je mnohem větší než Měsíc, je zároveň mnohem dále než Měsíc, takže vliv Slunce na zemskou precesi je zhruba poloviční  $\Omega_P \approx 14''/\text{rok}$ . Oba vlivy se sčítají, takže rychlost lunisolární precese pozorovaná astronomy činí  $\Omega_P \approx 50.3''/\text{rok}$ . Zemská osa tedy vykoná jednu otočku kolem pólu ekliptiky asi za  $T = 2\pi/\Omega_P \approx 25\,770$  let. Tato perioda se nazývá **Platónský rok**. Za tuto dobu se zemská osa vrátí zpět k Polárce, kde se shodou okolností nachází právě nyní. Amplituda precesního pohybu je zhruba rovna sklonu ekliptiky, tj.  $\varepsilon \approx 23.5^\circ$ .

**Precesi** zemské osy objevil roku 140 př. n. l. HIPPARCHOS Z NIKÁIE. Ten si totiž všiml, že polohy všech hvězd se liší od poloh určených o 150 let dříve TIMOCHARISEM ALEXANDRIJSKÝM. Rozdíl činil asi  $2^\circ$  ve směru ekliptikální délky. Z toho Hipparchos správně usoudil, že **jarní bod**, tj. průsečík nebeského rovníku s ekliptikou, se po ekliptice pomalu posouvá směrem na západ. Za časů Hipparcha se jarní bod nacházel v souhvězdí Skopce, dnes se nachází v souhvězdí Ryb a během asi 100 let se dostane do souhvězdí Vodnáře. Posuv jarního bodu je přímým důsledkem precese zemské osy. Dnes směřuje zemská osa velmi přesně k Polárce, ale za 13 tisíc let od ní bude vzdálena o  $47^\circ$ ! Přehlížení precese zemské osy způsobuje rozdíl mezi astrologickým a astronomickým určením polohy Slunce. Podle astrologů vstupuje Slunce do znamení Skopce 21. března, ve skutečnosti je Slunce toho dne v jarním bodě a ten se dnes nachází na začátku souhvězdí Ryb.

Zemská osa vykonává vedle precese ještě jeden menší a rychlejší pohyb nazývaný **nutace**. Nutace má amplitudu  $9.2''$  a periodu 18.6 let. Nutace je způsobena pohybem roviny oběžné dráhy Měsíce, která má rovněž periodu 18.6 let. Nutaci objevil v 18. století JAMES BRADLEY.

### 8.6.5 Stáčení uzlové přímky

Nejen satelit ovlivňuje pohyb planety, ale i naopak planeta ovlivňuje pohyb svého satelitu. Způsobuje nejen precesi osy satelitu, ale ruší i jeho oběžnou dráhu. Například způsobuje malý pohyb roviny jeho oběžné dráhy. Tento pohyb se nazývá **stáčení uzlové přímky**. Uzlová přímka je spojnice vzestupného a sestupného uzlu dráhy neboli průnik roviny oběžné dráhy a referenční roviny, tj. ekliptiky. Na velkou poloosu, excentricitu ani sklon dráhy však nemá zploštění planety podstatnější vliv.

Rychlost stáčení uzlové přímky dostaneme podobnými úvahami jako precesi. Především, stáčení uzlové přímky je relativně pomalé, můžeme proto opět zprůměrovat polohu satelitu přes celou jednu periodu. Satelit se tak rozprostře rovnoměrně po celé oběžné dráze a vytvoří prstenec délky  $2\pi r$ . Momenty setrvačnosti prstence jsou  $J_p = mr^2$  a  $J_e = \frac{1}{2}mr^2$ , takže  $\Delta J = \frac{1}{2}mr^2$ . Moment hybnosti prstence je roven  $L \approx mr^2 n$ , kde  $n = \sqrt{\kappa M/r^3}$  představuje střední pohyb satelitu kolem planety. Silový otáčivý moment, jímž působí planeta na satelit, už známe, je určen vzorcem (8.35). Když sem dosadíme hodnoty odpovídající rozprostřenému satelitu, dostaneme pro rychlost stáčení uzlové přímky satelitu vzorec

$$\Omega_P = \frac{N}{L \sin \theta} = -\frac{3nI_2}{2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \cos \theta, \quad (8.36)$$

kde jsme opět zavedli bezrozměrný koeficient anizotropie gravitačního pole planety  $I_2 = \Delta J/MR_e^2$ . Stáčení bude významné především pro blízké satelity, jakými jsou například umělé družice Země. Pro ně vychází rychlost stáčení uzlové přímky až  $10^\circ$  za den. Jak plyne z měření precese drah umělých satelitů Země, je pro Země

$$I_2 \approx 0.001083 \quad \text{a} \quad J_p \approx 0.332M_Z R_e^2.$$

Na pohyb uzlu měsíční dráhy však má Země jen nepatrný vliv, způsobí jen asi  $\Omega_P \approx 7''$  za rok. Přesto se uzel Měsíce pohybuje s rychlostí asi  $\Omega_P \approx 19^\circ$  za rok, tj. s periodou 18.6 let. Tento pohyb je však způsoben vlivem Slunce. Vliv Slunce můžeme odhadnout také podle vzorce (8.35), kde ovšem musíme dosadit za  $m$  hmotnost Slunce  $M_S$ , za  $r$  vzdálenost Slunce  $r_S$  a za  $\Delta J$  anizotropii rozprostřeného Měsíce  $\Delta J = \frac{1}{2}mr^2$ . Tak dostaneme výsledek

$$\Omega_P = \frac{N_S}{L \sin \theta} = -\frac{3n_S^2}{4n} \cos \theta,$$

kde  $n_S = \sqrt{\kappa M_S/r_S^3}$  je střední pohyb Slunce.

V důsledku slapových sil na sebe navíc planeta a satelit působí obvykle tak, že satelit je postupně urychlován a tím se postupně vzdaluje od své mateřské planety. Naopak planeta svoji rotaci zpomaluje tak, aby byl zachován součet jejich momentů hybností. Například náš Měsíc se vzdaluje každým rokem od Země asi o 35 mm a Země zpomaluje svoji rotaci, takže jeden den dnes trvá asi o 16 sekund déle, než trval před jedním miliónem let. Slapové síly mají tendenci rychlosti obou rotací vyrovnat, aby nakonec Země a Měsíc měly k sobě přivráceny stále stejné tváře.

Dříve, než k tomu dojde, však Měsíc unikne ze sféry přitažlivosti Země. Celý děj bude trvat několik desítek miliard let. Do té doby se můžeme na noční obloze kochat popelavým svitem pomalu se vzdalujícího Měsíce. Pokud satelit obíhá tak nízko nad povrchem planety, že oběhne planetu rychleji než se tato otočí kolem své osy, bude satelit slapovými silami naopak brzděn a přitahován k planetě. To je i případ malého měsíce *Phobosu*, který nyní obíhá ve výšce kolem 5800 km nad povrchem Marsu, ale asi za sto miliónů let bude přitážen slapovými silami, takže dopadne na povrch planety.

### 8.6.6 Stáčení pericentra satelitu

Zploštění planety má vliv i na stáčení pericentra neboli přímky apsid oběžné dráhy jejího satelitu. Přímka apsid je spojnice pericentra a apocentra oběžné dráhy satelitu. Pro rychlost stáčení pericentra málo výstředné dráhy satelitu je možno odvodit vzorec

$$\omega_P = \frac{3nI_2}{4} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \theta - 1),$$

kde  $\theta$  je sklon dráhy satelitu vzhledem k rovníku planety,  $r$  vzdálenost satelitu a  $n$  jeho střední pohyb. Dále  $R_e$  je rovníkový poloměr planety a  $I_2$  její parametr výstřednosti. Pohyb pericentra umělých družic Země může činit až  $20^\circ$  za den. Podle sklonu oběžné dráhy může mít dopředný i zpětný směr. Všimněte si, že stáčení pericentra vymizí pro sklon  $\cos^2 \theta = 1/5$ , tedy pro úhel sklonu dráhy  $\theta \approx 63^\circ 26'$ . Toho se využívá u těch umělých satelitů Země, u nichž si nepřejeme, aby docházelo ke stáčení jejich pericentra.

Pokud bychom provedli obdobné výpočty pro eliptické dráhy, dostali bychom obecnější vzorec

$$\Omega_P = -\frac{3nI_2}{2} \left( \frac{R_e}{p} \right)^2 \cos \theta \quad \text{a} \quad \omega_P = \frac{3nI_2}{4} \left( \frac{R_e}{p} \right)^2 (5 \cos^2 \theta - 1),$$

kde  $p = a(1 - e^2)$  je parametr elipsy a  $n = \sqrt{\kappa M/a^3}$  střední pohyb satelitu.

### 8.6.7 Stáčení perihélia Merkuru

Nejen pohyb satelitů, ale také pohyb planet je rušen, a proto neplatí Keplerovy zákony přesně. Planety se navzájem ovlivňují a tyto malé poruchy způsobují pomalé změny elementů jejich drah. Astronomové například zjistili, že perihélium všech planet se vlivem vzájemných poruch stáčí. Vliv dalších planet na pohyb perihélia zkoumané planety je zhruba popsán vzorcem

$$\omega_P \approx -\sum_k \frac{3n_k^2 m_k}{4n M_S},$$

kde sčítáme přes jednotlivé rušící planety.

Například stáčení perihélia Merkuru činí  $574''$  za sto let. Pomocí poruchové teorie je možno vysvětlit stáčení perihélia Merkuru o velikosti asi  $531''$  působením ostatních planet, především Jupitera a Venuše. To ukázal již roku 1859 **URBAIN-JEAN-JOSEPH LE VERRIER**. Zbytek, tj. stáčení o velikosti  $43''$ , však Newtonova teorie gravitace vysvětlit nedokáže. Je totiž způsobeno relativistickou korekcí gravitačního zákona. Albert Einstein ukázal roku 1915, že toto podivné chování Merkura je možno přirozeně vysvětlit pomocí jeho obecné teorie relativity. Podle ní je stáčení perihélia oběžné dráhy planety způsobeno zakřivením prostoročasu v okolí Slunce a je rovno

$$\omega_P = 3n \frac{\varkappa M_S}{pc^2},$$

kde  $p = a(1 - e^2)$  je parametr elipsy a  $n$  je střední pohyb planety. Pro Merkur odtud vychází relativistický posun perihélia  $42.98''$  za sto let.

### 8.6.8 Tvar Země, Clairautův sféroid

Chceme-li popsat tíhové pole na zemském povrchu, musíme započítat rotaci planety. To lze udělat jednoduše tak, že přidáme potenciál odstředivých sil

$$\chi_O = - \int_0^r a_O dr = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \cos^2 \phi.$$

Protože se pohybujeme na povrchu Země, značí zde  $\phi$  zeměpisnou šířku a  $r$  vzdálenost bodu od středu Země. Výsledný potenciál je roven

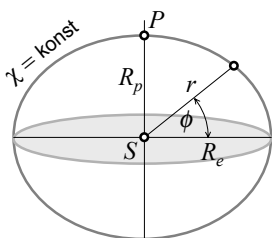
$$\chi = \chi_G + \chi_O = -\varkappa \frac{M}{r} + \frac{1}{2}\varkappa \frac{\Delta J}{r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \cos^2 \phi. \quad (8.37)$$

Po zavedení bezrozměrných parametrů

$$\alpha = \frac{\Omega^2 R_e^3}{\varkappa M} \approx 0.0035 \quad \text{a} \quad I_2 = \frac{\Delta J}{MR_e^2} \approx 0.0011,$$

kde  $R_e$  je rovníkový poloměr Země, dostaneme jiné vyjádření

$$\chi = -\varkappa \frac{M}{r} \left[ 1 - I_2 + \left( \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}I_2 \right) \cos^2 \phi \right].$$




---

Země rotuje kolem své osy  $SP$ , tvar zemského glóbu je přibližně rotační elipsoid s rovníkovým poloměrem  $R_e$  a polárním poloměrem  $R_p$ .

---

Kdyby Země byla dokonale tuhá, zachovala by si sférický tvar i při rotaci, a pak by bylo  $I_2 = 0$ . Ve skutečnosti však víme, že Země je zploštělá, což svědčí o její tekutosti. Pokud připustíme, že Země je dokonale tekutá stejně jako kapalina, pak musí tvar Země odpovídat ekvipotenciální hladině stejného tíhového potenciálu  $\chi = \text{konst.}$  Takto definovaný povrch Země představuje **sféroid**. Pokud skutečný gravitační potenciál nahradíme kvadrupólovým rozvojem, pak takto definovaná plocha představuje **Clairautův sféroid**. Jde o první teoretický model tvaru Země pojmenovaný podle ALEXIS CLAUDE CLAIRAUTA, který jej zkoumal roku 1743.

Zvolíme-li potenciál na rovníku

$$\chi_e = -\varkappa \frac{M}{R_e} \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}I_2 \right)$$

za referenční potenciál, pak pro tvar Země dostaneme podmínku  $\chi(r) = \chi_e$ , neboli

$$-\varkappa \frac{M}{r} \left[ 1 - I_2 + \left( \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}I_2 \right) \cos^2 \phi \right] = -\varkappa \frac{M}{R_e} \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}I_2 \right).$$

Odtud je možno ukázat, že Clairautův sféroid je plocha šestého stupně a že to tedy není elipsoid. Pokud se omezíme na první aproximaci, pak pro tvar Země odtud dostaneme výraz

$$r = R_e (1 - \varepsilon \sin^2 \phi). \quad (8.38)$$

Veličina

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}I_2$$

představuje **geometrické zploštění** zemského glóbu  $\varepsilon = (R_e - R_p)/R_e$ . Protože zploštění Země můžeme měřit astronomickými metodami  $\varepsilon \approx 1/298 \approx 0.0034$  a rychlost rotace Země  $\alpha \approx 0.0035$  známe, dostaneme odtud pro parametr výstřednosti hodnotu

$$I_2 = \frac{2\varepsilon - \alpha}{3} \approx 0.0011. \quad (8.39)$$

Tento údaj vypovídá o nehomogenním rozložení hmoty uvnitř Země. Za předpokladu, že Země má tvar rotačního elipsoidu, spočteme snadno momenty setrvačnosti Země. Pro homogenní elipsoid platí

$$J_x = \frac{M}{5} (b^2 + c^2), \quad J_y = \frac{M}{5} (a^2 + c^2) \quad \text{a} \quad J_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2)$$

a pro Zemi odtud dostaneme

$$J_p = \frac{2}{5} M R_e^2, \quad J_e = \frac{M}{5} (R_e^2 + R_p^2).$$



Rozdíl obou momentů setrvačnosti je tudíž

$$\Delta J = J_p - J_e = \frac{M}{5} (R_e^2 - R_p^2) \approx \frac{2}{5} MR_e^2 \frac{R_e - R_p}{R_e} \approx J_p \varepsilon. \quad (8.40)$$

Protože vzorec platí přibližně i pro nehomogenní elipsoidy, dostaneme z definice  $I_2$  skutečný moment setrvačnosti Země

$$J_p \approx \frac{\Delta J}{\varepsilon} \approx \frac{MR_e^2 I_2}{\varepsilon} \approx \frac{1}{3} \left( 2 - \frac{\alpha}{\varepsilon} \right) MR_e^2.$$

Po dosazení naměřených hodnot za  $\alpha$  a  $\varepsilon$  dostaneme  $J_p \approx \frac{1}{3} MR_e^2$ , zatímco pro homogenní kouli by bylo  $J = \frac{2}{5} MR_e^2$  a  $\varepsilon \approx \frac{5}{4} \alpha \approx 1/230$ . Odtud vidíme, že hmota musí být v Zemi rozložena nehomogenně a že větší hustota hmoty musí být ve středu Země než u jejího povrchu. Stejný závěr plyne samozřejmě i z faktu, že průměrná hustota Země je větší než hustota hornin v zemské kůře. Za předpokladu lineárního nárůstu hustoty s hloubkou vyjde, že hustota uprostřed Země je asi pětikrát vyšší než na povrchu a průměrná hustota Země je asi dvakrát vyšší než na povrchu. Podrobněji se tomuto problému věnuje příklad na konci kapitoly. Nehomogenita Země se dá přirozeně vysvětlit tekutostí zemského jádra a miliardy let trvající sedimentací těžších složek z roztaveného pláště do nitra planety.

Gravitační zrychlení na povrchu Země, tj. na Clairautově sféroidu (8.38), najdeme derivací potenciálu (8.37)

$$\mathbf{g} = -\nabla\chi = -\left( \frac{\partial\chi}{\partial r}, \frac{\partial\chi}{r\partial\phi} \right).$$

Protože odklon gravitačního pole od radiálního směru je malý, postačí aproximace

$$g \approx \frac{\partial\chi}{\partial r} \approx \kappa \frac{M}{r^2} - \frac{3}{2} \kappa \frac{\Delta J}{r^4} (3 \sin^2 \phi - 1) - \Omega^2 r \cos^2 \phi.$$

Když sem dosadíme za  $r$  podle (8.38), dostaneme po úpravě výsledek

$$g = g_e (1 + \gamma \sin^2 \phi),$$

kde

$$\gamma = 2\alpha - \frac{3}{2} I_2 \approx 0.0051$$

je **gravitační zploštění**. Pokud sem dosadíme za  $I_2$  podle (8.39), dostaneme vztah mezi měřitelnými parametry  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  a  $\gamma$

$$\gamma + \varepsilon = \frac{5}{2} \alpha,$$

který je znám jako **Clairautova věta**. Tíhové zrychlení na rovníku  $\phi = 0^\circ$  je tedy rovno

$$g_e = \kappa \frac{M}{R_e^2} \left( 1 - \alpha + \frac{3}{2} I_2 \right) \approx 9.78 \text{ m/s}^2$$

a na pólu  $\phi = 90^\circ$

$$g_p = \kappa \frac{M}{R_e^2} (1 + \alpha) \approx 9.83 \text{ m/s}^2.$$

**Příklad 8.25** Za předpokladu, že hustota klesá lineárně se vzdáleností od středu Země, najdete hustotu uprostřed Země. Využijte známé průměrné hustoty Země  $\bar{\rho} \approx 5500 \text{ kg/m}^3$  a faktu plynoucího z pozorovaného zploštění Země, že moment setrvačnosti Země je  $J \approx \frac{1}{3}mR^2$ , kde  $R$  je poloměr Země a  $m$  její hmotnost.

**Řešení:** Předpokládejme, že hustota Země je dána lineárním předpisem

$$\rho = \rho_0 - \Delta\rho \frac{r}{R}.$$

Pak celková hmotnost Země je

$$M = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \left( \rho_0 - \frac{3}{4}\Delta\rho \right) V$$

a její moment setrvačnosti

$$J = \int_0^R \rho \frac{2}{3} r^2 4\pi r^2 dr = \frac{2}{5} \left( \rho_0 - \frac{5}{6}\Delta\rho \right) V.$$

Zde jsme využili skutečnosti, že moment setrvačnosti kulové slupky je  $J = 2mr^2/3$  a integrovali jsme jen přes tyto slupky. Odtud vyloučením objemu  $V$  dostaneme

$$J = \frac{2}{5} MR^2 \frac{\rho_0 - \frac{5}{6}\Delta\rho}{\rho_0 - \frac{3}{4}\Delta\rho}.$$

Zároveň však víme, že

$$J \approx \frac{1}{3} MR^2,$$

porovnáním obou vzorců najdeme

$$\Delta\rho \approx \frac{4}{5}\rho_0.$$

A konečně, protože

$$\bar{\rho} = \rho_0 - \frac{3}{4}\Delta\rho \approx \frac{2}{5}\rho_0 \quad \text{a} \quad \rho_R = \rho_0 - \Delta\rho \approx \frac{1}{5}\rho_0,$$

dostaneme odtud numerické hodnoty

$$\rho_0 \approx \frac{5}{2}\bar{\rho} \approx 13750 \text{ kg/m}^3 \quad \text{a} \quad \rho_R \approx \frac{1}{2}\bar{\rho} \approx 2750 \text{ kg/m}^3.$$

Hustota uprostřed Země je tedy zhruba stejná jako hustota rtuti. Proto se v geofyzice předpokládá, že jádro obsahuje především stlačené kovy jako železo a nikl. Zemská kůra je naopak tvořena křemičitany, granitem, žulou a pískovcem, jejichž hustota je blízka k námi vypočtené hodnotě  $\rho_R \approx 2750 \text{ kg/m}^3$ .

**Příklad 8.26** Předpokládejte, že Země má přesně tvar koule a na jejím povrchu se nachází homogenní jeden kilometr vysoká vrstva vody. Jak se hloubka oceánu změní, když Země začne rotovat kolem osy rychlostí jedna otočka za den?

**Řešení:** Pokud má Země tvar koule o poloměru  $R$ , její gravitace je stejná jako od hmotného bodu ležícího uprostřed koule a platí  $\chi = -\kappa M/r$ . Vlivem rotace však bude gravitační potenciál na povrchu Země roven

$$\chi = -\kappa \frac{M}{r} - \frac{\Omega^2 R^2}{2} \cos^2 \phi = \text{konst},$$

kde  $\phi$  značí zeměpisnou šířku a  $\Omega$  rychlost rotace Země. Když za  $r$  dosadíme  $R + h$  a rovnici vyřešíme vzhledem k potenciálu  $\chi_e$  na rovníku, dostaneme vzorec

$$h = h_e - H \sin^2 \phi = h_e - \frac{\Omega^2 R^4}{2\kappa M} \sin^2 \phi$$

popisující hloubku oceánu v závislosti na zeměpisné šířce. Pokud byla původní hloubka oceánu  $h_0$ , celkový objem vody v oceánu činil  $V = 4\pi R^2 h_0$ . Při rotaci Země se však masu vody přerозdělí, největší hloubka oceánu bude na rovníku  $h_e$  a nejmenší na pólu  $h_p = h_e - H$ . Pokud však bude  $h_e < H$ , pak oceán dosáhne jen konečných šířek  $\sin^2 \phi < h_e/H$ , takže polární oblasti budou zcela bez vody. Parametr  $H$  pro Zemi známe a zhruba platí  $H \approx \Omega^2 R^2 / 2g \approx 11$  km, co však neznáme, je hloubka  $h_e$  na rovníku. Tu najdeme z celkového objemu vody. Pro objem veškeré vody platí

$$V = \int h dS = 2\pi R^2 \int h \cos \phi d\phi = \frac{8}{3} \pi R^2 \sqrt{\frac{h_e^3}{H}}$$

a současně je  $V = 4\pi R^2 h_0$ . Odtud pak musí být hloubka oceánu na rovníku

$$h_e = \sqrt[3]{\frac{9}{4} h_0^2 H} \approx 2.9 \text{ km,}$$

přitom oceán dosahuje jen do zeměpisné šířky  $\phi \approx 31^\circ$ . Oceán bude dosahovat k pólům, až když bude  $h_0 > \frac{2}{3}H \approx 7.3$  km.

## 8.7 Slapy

### 8.7.1 Slapy, mikrogravitace

Díky televizním přenosům je všeobecně známo, že kosmonauti na oběžné dráze uvnitř i vně kosmické lodi nepocítují žádnou gravitaci a že se nacházejí v **beztížném stavu**. Stejný stav je možno pocítit na krátkou dobu i zde na zemi při volném pádu. Beztížný stav je totiž přímým důsledkem skutečnosti, že se kosmická loď pohybuje v tíhovém poli Země volným pádem.<sup>2</sup>

Protože však tíhové pole Země není zcela homogenní, není ani síla působící na objekty uvnitř kosmické lodi úplně přesně rovna nule. Gravitační síla vznikající jako důsledek nehomogenity gravitačního pole se nazývá **slapovou silou**. Slapy jsou příčinou vzniku přílivu a odlivu, synchronní rotace našeho Měsíce, vzniku Saturnových prstenců atd. V případě kosmické lodi jsou však tyto slapové síly slabé, říká se jim proto **mikrogravitace**.

Podívejme se nyní na problém slapových sil podrobněji. Uvažujme gravitační působení velkého a vzdáleného kosmického tělesa o hmotnosti  $M$  na zkoumaný objekt o hmotnosti  $m$ , jímž může být třeba kosmická loď. Na tuto loď působí gravitační síla  $\mathbf{F}_G = \int \mathbf{K} dm$  a uděluje jí zrychlení  $\mathbf{a} = \mathbf{F}_G/m$ . Výsledná gravitační síla působí přibližně v těžišti  $T$  kosmické lodi, proto je zrychlení kosmické lodi přibližně rovno intenzitě gravitačního pole v jejím těžišti

$$\mathbf{a} \approx \mathbf{K}_T.$$

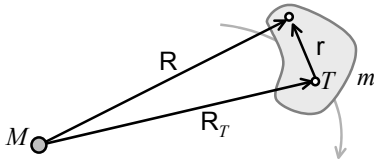
Z pohledu pozorovatele spojeného s padající kosmickou lodí působí na libovolný další objekt, třeba jablko o hmotnosti  $m'$ , kromě gravitační síly  $\mathbf{F}_G = m'\mathbf{K}$  i

<sup>2</sup>Beztížný stav je možno navodit také uměle uvnitř speciálního letadla, které se pohybuje po takové dráze, jíž přísluší dostředivé zrychlení, které je právě ekvivalentní tíhovému zrychlení. Touto trajektorií bude zřejmě parabola, při typické rychlosti letadla  $v \approx 200$  m/s bude poloměr křivosti trajektorie ve vrcholu paraboly  $R \approx v^2/g \approx 4$  km, takže celý beztížný let potrvá zhruba 20 až 40 sekund.

setrvačná síla  $\mathbf{F}_i = -m'\mathbf{a}$ , takže celková síla působící na jablko je rovna

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_i = m'(\mathbf{K} - \mathbf{K}_T). \quad (8.41)$$

Pokud je objekt malý, platí dosti přesně  $\mathbf{K} \approx \mathbf{K}_T$ , a proto je slapová síla zanedbatelná  $\mathbf{F}_S \approx \mathbf{0}$ . Libovolný objekt uvnitř kosmické lodi se tedy nachází téměř v beztlížném stavu a prakticky žádná slapová síla na něj nepůsobí. Předmět, je-li upuštěn, řídí se při svém pohybu uvnitř lodi jen zákony setrvačnosti.




---

Slapové působení tělesa  $M$  ve vzdálenosti  $R_0$ .

---

Je-li však objekt rozlehlejší nebo gravitační pole dostatečně intenzivní, nelze už rozdíl  $\mathbf{K}_S = \mathbf{K} - \mathbf{K}_T$  zanedbat a na jablko bude působit **slapová síla** (8.41). Pokud je zdrojem gravitace sférické těleso nebo hmotný bod  $M$ , pak intenzity jeho gravitačního pole v bodech  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{R}_T$  jsou dány vzorci

$$\mathbf{K} = -\frac{\varkappa M}{R^3}\mathbf{R}, \quad \mathbf{K}_T = -\frac{\varkappa M}{R_T^3}\mathbf{R}_T.$$

Výsledná nehomogenita gravitačního pole (intenzita slapových sil) je rovna jejich rozdílu

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{K} - \mathbf{K}_T = -\frac{\varkappa M}{R^3}\mathbf{R} + \frac{\varkappa M}{R_T^3}\mathbf{R}_T.$$

Označme relativní polohu jablka vzhledem k těžišti lodi jako  $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_T$ . Předpokládejme dále, že objekt kosmické lodi je mnohem menší než vzdálenost gravitujícího centra a že tedy platí  $r \ll R_T$ . Pak lze vzdálenost  $R = |\mathbf{R}_T + \mathbf{r}|$  dobře aproximovat výrazem

$$R \approx R_T \left( 1 + \frac{\mathbf{R}_T \cdot \mathbf{r}}{R_T^2} \right),$$

a odtud spočteme gravitační intenzitu v místě  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{K} \approx -\frac{\varkappa M}{R_T^3}(\mathbf{R}_T + \mathbf{r}) \left( 1 - 3\frac{\mathbf{R}_T \cdot \mathbf{r}}{R_T^2} \right) \approx -\frac{\varkappa M}{R_T^3} \left( \mathbf{R}_T + \mathbf{r} - 3\frac{\mathbf{R}_T \cdot \mathbf{r}}{R_T^2}\mathbf{R}_T \right).$$

Intenzita slapových sil je tedy rovna

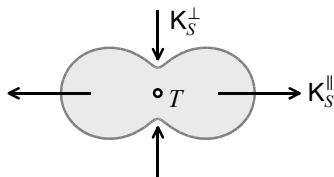
$$\mathbf{K}_S \approx \frac{\varkappa M}{R_T^3} \left( 3\frac{\mathbf{R}_T \cdot \mathbf{r}}{R_T^2}\mathbf{R}_T - \mathbf{r} \right).$$

Jak odtud vidíme, roste slapové zrychlení s hmotností  $M$  zdroje a klesá se třetí mocninou vzdálenosti  $R_T$  od zdroje gravitace. V těžišti je pochopitelně slapové

zrychlení rovno nule, všude jinde je však nenulové. Směr slapového působení je nečekaně dost komplikovaný. Například slapové zrychlení v podélném směru  $\mathbf{r}_{\parallel}$  (tj. ve směru spojnice  $\mathbf{R}_T$ ) působí směrem ven z kosmické lodi, zatímco slapové zrychlení v příčném směru  $\mathbf{r}_{\perp}$  (tj. ve směru kolmém na spojnici  $\mathbf{R}_T$ ) působí dovnitř kosmické lodi. Slapy tedy mají tendenci těleso v radiálním směru protahovat, zatímco v příčném směru mají tendenci těleso stlačovat. Výsledkem soustavného hnětení tělesa vlivem slapových sil je konečné roztrhání tělesa na malé kousky. Snadno najdeme, že po podélnou a příčnou složku intenzity slapových sil platí

$$\mathbf{K}_S^{\parallel} \approx \frac{\varkappa M}{R_T^3} 2\mathbf{r}_{\parallel} \quad \text{a} \quad \mathbf{K}_S^{\perp} \approx -\frac{\varkappa M}{R_T^3} \mathbf{r}_{\perp},$$

a že tedy ani velikost slapového působení není ve všech směrech stejná.




---

Slapové síly mají tendenci roztrhat každé těleso.

---

Intenzita slapových sil má potenciál

$$\chi_S = - \int_0^r \mathbf{K}_S \cdot d\mathbf{r} = \frac{\varkappa M}{R_T^3} \left( -r_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} r_{\perp}^2 \right),$$

pokud označíme úhel mezi vektorem  $\mathbf{r}$  a spojnici  $\mathbf{R}_T$  jako úhel  $\theta$ , pak je  $r_{\parallel} = r \cos \theta$  a  $r_{\perp} = r \sin \theta$ , a tudíž platí také

$$\chi_S = \frac{\varkappa M}{R_T^3} r^2 \left( -\frac{3}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right).$$

Velikost slapového zrychlení lze odhadnout výrazem  $K_S \approx K_T r / R_T$ . Například pro malou kosmickou loď o rozměru  $r \approx 10$  m obíhající kolem Země  $R_T \approx 6400$  km je  $K_T \approx g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>, takže slapové zrychlení má velikost řádově  $K_S \approx 10^{-5}$  m/s<sup>2</sup>  $\approx 10^{-6}g$ . Slapové síly jsou v tomto případě skutečně zanedbatelně malé a kosmonauti je v žádném případě nepocítí. Nicméně i tato mikrogravitace se projeví již při trochu delších časech, takže těleso i s nulovou počáteční rychlostí nakonec vždy spadne na podlahu ve směru spojnice kosmická loď – Země, jen mu to bude trvat několik minut.

**Příklad 8.27** Popište pohyb satelitu tvaru činky o hmotnosti  $2m$  a délce  $a$ , který se nachází na kruhové oběžné dráze ve vzdálenosti  $R_0$  kolem centrálního tělesa o hmotnosti  $M$ .

**Řešení:** Těžiště satelitu obíhá rovnoměrně kolem planety úhlovou rychlostí  $\omega = \sqrt{\varkappa M / R_0^3}$ . Na satelit působí silový moment  $N$  způsobený slapovými silami, spočte se podle vzorce

$$N = \frac{\varkappa m M}{R_0^3} 6xy = \frac{3}{4} \frac{\varkappa m M}{R_0^3} a^2 \sin 2\alpha,$$

kde  $\alpha$  je úhel mezi průvodičem  $R_0$  a polohou činky. Označíme-li úhel natočení činky vzhledem k inerciálnímu pozorovateli jako  $\phi$ , pak platí  $\alpha = \phi - \omega t$ . Silový moment slapových sil je

největší pro náklon  $\alpha = \pm 45^\circ$ , nejmenší pro  $\alpha = 0, \pm\pi$ , kdy je roven nule. Poloha činky  $\alpha = 0$  je stabilní, jde o rovnovážnou polohu. Moment setrvačnosti činky kolem vlastního těžiště je  $J = ma^2/2$ , a proto je úhlové zrychlení otáčení satelitu kolem těžiště podle druhé věty impulzové

$$\ddot{\phi} = -\frac{N}{J} = -\frac{3}{2} \frac{\varkappa M}{R_0^3} \sin 2\alpha = -\frac{3}{2} \omega^2 \sin 2\alpha$$

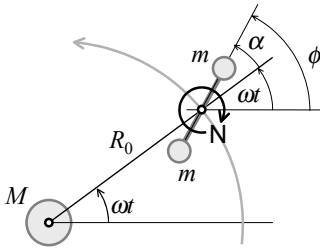
a je tedy nezávislé od velikosti i hmotnosti činky. Protože  $\ddot{\alpha} = \ddot{\phi}$ , máme pohybovou rovnici

$$2\ddot{\alpha} = -3\omega^2 \sin 2\alpha,$$

což je rovnice anharmonických kmitů známá z teorie matematického kyvadla. Rovnovážná poloha činky je  $\alpha = 0$ . Řešení lze psát obecně ve tvaru

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 \operatorname{sn} \sqrt{3}\omega t,$$

kde  $\alpha_0$  je maximální odklon  $\alpha$  a parametr eliptické funkce  $\operatorname{sn}$  je  $k = \sin \alpha_0$ .




---

Satelit tvaru činky obíhá kolem centrálního tělesa  $M$  a kývá vlivem slapových sil kolem rovnovážné polohy  $\alpha = 0$ .

---

Pro malé kmity lze rovnici linearizovat a dostaneme

$$\ddot{\alpha} = -3\omega^2 \alpha,$$

což je rovnice harmonických kmitů s řešením

$$\alpha = \alpha_0 \sin \sqrt{3}\omega t.$$

Odtud je zřejmé, že činka se bude periodicky kývat mezi krajními polohami  $-\alpha_0$  a  $\alpha_0$  s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{3}}.$$

Stejný pohyb vykonává i náš Měsíc, který koná kývavý librační pohyb kolem rovnovážné polohy a ukazuje nám stále stejnou tvář. Je to způsobeno centrální nesymetrií rozložení hmoty uvnitř Měsíce a slapovými silami Země.

### 8.7.2 Příliv a odliv, dmutí oceánů

Zatímco slapové působení se na palubě kosmické lodi projeví jen mikrogravitací, u nebeských těles je síla slapů nepřehlédnutelná. Například slapová síla našeho Měsíce způsobuje pravidelný **příliv** a **odliv moře**. Díky přitažlivosti Měsíce je v každý okamžik zvedáno o půl metru na přivrácené a odvrácené straně asi  $10^{17}$  kg mořské vody. Protože příliv nastává zhruba dvakrát denně, tj. dvakrát během jedné otočky Země kolem osy, je z toho možno soudit na slapový původ přílivu. Kdyby byla perioda přílivu rovna přesně  $12^{\text{h}}$ , bylo by příčinou přílivu Slunce. Protože má příliv periodu o něco delší, a trvá asi  $12^{\text{h}}25^{\text{m}}$ , je zřejmé, že příčinou přílivu je Měsíc, neboť doba mezi jeho dvěma východy trvá asi  $24^{\text{h}}50^{\text{m}}$ , tj. přesně dvakrát déle.

Spočteme velikost přílivové vlny na otevřeném oceánu. Ekvipotenciální plocha je určena součtem potenciálů  $\chi = \chi_G + \chi_S$ , kde  $\chi_G$  odpovídá gravitačnímu potenciálu a  $\chi_S$  potenciálu slapových sil. Stacionární vodní hladina je určena tvarem

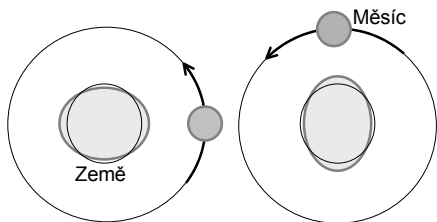
ekvipotenciální plochy. Nebýt slapů a rotace, bude mít Země přesně tvar kulové plochy, vlivem rotace se zdeformuje v rotační elipsoid a vlivem slapů se promění tak trochu v prostorovou osmičku. Směr protažení *osmičky* je určen spojnicí Země – Měsíc. Zvednutí hladiny o  $h = R - R_Z$  najdeme z přírůstků potenciálu  $\Delta\chi = \chi - \chi_Z$ , kde  $\chi_Z = -\varkappa M_Z/R_Z$  je neporušený gravitační potenciál Země a  $R_Z$  je poloměr Země. Protože pro ekvipotenciální plochu platí

$$\Delta\chi \approx \frac{\varkappa M_Z}{R_Z^2} \Delta r + \frac{\varkappa M_M}{a_M^3} R_Z^2 \left( -\frac{3}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) \approx 0,$$

dostaneme odtud pro zvednutí hladiny oceánu výraz

$$\Delta r \approx \frac{M_M R_Z^3}{M_Z a_M^3} R_Z \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right).$$

Numericky pro Měsíc dostaneme zvednutí hladiny o 36 cm a pokles o 18 cm, takže kolísání hladin mezi přílivem a odlivem činí na volném moři asi 54 cm. Rovněž Slunce působí na Zemi slapovými silami, které jsou oproti Měsíci asi dvakrát slabší, takže zvedají hladinu jen o 23 cm. Jsou-li obě nebeská tělesa na jedné přímce se Zemí, jejich vliv se sčítá, příliv dosahuje hodnoty 77 cm a nazývá se **skočným přílivem**. K tomu dochází při úplňku nebo při novu Měsíce. Naopak, když je Měsíc v první nebo poslední čtvrti, slapové působení obou nebeských těles se odečítá a příliv dosahuje jen 31 cm. Takový příliv se nazývá **hluchým přílivem**.




---

Slapové působení Měsíce pravidelně zvedá hladinu oceánů dvakrát denně zhruba o půl metru.

---

Skutečná velikost a také doba, kdy nastane mořský příliv, závisí na dalších faktorech, protože jde o složitý dynamický děj. Jednotlivé přílivové vlny se v různých místech moře skládají s různou fází a výsledkem je různá velikost přílivu. V uzavřených vnitrozemských mořích a jezerech není příliv téměř patrný. Naopak rezonanční mechanismy v některých úzkých zálivech mohou příliv mnohonásobně zvětšit oproti jeho velikosti na širém oceánu. Rekordní příliv o velikosti 19.6 m naměřili v *Zálivu Fundy* v Novém Skotsku v Kanadě a jen o málo menší příliv vysoký 18.0 m mají v ústí řeky *Gallegos* v Argentině.

Záliv Fundy má přibližně tvar obdélníka o délce  $l \approx 270$  km a hloubce  $H \approx 70$  m. Šíří se jím tedy přílivová mořská vlna rychlostí  $c = \sqrt{gH} \approx 25$  m/s. Protože perioda slapových sil je zhruba  $T \approx 12$  hodin, bude příslušná vlnová délka vybuze­né vlny v zálivu  $\lambda = cT \approx 1100$  km. Rychlost přílivové vlny je na pobřeží rovna nule, vzniká tam proto uzel stojaté vlny, zatímco na otevřeném konci zálivu vzniká kmitna. Délka zálivu musí být proto rovna  $\lambda/4 \approx 270$  km, což odpovídá skutečné délce zálivu. Z tohoto jednoduchého rozboru je vidět, že příliv v zálivu Fundy má výrazně rezonanční charakter, a tím se vysvětluje i jeho mimořádná velikost.

### 8.7.3 Slapy ve sluneční soustavě

Slapová síla Měsíce nejen pravidelně zvedá oceány, ale deformuje i plastický vnitřek naší planety. V dávné minulosti měl proto Měsíc zásadní vliv na tektonickou aktivitu Země. Uvážíme-li fakt, že Měsíc se od srážky se Zemí stále vzdaluje a před čtyřmi miliardami let byl čtyřikrát blíže k Zemi, než je nyní, je zřejmé, že slapové působení Měsíce bylo tehdy  $4^3$  krát větší než dnes, takže přílivová vlna na volném oceánu byla tehdy vysoká kolem 35 metrů! Stejně pohyby musela vykonávat i zemská kůra. Tyto pohyby se navíc opakovaly častěji než dnes, neboť den tehdy trval jen kolem osmi hodin a Měsíc.

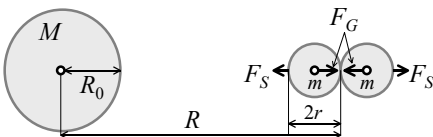
Stejně jako Měsíc působí na Zemi, působí i Země na Měsíc. Protože je Země 81 krát hmotnější než Měsíc a 3.7 krát větší, bude slapová vlna na měsíční kůře vysoká 19 metrů. Stejná slapová síla však již dávno v minulosti, kdy slapová vlna měřila kolem kilometru, rotaci Měsíce zcela zastavila. To, že nám Měsíc ukazuje každou noc stejnou tvář, je nejzřetelnější důkaz o mohutnosti slapových sil naší planety.

Slapové síly velkých planet doslova hnětou hmotu svých blízkých satelitů. Výsledkem jejich působení je silná tektonická činnost, v tom lepším případě, nebo rozdrčení planety na prach, v tom horším případě. Výsledkem práce slapových sil je i vznik prstenců kolem Jupitera, Saturna, Uranu a Neptuna.

Naprostu nepředstavitelné slapové síly vládnu v okolí neutronových hvězd a černých děr. Hmota, která dopadá na jejich povrch, je přetvořena drtivým tlakem k nerozeznání od hmoty původně zachycené jejich gravitací. Podle předpovědí teorie relativity dochází poblíž horizontu černé díry ke zpomalení času. To by pozorovateli padajícím k horizontu černé díry teoreticky umožňovalo spatřit zrychleně celou budoucnost vesmíru. Zmíněné slapové síly však nešťastného pozorovatele rozmačkají na elementární částice, a proto můžeme tuto lákavou myšlenku na nahlédnutí do budoucnosti vesmíru zase pohřbít.

### 8.7.4 Rocheho mez

Slapové síly vysvětlují stabilitu nádherných Saturnových prstenců. Pokud se rozpadne nějaké těleso poblíž planety, vyplní jeho úlomky velmi rychle rovníkovou oblast. Podle numerických modelů dojde ke vzniku prstence řádově během jednoho roku. Kdyby neexistovaly slapové síly, počaly by se kameny a skály tvořící prstence ihned gravitačně shlukovat a během několika tisíců let by vytvořily nový Saturnův měsíc.




---

Soudržnost těles vzhledem ke slapovým silám od tělesa  $M$ .

---

Najdeme podmínku, za které se budou trvale přitahovat dvě koule (úlomky) o hmotnostech  $m$  a poloměru  $r$  v poli slapových sil mateřské planety o hmotnosti  $M$ .



Koule drží pohromadě gravitační síla, ta může nabýt maximálně velikosti

$$F_G = \frac{\varkappa m^2}{4r^2},$$

a to tehdy, když se budou koule navzájem dotýkat. Zároveň na obě tělesa působí slapová síla, která se je snaží oddělit. Čím dál budou koule od sebe, tím bude slapová síla větší a nejmenší velikost bude mít při vzájemném doteku obou koulí. Pro její velikost platí

$$F_S = mK_S^{\parallel} = \frac{\varkappa m M}{R^3} 2r.$$

Se zvětšováním velikosti koulí slapová síla roste, zatímco gravitační síla klesá. Gravitační síla udržuje obě koule pohromadě, jen pokud bude  $F_G > F_S$ , odtud dostaneme podmínku

$$R > 2r \sqrt[3]{\frac{M}{m}} = 2R_0 \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}},$$

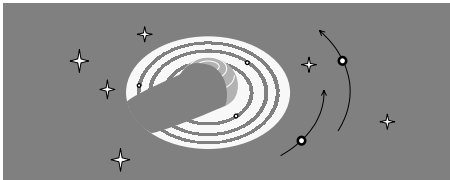
kde  $R_0$  je poloměr centrálního tělesa a  $\rho_0$  jeho hustota, zatímco  $\rho$  je hustota úlomků. Například pro  $\rho \approx \rho_0$  vychází  $R > 2R_0$ . Všimněte si, že tato mez už nezávisí na velikosti  $r$  úlomků.

Tento výsledek vysvětluje, proč se nemůže v nejbližším okolí planety, tj. ve vzdálenostech menších než zhruba dva její poloměry, nacházet žádná stabilní družice. Místo toho se tu vyskytují jen pásy z rozlámaných kamenů a kusů ledu, které zbyly po roztrhání měsíce, který se dostal příliš blízko k planetě. Například roku 1992 pozorovali astronomové kometu Shoemaker-Levy, jak vnikla do Rocheovy sféry Jupitera a jak se rozpadla na 21 úlomků. Naopak ve větší vzdálenosti od planety už nejsou prstence stabilní a z úlomků se brzy opět poskládá kompaktní těleso, vznikne nový měsíc.

Poloměr vymežující oblast převahy slapových sil planety nad silami gravitačními se nazývá **Rocheho mez**. Objevil ji roku 1848 ÉDOUARD ROCHE. Za předpokladu dokonalé tekutosti bude družice stabilní ve vzdálenosti

$$R > 2.456 R_0 \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}.$$

Například pro Zemi je Rocheho mez rovna 18 470 km.




---

Temné pásy v prstencích vnějších planet jsou způsobeny existencí malých měsíčků, které obíhají uvnitř Rocheho meze.

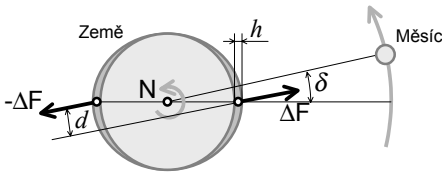
---

Všechny velké planety (Jupiter, Saturn, Uran a Neptun) mají své prstence. Nejnapadnější a nejkrásnější je prstenec Saturnův. Prstence mají bohatou vnitřní

strukturu pozorovatelnou obvykle až z bezprostřední blízkosti. Uvnitř planetárních prstenců jsou pozorovány četné temné pásy, ty jsou způsobeny nepřítomností úlomků tvořících prstence. Temné pásy vznikají jako důsledek rezonance oběžných dob prstence s rotací planety nebo s oběžnými dobami jejich měsíců, takže trajektorie v temných pásách jsou nestabilní. Temný pás vznikne také jako důsledek přítomnosti většího kusu skály, který svou dráhu důkladně vyluxuje a zachytí nebo odhodí všechny drobné úlomky stojící mu v cestě. Tyto miniaturní měsíčky mají rozměry do 10 km a drží je pohromadě síly soudržnosti, takže jejich stabilita není závislá na vlastní gravitaci. Ze stejného důvodu mají také obvykle velmi nepravidelný tvar.

### 8.7.5 Slapové tření

Je známo, že Měsíc se od nás vzdaluje o 35 mm za rok a den se prodlužuje o 16  $\mu$ s za rok. I to je důsledek slapových sil, jimiž na sebe Měsíc a Země působí. V důsledku plasticity Země je její tvar deformován a nepatrně fázově opožděn oproti slapovým silám Měsíce, a právě to způsobuje vznik brzdícího otáčivého momentu  $N$ .



Vlivem plasticity zaostává deformace Země za slapovými silami Měsíce o úhel  $\delta$ , což v důsledku vede ke vzniku momentu slapového tření  $N$ .

Odhadneme nyní rychlost zpomalování rotace Země. Moment slapového tření je dán otáčivým momentem dvojice slapových sil  $\Delta F \approx \Delta m K_S$ , kterými působí Měsíc na obě slapové vlny o výšce  $h$  a hmotnosti  $\Delta m \approx M_Z h / 2R_Z$ . Zde  $K_S \approx 2gh / R_Z$  je intenzita slapových sil. Rameno dvojice slapových sil odhadneme jako  $d \approx 2R_Z \delta$ , kde  $\delta \approx 10^{-2}$  je fázové zpoždění slapové vlny. Moment slapového tření je tedy roven

$$N \approx \Delta F d \approx \frac{2M_Z g h^2}{R_Z^2} \delta.$$

Tento moment zmenšuje moment hybnosti Země a podle druhé věty impulzové platí

$$\varepsilon \approx \frac{N}{J} \approx \frac{5gh^2}{R_Z^3} \delta,$$

kde  $J \approx \frac{2}{5} M_Z R_Z^2$  je moment setrvačnosti Země. Rotace Země se tedy zpomaluje podle předpisu  $\Omega = \Omega_0 - \varepsilon t$ , kde  $\Omega$  je její úhlová rychlost rotace. Za dobu  $t$  se den prodlouží o

$$\Delta T = \frac{2\pi}{\Omega} - \frac{2\pi}{\Omega_0} \approx \frac{1}{2\pi} T_0^2 \varepsilon t \approx \frac{1}{2\pi} T_0^2 \frac{5gh^2}{R_Z^3} \delta t,$$

kde  $T_0$  je délka dne. Pro výšku slapové vlny  $h \approx 0.5$  m a fázové zpoždění  $\delta \approx 10^{-2}$  nám odtud vyjde odhad pro prodloužení dne  $\Delta T \approx 18 \mu$ s za  $t \approx 1$  rok.

Vzdalování Měsíce a brzdění rotace Země budou probíhat tak dlouho, až se srovná oběžná doba Měsíce a rotace Země. Nakonec bude mít i Země přivrácenu k Měsíci stále stejnou tvář, takže měsíc bude stejně dlouhý jako den a oba budou trvat asi 50 současných dní, jak je možno snadno spočíst ze zákona zachování momentu hybnosti. První teorii slapového tření podal roku 1879 GEORGE DARWIN, syn slavného CHARLESE DARWINA.

**Příklad 8.28** Měsíc se vzdaluje od Země a rotace Země se zpomaluje vlivem vzájemných slapových sil. Najděte rychlost synchronní rotace soustavy Země – Měsíc.

**Řešení:** Měsíc se od nás vzdaluje v důsledku momentu sil slapového tření, jimiž na sebe Měsíc a Země působí. Děj bude probíhat tak dlouho, až se srovná oběžná doba Měsíce a rotace Země. Srovnání periody rotace Měsíce již proběhlo, a Měsíc k nám proto přivrácí stále stejnou tvář. Aniž budeme znát přesnou dynamiku tohoto procesu, můžeme najít rychlost synchronní rotace ze zákona zachování momentu hybnosti. Zákon zachování momentu hybnosti soustavy je možno psát ve tvaru

$$\frac{2}{5}MR^2\Omega + mr^2\omega = \left(\frac{2}{5}MR^2 + mr_0^2\right)\omega_0,$$

kde  $M, R$  jsou hmotnost a poloměr Země,  $\Omega$  je úhlová rychlost rotace Země,  $m, r$  hmotnost a vzdálenost Měsíce a  $\omega$  je úhlová rychlost oběhu Měsíce kolem Země. Konečně  $\omega_0$  je úhlová rychlost a  $r_0$  vzdálenost Měsíce po ukončení synchronizace. Druhou rovnicí dostaneme ze třetího Keplerova zákona

$$r^3\omega^2 = r_0^3\omega_0^2.$$

To vede na obtížně řešitelnou transcendentní rovnici. Pokud si však uvědomíme, že moment hybnosti Země bude při synchronní rotaci zanedbatelný ve srovnání s momentem hybnosti, je možno zákon zachování hybnosti zjednodušit vynecháním členu  $(2/5)MR^2\omega_0$ . Tím se problém natolik zjednoduší, že pohodlně najdeme analytické řešení

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx \left(1 + \frac{2}{5} \frac{MR^2\Omega}{mr^2\omega}\right)^3 \approx 1.91.$$

Oběžná doba Měsíce, stejně jako pozemský den, budou trvat přibližně 50 dní. Vzdálenost Měsíce od Země přitom bude asi o polovinu větší, než je dnes.