

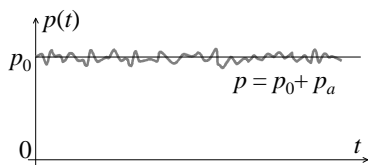
Kapitola 7

Akustika

7.1 Akustické vlny

7.1.1 Akustický tlak

Akustickými nebo **zvukovými vlnami** rozumíme obecně mechanické vlny o malé amplitudě v určitém pružném prostředí. V plynech a kapalinách jde o podélné vlny, v pevných látkách se mohou šířit jak podélné, tak i příčné akustické vlny. Akustické vlny dělíme s ohledem na vlastnosti lidského ucha na infrazvuk, slyšitelný zvuk, ultrazvuk a hyperzvuk. **Slyšitelný zvuk** představuje jen malou část z celého akustického spektra a obsahuje zhruba interval frekvencí 20 Hz až 20 kHz. Zvuky s menší frekvencí nazýváme infrazvuk a zvuky s vyšší frekvencí ultrazvuk. Konečně akustické vlny o frekvenci vyšší než 1 GHz se nazývají hyperzvuk.

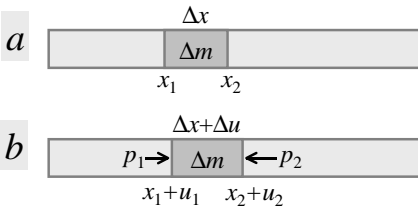


Časová závislost tlaku p vzduchu za přítomnosti zvuku. Akustický tlak p_a představuje jen velmi malou poruchu k atmosférickému tlaku p_0 .

Zvukové vlny ve vzduchu představují vlny stlačení jednotlivých vrstev vzduchu a je možno je popsat například časovou změnou tlaku $p(t)$. Kdybychom měřili tento tlak vzduchu velmi citlivým manometrem, zjistili bychom, že tlak obsahuje dvě složky, velkou a na čase téměř nezávislou složku představující barometrický tlak $p_0 \approx 10^5$ Pa a malou velmi rychle se měnící složku představující **akustický tlak** p_a . Právě tato malá střídavá složka popisuje zvukové vlny. Velikost akustického tlaku je ve srovnání s atmosférickým tlakem vzduchu nepatrná, obvykle je z intervalu $10^{-5} - 10^2$ Pa. Díky tomu je možno rovnice popisující zvukové vlny linearizovat. Tento předpoklad se obvykle nazývá **akustická aproximace**.

7.1.2 Vlnová rovnice pružného kontinua

Z praktického hlediska jsou nejdůležitější akustické vlny šířící se ve vzduchu. Hledejme proto nejprve rovnici akustických vln ve vzduchu. Protože v plynech nejsou téměř žádné tečné síly, mohou se zde šířit jen vlny podélné. Jde o vlny relativního zhuštění a zředění vzduchu. Pro jednoduchost se v dalších úvahách omezíme na jedinou dimenzi. Uvažujme sloupec vzduchu v trubici stálého průřezu S . Vyberme si z něj element mezi dvěma řezy vedenými v místech x_1 a x_2 , tedy element vzduchu o tloušťce $\Delta x = x_2 - x_1$. Hmotnost elementu vzduchu je pak rovna $\Delta m = \rho_0 S \Delta x$, kde ρ_0 značí hustotu vzduchu. Element vzduchu je však v neustálém pohybu, mění se jeho rychlost, poloha i hustota. Hodnotu posunutí vrstvy x označíme výchylkou $u(x, t)$.



Ilustrace k odvození pohybové rovnice pro chvění vzduchu v trubici: (a) klidový stav elementu Δm , (b) stav elementu Δm v obecném okamžiku t .

Nejprve sestavíme pohybovou rovnici elementu vzduchu. Ukážeme přitom, že chvění vzduchu je popsáno stejnou bezdisperzní vlnovou rovnicí jako chvění struny. Zrychlení elementu spočteme jako druhou časovou derivaci výchylky $u(x, t)$

$$a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Na element působí z obou stran tlak okolního vzduchu, zleva tlak $p_1 = p(x)$ a zprava tlak $p_2 = p(x + \Delta x)$. Silová výslednice

$$\Delta F = (p_1 - p_2) S = -\Delta p S \approx -\frac{\partial p}{\partial x} S \Delta x$$

od obou tlaků uvádí element vzduchu do kmitavého pohybu. Z pohybové rovnice $a = \Delta F / \Delta m$ elementu Δm obdržíme po dosazení za sílu, zrychlení a hmotnost hledanou pohybovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7.1)$$

Působení tlaku má za následek také změnu rozměrů elementu plynu, protože pružné látky jsou obecně stlačitelné. Chování látek pod tlakem popisuje **stavová rovnice**, což je závislost hustoty na tlaku $\rho = f(p)$. Při zkoumání akustických vln vystačíme s linearizovanou stavovou rovnicí. Protože předpokládáme malé poruchy kolem rovnovážného tlaku p_0 a hustoty ρ_0 , platí

$$p = p_0 + p_a \quad \text{a} \quad \rho = \rho_0 + \rho_a,$$

kde p_a a ρ_a představují **akustický tlak** a **akustickou hustotu**. Stavová rovnice se pak dá linearizovat a má zřejmě tvar

$$p_a \approx \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \rho_a, \quad (7.2)$$

kde výraz $(dp/d\rho)_0$ představuje derivaci tlaku podle hustoty vzduchu za klidového stavu o barometrickém tlaku p_0 .

Změna hustoty je spojena s pohybem elementu vzduchu. Pro chvění sloupce vzduchu platí **rovnice kontinuity**, tedy zákon zachování hmotnosti. Objem uvažovaného elementu plynu je před příchodem mechanické vlny roven $S\Delta x$ a během průchodu mechanické vlny se vlivem posunutí jednotlivých vrstev změní na $S(\Delta x + \Delta u)$. Celková hmotnost elementu vzduchu se přitom nemění, tj. platí $\rho_0 S\Delta x = \rho S(\Delta x + \Delta u)$. Odtud vidíme, že hustota vzduchu se během průchodu mechanické vlny mění podle vzorce

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \varepsilon}, \quad (7.3)$$

kde veličina $\varepsilon = \partial u / \partial x$ představuje lokální **poměrnou deformaci** (tj. prodloužení) elementu vzduchu. Pro akustické vlny je $\varepsilon \ll 1$, takže pro akustickou hustotu $\rho_a = \rho - \rho_0$ platí aproximace

$$\rho_a \approx -\rho_0 \varepsilon = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (7.4)$$

Relativní změna hustoty plynu je tedy až na znaménko stejná jako relativní změna objemu. Když (7.4) dosadíme po stavové rovnice (7.2), dostaneme

$$p_a = -\rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Konečně, dosadíme-li do pohybové rovnice (7.1) za akustický tlak p_a podle posledního vzorce, dostaneme hledanou **vlnovou rovnici pro vzduch**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.5)$$

Srovnáním (7.5) s vlnovou rovnicí (5.7) je zřejmé, že rychlost akustických vln ve vzduchu je dána vztahem

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0}. \quad (7.6)$$

Tato rovnice však platí nejen pro vzduch, ale pro všechny plyny a kapaliny a dokonce také pro podélné akustické vlny šířící se pevnými látkami. Rozdíl mezi těmito vlnami je jen v jiné rychlosti zvuku, která se dostane ze stavové rovnice příslušného média.

7.1.3 Rychlost zvuku v plynech

Pro plyny při stálé teplotě platí **izotermická stavová rovnice**

$$p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Z této stavové rovnice a definice (7.6) vyjde pro rychlost zvukových vln vzorec $c_0 = \sqrt{p_0/\rho_0}$. Pro vzduch máme $p_0 \approx 10^5$ Pa a $\rho_0 \approx 1.3$ kg/m³, takže pro rychlost zvuku dostaneme hodnotu $c_0 \approx 280$ m/s. Stejný teoretický výsledek získal již roku 1687 ISAAC NEWTON. Skutečná rychlost zvuku ve vzduchu je však asi o 20 % větší a činí $c \approx 340$ m/s. Newton nedokázal vysvětlit, proč jeho výsledek nesouhlasí s pozorováním. Teprve až PIERRE-SIMON LAPLACE si roku 1807 uvědomil, že předpoklad o izotermičnosti není při rychlém zhušťování a zředování vzduchu splněn. Vzduch je totiž špatný vodič tepla a při zvukových vlnách jde o tisíce oscilací za sekundu. Během jedné periody si vzduch nestačí vyměnit tepelnou energii s okolními vrstvami vzduchu, a proto je akustické stlačování vzduchu velmi dobře popsáno **adiabatickou stavovou rovnicí**

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa,$$

kde parametr $\kappa = c_P/c_V$ se nazývá **Poissonova adiabatická konstanta**. Pro běžné plyny, včetně vzduchu, je $\kappa \approx 7/5 \approx 1.40$. Z rovnice adiabaty a (7.6) dostaneme pro **rychlost zvuku v plynech** správný vzorec

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}},$$

pro vzduch pak máme skutečně $c \approx 340$ m/s. Pomocí stavové rovnice ideálních plynů

$$p = \frac{RT}{M} \rho,$$

kde R je univerzální plynová konstanta, T je absolutní teplota a M molární hmotnost, lze vzorec pro rychlost zvuku dále upravit do tvaru

$$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}, \quad (7.7)$$

z něhož vidíme, že rychlost zvuku nezávisí ani na hustotě ani na tlaku, ale prakticky jen na absolutní teplotě plynu a jeho molární hmotnosti. Například pro teplotu 0 °C je rychlost zvuku asi 330 m/s a pro 30 °C je rychlost zvuku již asi 350 m/s. Molární hmotnost vzduchu závisí také na relativní vlhkosti vzduchu, ve vlhkém vzduchu se zvuk šíří o něco rychleji, řádově až o jedno procento.

Rychlost šíření zvuku v lehkých plynech je podstatně větší než ve vzduchu, například pro vodík je rychlost zvuku rovna 1300 m/s a pro hélium je to 1000 m/s.

Naopak v těžkých plynech, jako jsou CO_2 , H_2S apod., je rychlost šíření zvuku menší než ve vzduchu.

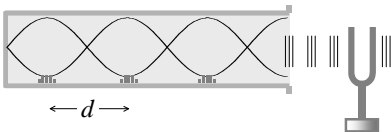
Závislost rychlosti zvuku na molární hmotnosti plynu je možno demonstrovat za pomoci hélia. Když se nadechneme hélia, a pak se pokusíme promluvit, zjistíme, že náš hlas bude najednou nepřírozeně vysoký a bude připomínat hlas Disneyho animovaných postavíček. Příčinou tohoto zábavného jevu je skutečnost, že naše mluvidla jsou nastavena na modulaci zvuku ve vzduchu, a protože frekvence zvuku závisí na rychlosti šíření zvuku vztahem $f = c/\lambda$, bude mít každý tón a každá hláska v héliu skoro třikrát vyšší kmitočet než ve vzduchu.

Příklad 7.1 Spočítejte rychlost zvuku v héliu za normálních podmínek.

Řešení: Hélium je inertní plyn a netvoří molekuly, takže molární hmotnost molekul hélia je $M \approx 4 \text{ g/mol}$. Pro jednoatomový plyn je podle ekvipartičního teorému Poissonova konstanta $\kappa \approx 5/3$. Podle rovnice (7.7) tak pro $T \approx 20^\circ\text{C}$ dostaneme $c = \sqrt{\kappa RT/M} \approx 1007 \text{ m/s}$.

7.1.4 Měření rychlosti zvuku

Rychlost zvuku můžeme změřit jednoduše tak, že změříme dobu t , za kterou překoná zvuk určitou známou vzdálenost l . Odtud je pak rychlost zvuku $c = l/t$. Například změříme dobu, za kterou uslyšíme výstřel vzdáleného děla poté, co jsme spatřili záblesk. Dobu, za kterou k nám dorazí světlo, můžeme zanedbat, neboť světlo se šíří milionkrát rychleji než zvuk. První měření rychlosti zvuku touto metodou provedl počátkem 17. století také PIERRE GASSENDI s výsledkem 478 m/s . O něco lepší výsledek 414 m/s získal roku 1636 MARIN MERSENNE. Podstatně přesnější výsledek 350 m/s naměřili roku 1650 Galileiho žáci GIOVANNI ALFONSO BORELLI a VINCENZO VIVIANI. První přesné měření rychlosti zvuku 332 m/s dodala roku 1738 Akademie věd v Paříži. Roku 1740 ukázal GIOVANNI LUDOVICO BIANCONI, že rychlost zvuku roste s teplotou. Gassendi si také jako první všiml toho, že rychlost zvuku nezávisí na frekvenci, tj. že zvuk ve vzduchu nevykazuje **disperzi**. To je také v souladu s námi odvozeným vzorcem (7.7). Teprve v oblasti ultrazvuku $f > 1 \text{ MHz}$ je možno pozorovat významnější disperzi zvukových vln spolu s jejich absorbcí a zde již vzorec (7.7) přestává platit.



Kundtova trubice se užívá ke zkoumání vlastností stojaté zvukové vlny a k měření rychlosti zvuku. Plavuňový pyl se shromažďuje v místech kmiten rychlostí neboli uzlů tlaku.

Rychlost zvuku můžeme měřit také v laboratoři, například metodou stojatých zvukových vln. Tak se měří třeba rychlost zvuku ve vzácných plynech. Klasickým příkladem této metody je **Kundtova trubice**. Pomocí ladičky nebo elektrického generátoru o známé frekvenci f vytvoříme ve skleněné trubici stojatou zvukovou vlnu. Stojaté vlnění je možno zviditelnit například korkovým prachem nebo pylem plavuní. V místech kmiten, kde se vzduch nejvíce chvěje, vznikají tenké chvějící se prachové proužky, v místech uzlů je prach nehybný a rovnoměrně rozprostřen. Jestliže odečteme vzdálenost sousedních kmiten d , která se rovná polovině vlnové

délky, dostaneme pro rychlost zvuku vzorec

$$c = f\lambda = 2fd.$$

Metodu poprvé použil roku 1870 AUGUST KUNDT. Poznamenejme ještě, že kmitny akustické rychlosti odpovídají uzlům akustického tlaku a naopak. Na uzavřeném konci trubice je proto uzel rychlosti a kmitna tlaku.

7.1.5 Zvukové vlny v kapalinách

Jak jsme již uvedli, vlnová rovnice (7.5) odvozená pro vzduch platí i v kapalinách. Protože pro kapaliny platí jiná stavová rovnice než pro plyny, bude zde i jiná rychlost zvuku. Základní parametr popisující pružnost kapalin je **objemový modul pružnosti**

$$K = -V \frac{dp}{dV} = \rho \frac{dp}{d\rho},$$

případně jeho převrácená hodnota, tj. **objemová stlačitelnost** $\beta = 1/K$. Vzhledem k obecně malé stlačitelnosti kapalin platí $V \approx V_0 (1 - p/K)$, kde V je objem kapaliny za působení tlaku p na kapalinu o původním objemu V_0 . Pro hustotu $\rho = m/V$ platí podobně $\rho \approx \rho_0 (1 + p/K)$. Odtud je

$$\frac{d\rho}{d\rho} \approx \frac{\rho_0}{K} \approx \frac{\rho}{K},$$

takže podle vzorce (7.6) je **rychlost zvuku v kapalinách** rovna

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

V důsledku větší pružnosti kapalin je rychlost zvuku v kapalinách obecně větší než v plynech. Například pro vodu je $K \approx 2 \times 10^9$ Pa, proto vychází $c \approx 1500$ m/s. Rychlost zvuku ve vodě je tedy asi pětkrát vyšší než rychlost zvuku ve vzduchu. Rychlost zvuku ve vodě Ženevského jezera poprvé změřil roku 1827 DANIEL COLLADON.

Ve fyzikálních tabulkách se obvykle uvádí statický modul pružnosti K_0 . Akustický modul pružnosti K , který je měřen při akustických frekvencích, je pak nepatrně menší než statický modul pružnosti, například pro vodu platí $K \approx 0.996K_0$.

Uvnitř kapalin se mohou šířit jen podélné vlny. Příčné vlny se v kapalině šířit nemohou, protože zde nejsou přítomny tečné síly. Příčné vlny se však mohou šířit na povrchu kapalin, kde roli příčné síly přebírá gravitace. Pak již nejde o akustické vlny, ale o povrchové vlny gravitační nebo kapilární. Jejich rychlost je mnohem menší než rychlost akustických vln a jejich amplitudy jsou o mnoho řádů větší než amplitudy akustických vln. Vzhledem k disperzi a nelinearitě je popis povrchových vln mnohem složitější než popis akustických vln a budeme se jimi zabývat později.

7.1.6 Zvukové vlny v pevných látkách

Udeříme-li kladivem podélně na jeden konec dlouhé tenké tyče, bude se v ní šířit podélná vlna stlačení a zředění stejně, jako tomu bylo u plynů nebo kapalin. Výpočet bude podobný odvození vlnové rovnice pro vzduch. Uvažujme element tyče délky Δx a průřezu S , jeho hmotnost je zřejmě rovna $\Delta m = \rho S \Delta x$. Na element tyče při tahu σ působí zleva síla napětí $F_1 = -S\sigma(x)$ a zprava síla $F_2 = S\sigma(x + \Delta x)$. Výsledná síla působící na chvějící se element tyče je pak rovna

$$\Delta F = F_1 + F_2 \approx S \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x.$$

Po dosazení do pohybové rovnice $a = \Delta F / \Delta m$ uvažovaného elementu dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (7.8)$$

Vlivem lokálního napětí je element tyče deformován. Jeho relativní deformace je přitom rovna $\varepsilon = \Delta u / \Delta x \approx \partial u / \partial x$. Tuto deformaci má na svědomí podle **Hookova zákona** napětí

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x},$$

kde E značí **Youngův modul pružnosti** v tahu. Když do pohybové rovnice (7.8) dosadíme za σ , dostaneme pro podélné akustické vlny šířící se v tenké tyči hledanou vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pro **rychlost podélné akustické vlny v tyči** tak máme výsledek

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Pro ocel nebo sklo vychází $c \approx 5000$ m/s. Rychlost zvuku v oceli je tedy asi patnáctkrát větší než rychlost zvuku ve vzduchu. Rychlost zvuku v ocelové rouře změřil JEAN-BAPTISTE BIOT roku 1808. Dokázal tím, že se zvuk v oceli šíří mnohem rychleji než ve vzduchu. Bylo to zároveň historicky vůbec první určení rychlosti zvuku v jiném prostředí, než kterým je vzduch.

V neomezené homogenní pružné látce pevného skupenství se mohou šířit nejen vlny podélné, ale i vlny příčné. Z teorie pružnosti vychází, že **rychlost příčných vln** obou polarizací a **rychlost podélných vln** jsou dány vzorci¹

$$c^\perp = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{a} \quad c^\parallel = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}}.$$

¹ Povšimněte si, že příčné vlny v neomezeném prostředí jsou bezdisperzní stejně jako podélné vlny na rozdíl od příčných vln šířících se tenkou tyčí, které jsou naopak silně disperzní.

Zde G značí **modul pružnosti ve smyku** a E^* **modul pružnosti v tahu bez příčného zkrácení** materiálu. Chceme-li srovnat tyto rychlosti s rychlostí $c = \sqrt{E/\rho}$ podélných vln v tyči ze stejného materiálu, použijeme vzorce z teorie pružnosti

$$E^* = E \frac{1 - \mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)} \quad \text{a} \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

kde μ je **Poissonovo číslo** určující poměr relativního zúžení a relativního prodloužení tenké tyče při lineárním napětí a E běžný Youngův modul pružnosti. Pro rychlosti akustických vln tak dostaneme nová vyjádření

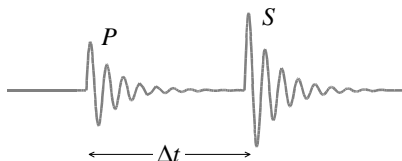
$$c^\perp = \sqrt{\frac{E}{2\rho} \frac{1}{1 + \mu}}, \quad c^\parallel = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}}.$$

Vzhledem k omezení $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ odtud plyne $c^\perp \leq c/\sqrt{2}$, tedy rychlost příčných vln v neomezeném prostředí je vždy menší než 71 % rychlosti c podélných vln v tenké tyči a dále, protože $(1 - 2\mu)(1 + \mu) = 1 - \mu - 2\mu^2 < 1 - \mu$, platí $c^\parallel \geq c$, tedy rychlost podélných vln v neomezeném prostředí je vždy větší než rychlost podélných vln v tenké tyči. Pro obvyklé materiály $\mu \approx \frac{1}{3}$ vyjde $c^\perp \approx 0.61c$ a $c^\parallel \approx 1.22c$ a také $c^\parallel \approx 2c^\perp$.

V případě příčných vln je možno zkoumat i jejich **polarizaci**. V analogii se světlem rozeznáváme polarizaci eliptickou, kruhovou a lineární, a to podle tvaru křivky, kterou opisují kmitající elementy prostředí pod vlivem procházející mechanické vlny. V anizotropním prostředí se mohou rychlosti vln různých polarizací lišit. Pokud se tedy akustická vlna láme do anizotropního prostředí, rozpadá se až na tři vlny, jednu podélnou a dvě příčné, přičemž všechny tři vlny se šíří různými směry a různými rychlostmi.

Zkoumáním elastických vln v nitru Země se zabývá **seismologie**. Z epicentra se šíří podélná i příčná seismická vlna, později dorazí i slabší vlny odražené od jednotlivých vrstev zemské kůry. První vlna, kterou seismograf zachytí, se nazývá primární a značí se P , druhá se nazývá sekundární a značí se S . Protože podélná vlna se pohybuje rychleji než příčná, je jí zřejmě vlna P , zatímco vlna S značí vlnu příčnou. Zemětrésné vlny se šíří také jako vlny povrchové (Rayleighova vlna). Jedním z nejdůležitějších výsledků vědy o zemětřesených vlnách je poznatek, že Země má tekuté jádro. To je nejpřirozenější vysvětlení poznatku, že středem Země neprocházejí příčné seismické vlny, ale pouze vlny podélné.

Příklad 7.2 Umíte vysvětlit, jak seismologové odhadují vzdálenost epicentra zemětřesení?



Seismogram vzdáleného zemětřesení.

Řešení: Obvykle z časového zpoždění Δt primární P a sekundární S seismické vlny. Označíme-li tyto rychlosti c_S a c_P , pak pro zpoždění platí

$$\Delta t = \frac{d}{c_S} - \frac{d}{c_P}.$$

Odtud najdeme vzdálenost epicentra od seismografu

$$d = \frac{c_S c_P}{c_P - c_S} \Delta t.$$

Protože v zemském plášti je $c_S \approx 3.4 \text{ km/s}$ a $c_P \approx 6.0 \text{ km/s}$, dá se odhadnout, že s každou sekundou zpoždění naroste vzdálenost epicentra asi o 8 km.

7.1.7 Akustická impedance, Ohmův zákon

Pro běžné akustické vlny platí, že změny tlaku i hustoty jsou relativně velmi malé, a má proto smysl psát $p = p_0 + p_a$ a $\rho = \rho_0 + \rho_a$, kde p_0 a ρ_0 jsou časově stálé klidové hodnoty tlaku a hustoty, zatímco p_a a ρ_a jsou malé časově oscilující složky tlaku a hustoty, které se nazývají **akustický tlak** a **akustická hustota**. Akustický tlak běžných zvuků ve vzduchu má velikost $p_a \approx 10^{-5} - 10^2 \text{ Pa}$ a je tedy mnohem menší než statický barometrický tlak $p_0 \approx 10^5 \text{ Pa}$. Právě díky tomu je možno všechny vztahy mezi akustickými veličinami linearizovat. Připomeňme si stručně tyto vztahy. Jde především o rovnici kontinuity (7.4) $\rho_a = -\rho_0 \varepsilon$ a stavovou rovnici (7.2), která má vzhledem k definici rychlosti šíření zvuku (7.6) tvar $p_a = c^2 \rho_a$. Dále platí vlnová rovnice, pokud se však omezíme na postupnou vlnu $u = f(t \mp x/c)$, pak místo vlnové rovnice platí rovnice (5.8), tj. $v_a = \mp c \varepsilon$, kde v_a značí **akustickou rychlost** a $\varepsilon = \partial u / \partial x$ **relativní deformaci** objemového elementu. Z těchto lineárních vztahů je zřejmé, že akustický tlak, akustická rychlost, akustická hustota i deformace média jsou u postupné vlny všechny navzájem přímo úměrné. Vyloučením akustické hustoty a deformace z těchto vztahů dostaneme vzorec

$$p_a = \pm Z v_a, \quad \text{kde} \quad Z = \rho_0 c \quad (7.9)$$

je **akustická impedance** daného prostředí. Například pro vzduch vychází akustická impedance $Z \approx 430 \text{ Pas/m}$ a pro vodu je $Z \approx 1.5 \times 10^6 \text{ Pas/m}$. Znaménko $+$ platí pro vlnu běžící ve směru a znaménko $-$ proti směru osy x . Uvedené vzorce platí pro podélné akustické vlny ve všech pružných prostředích, neplatí však pro obecnou vlnu a tedy ani pro vlnu stojatou, kde jsou rychlost a tlak fázově posunuty o 90° . Vzorec (7.9) představuje **Ohmův zákon akustiky**:

U postupné zvukové vlny je akustický tlak přímo úměrný a tedy i ve fázi s akustickou rychlostí.

7.1.8 Akustická energie

Kmitající vzduch nese mechanickou energii. Kinetická energie elementu o hmotnosti $\Delta m = \rho_0 \Delta V$ a rychlosti v_a je zřejmě rovna $\Delta T = \frac{1}{2} \Delta m v_a^2$. Nyní najdeme potenciální energii stejného elementu; předpokládejme, že v klidu za tlaku p_0 má

element vzduchu objem $\Delta V = S\Delta x$ a nulovou potenciální energii. Změnou tlaku z p_0 na $p = p_0 + p_a$ se jeho objem ΔV změní podle rovnice kontinuity o

$$V_a = -\frac{\Delta V}{\rho_0} \rho_a = -\frac{\Delta V}{\rho_0 c^2} p_a,$$

neboť $\rho_a = p_a/c^2$, jak plyne ze stavové rovnice vzduchu. Práce potřebná k této změně objemu je již rovna hledané potenciální energii

$$\Delta U = -\int_0^{V_a} p \, dV_a = \frac{\Delta V}{\rho_0 c^2} \int_0^{p_a} (p_0 + p_a) \, dp_a,$$

po elementární integraci máme výsledek

$$\Delta U = \frac{\Delta V}{\rho_0 c^2} \left(p_0 p_a + \frac{1}{2} p_a^2 \right).$$

Objemová hustota akustické energie je tedy rovna

$$w_a = \frac{\Delta T + \Delta U}{\Delta V} = \frac{p_0 p_a}{Zc} + \frac{1}{2} \rho_0 \left(v_a^2 + \frac{p_a^2}{Z^2} \right).$$

Pro postupnou vlnu je navíc $p_a = \pm Zv_a$, takže vzorec se dále zjednoduší a platí

$$w_a = \frac{p_0 p_a}{Zc} + \rho_0 v_a^2.$$

První člen osciluje a má nulovou střední hodnotu $\langle p_a \rangle = 0$, takže střední hodnota akustické energie postupné vlny je rovna

$$\langle w_a \rangle = \rho_0 \langle v_a^2 \rangle.$$

7.1.9 Akustická intenzita

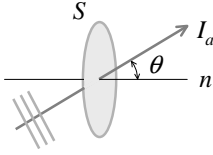
Důležitější než energie je výkon a intenzita akustické vlny. **Akustický výkon vlny** P definujeme jako množství akustické energie prošlé určitou plochou S za určitý čas. Akustický výkon vztažený na jednotkovou plochu postavenou kolmo na směr šíření vlny se nazývá **akustická intenzita zvuku** a značí se I_a . Pro akustickou intenzitu tedy platí

$$I_a = \frac{P}{S_{\perp}} = \frac{P}{S \cos \theta},$$

a měříme ji ve W/m^2 . Výkon zvukové vlny je tedy závislý jak na velikosti, tak na orientaci plochy vztahem

$$P = \mathbf{I}_a \cdot \mathbf{S} = I_a S \cos \theta,$$

kde θ je úhel mezi směrem šíření vlny a normálou plochy \mathbf{S} .



Ilustrace k zavedení intenzity zvuku.

Výkon akustické vlny spočteme jako součin tlakové síly a akustické rychlosti, tj. platí

$$P = pSv_a = (p_0 + p_a)Sv_a.$$

Pro akustickou intenzitu zvuku odtud dostaneme vzorec

$$I_a = \frac{P}{S} = p_0v_a + p_av_a.$$

Podle Ohmova zákona $p_a = \pm Zv_a$ pro postupnou vlnu tedy platí

$$I_a = p_0v_a \pm Zv_a^2 = p_0v_a \pm \frac{p_a^2}{Z}.$$

Ačkoliv je barometrický tlak o mnoho řádů větší než tlak akustický, bude příspěvek prvního členu k průměrné akustické intenzitě nulový, protože akustická rychlost osciluje kolem nuly. Zbývá tedy jen druhý člen

$$\langle I_a \rangle = \langle p_av_a \rangle = \pm \langle Zv_a^2 \rangle = \pm \frac{\langle p_a^2 \rangle}{Z},$$

kteří je díky platnosti Ohmova zákona nenulový. Znaménkem je rozlišen případ vlny jdoucí ve směru a proti směru osy x .

7.1.10 Harmonická vlna

Speciálně, pro harmonickou vlnu $u = A \cos(\omega t - kx)$ vyjde střední hustota akustické energie a střední akustická intenzita

$$\langle w_a \rangle = \frac{1}{2}\rho_0v_{\max}^2 \quad \text{a} \quad \langle I_a \rangle = \frac{1}{2}Zv_{\max}^2 = \frac{p_{\max}^2}{2Z},$$

kde $v_{\max} = \omega A$ a $p_{\max} = Zv_{\max} = \omega ZA$. Pokud zavedeme **efektivní akustický tlak** a **efektivní akustickou rychlost** vzorci

$$p_{\text{ef}} = \frac{p_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad v_{\text{ef}} = \frac{v_{\max}}{\sqrt{2}},$$

můžeme Ohmův zákon akustiky psát ve tvaru $p_{\text{ef}} = Zv_{\text{ef}}$ a vzorec pro hustotu akustické energie a akustickou intenzitu ve tvaru

$$\langle w_a \rangle = \rho_0v_{\text{ef}}^2 \quad \text{a} \quad \langle I_a \rangle = \frac{p_{\text{ef}}^2}{Z},$$

kteří se běžně používá v technické praxi. Tím se zároveň zcela vyhneme práci s časově oscilujícími veličinami. Podobně se pracuje se střídavými proudy v elektrotechnice.²

²Ohmův zákon akustiky, efektivní hodnoty, vzorec pro akustickou intenzitu, to jsou jen některé z mnoha analogií, které je možno mezi akustikou a elektrotechnikou nalézt.

7.1.11 Vlnová rovnice tekutin

Vlnovou rovnicí tekutin (plynů i kapalin) můžeme odvodit obecně z pohybových rovnic hydrodynamiky. Z Eulerovy rovnice a rovnice kontinuity

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

dostaneme v akustické aproximaci $p = p_0 + p_a$ a $\rho = \rho_0 + \rho_a$ lineární rovnice

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t} = -\nabla p_a \quad \text{a} \quad \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_a = 0.$$

Současně předpokládáme linearizovanou stavovou rovnici $p_a = c^2 \rho_a$, kde $c^2 = (dp/d\rho)_0$, pomocí níž můžeme v pohybových rovnicích dle potřeby nahradit tlak hustotou a naopak. Pokud z pohybových rovnic vyloučíme rychlost, dostaneme pro tlak a hustotu obvyklé vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p_a \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho_a.$$

Pokud naopak vyloučíme hustotu, dostaneme trochu odlišnou rovnici

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_a}{\partial t^2} = c^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_a). \quad (7.10)$$

Má-li to má být vlnová rovnice, musí být jejím řešením také postupná rovinná vlna $\mathbf{v}_a = \mathbf{A} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. Když tuto rovinnou vlnu do rovnice (7.10) dosadíme, dostaneme podmínku

$$\omega^2 \mathbf{A} = c^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}),$$

z níž je patrné, že kmitosměr rychlosti \mathbf{A} musí být rovnoběžný se směrem šíření vlny \mathbf{k} . V tom případě se disperzní rovnice dále zjednoduší a nabude obvyklého tvaru $\omega = ck$. Tím jsme dokázali, že v tekutinách se může šířit jen podélná akustická vlna a to bez disperze.

7.1.12 Rychlostní potenciál

V akustické aproximaci se obvykle předpokládá bezvírové proudění $\nabla \times \mathbf{v}_a = \mathbf{0}$, takže je možno zavést rychlostní potenciál vztahem $\mathbf{v}_a = \nabla \phi$. Tím se mnohé výpočty v akustice zjednoduší, přinejmenším proto, že již nemusíme pracovat s vektorovými veličinami, ale vystačíme s jedinou skalární funkcí. Eulerovu rovnici

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla p_a = \nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_a \right) = 0$$

můžeme nyní pohodlně zintegrovat, což nám dá Bernoulliho rovnici

$$\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_a = f(t).$$

Funkce $f(t)$ vpravo je v daný okamžik stejná pro celou tekutinu a obvykle se vztahuje do potenciálu ϕ , neboť to nemá vliv na rychlost. Bernoulliho rovnice se tak zjednoduší a můžeme z ní vypočítat akustický tlak podle vzorce

$$p_a = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Jestliže nyní dosadíme za hustotu $\rho_a = p_a/c^2 = -\rho_0/c^2 \partial \phi / \partial t$ do rovnice kontinuity $\partial \rho_a / \partial t + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_a = 0$, dostaneme vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi$$

také pro rychlostní potenciál.

7.1.13 Energie a akustická intenzita

Hustota akustické energie je rovna součtu hustoty kinetické energie a energie pružnosti

$$w_a = \frac{1}{2} \rho_0 \left(v_a^2 + \frac{p_a^2}{Z^2} \right) = \frac{1}{2} \rho_0 \left[(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Výkon akustické vlny prošlý plochou \mathbf{S} je zase roven skalárnímu součinu

$$P = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}_a = p_a \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{S} = \mathbf{I}_a \cdot \mathbf{S},$$

kde $\mathbf{F}_a = p_a \mathbf{S}$ značí sílu akustické vlny působící na element orientované plochy \mathbf{S} .

Vektor akustické intenzity tedy můžeme definovat vektorovým vzorcem

$$\mathbf{I}_a = p_a \mathbf{v}_a = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi.$$

Množství akustické energie, které projde uzavřenou plochou S za jednotku času, je rovno integrálu $P = \oint \mathbf{I}_a \cdot d\mathbf{S}$. O stejné množství $P = -dE/dt$ poklesne akustická energie $E = \int w_a dV$, která je obsažena v objemu V uzavřeném plochou S , takže platí **zákon zachování akustické energie** ve tvaru

$$\oint \mathbf{I}_a \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int w_a dV.$$

To lze vzhledem ke Gaussově integrální větě přepsat také do diferenciálního tvaru

$$\frac{\partial w_a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{I}_a = 0. \quad (7.11)$$

Příklad 7.3 Dokažte prostým dosazením za w_a a \mathbf{I}_a , že skutečně platí zákon zachování akustické energie (7.11).

Řešení: Dosadíme za

$$w_a = \frac{1}{2} \rho_0 \left[(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] \quad \text{a} \quad \mathbf{I}_a = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi,$$

a provedeme naznačené derivace, tak dostaneme

$$\rho_0 \left(\nabla \phi \cdot \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho_0 \left(\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \nabla \phi \right) = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi \right),$$

což je rovno nule vzhledem k platnosti vlnové rovnice $\partial^2 \phi / \partial t^2 = c^2 \nabla^2 \phi$. Tím je důkaz hotov.

7.2 Vlny konečné amplitudy

7.2.1 Nelineární vlnová rovnice

Ve většině případů vystačíme s akustickou aproximací. Pouze pro zvuky o velké intenzitě neplatí aproximace malých amplitud, pak hovoříme o **vlnách konečné amplitudy**. Odvodíme nelineární vlnovou rovnici pro takové vlny. Pro jednoduchost se omezíme na jedinou dimenzi x . Uvažujme opět sloupec vzduchu v trubici o průřezu S . Vyberme z něj element mezi dvěma řezy v místech x_1 a x_2 , tedy o tloušťce $\Delta x = x_2 - x_1$. Protože se vzduchem šíří jen podélná vlnění, posouvají se jednotlivé vrstvy vzduchu jen ve směru osy x , a to o hodnotu výchylky $u(x, t)$. Zkoumaný element tedy plave mezi vrstvami o souřadnicích $x_1 + u_1$ a $x_2 + u_2$.

Pohybová rovnice elementu vzduchu má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

a nalezneme se stejně, jako tomu bylo v případě rovnice (7.1). Abychom ji mohli řešit, musíme dodat rovnici kontinuity a stavovou rovnici, obě rovnice však musíme ponechat nelineární. **Rovnice kontinuity** je důsledek zákona zachování hmotnosti kmitajícího sloupce vzduchu a pro hustotu vzduchu z ní plyne rovnice

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \varepsilon},$$

kteřá se nalezneme stejně jako v případě rovnice (7.3) a kde $\varepsilon = \partial u / \partial x$ značí velkou poměrnou lokální deformaci. Rovnici kontinuity proto nemůžeme linearizovat, jako jsme to udělali v akustické aproximaci. Poslední rovnicí je **stavová rovnice** $p = p(\rho)$ svazující tlak a hustotu daného prostředí. Pomocí identity

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

můžeme gradient tlaku nahradit gradientem hustoty a vzhledem k rovnici kontinuity (7.3) dostaneme z pohybové rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_0}{1 + \varepsilon} \right).$$

Po provedení naznačené parciální derivace $\partial / \partial x$ již dostaneme hledanou **nelineární vlnovou rovnici** pro vlny konečné amplitudy ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{dp}{d\rho} \frac{1}{(1 + \partial u / \partial x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.12)$$

Efektivní rychlost zvukových vln už tedy není konstantní, ale závisí na amplitudě zvukové vlny vztahem

$$c_{\text{ef}}^2 = \frac{dp}{d\rho} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} = \frac{dp}{d\rho} \frac{1}{(1 + \partial u / \partial x)^2}.$$

7.2.2 Vlnová rovnice pro ideální plyn

Pro akustické vlny platí dobře **adiabatická aproximace**, která předpokládá, že kmity vzduchu probíhají natolik rychle, že je možno zanedbat výměnu tepla mezi elementem a okolím. Stavová rovnice ideálního plynu pro adiabatické děje má tvar **Poissonovy rovnice**

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa,$$

kde κ představuje **Poissonovu konstantu** známou z termodynamiky. Pro vzduch a jiné běžné plyny je $\kappa \approx 1.40$. Protože nyní je

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} = \frac{c^2}{(1 + \varepsilon)^{\kappa-1}},$$

bude efektivní rychlost intenzivních akustických vln záviset na jejich amplitudě vztahem

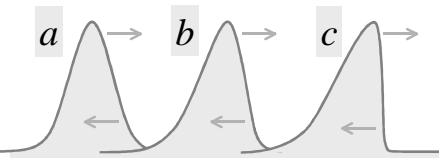
$$c_{\text{ef}}^2 = \frac{c^2}{(1 + \varepsilon)^{\kappa+1}} = c^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa+1},$$

kde $c = \sqrt{\kappa p_0 / \rho_0}$ je obvyklá rychlost zvuku o malé intenzitě. Akustická vlna se šíří rychleji $c_{\text{ef}} > c$ v místě stlačení $\rho > \rho_0$ a pomaleji $c_{\text{ef}} < c$ v místě zředění $\rho < \rho_0$.

Vlnová rovnice pro akustické vlny konečné amplitudy šířící se v ideálním plynu má tedy tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{(1 + \partial u / \partial x)^{\kappa+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Vlnová rovnice pro vlny konečné amplitudy závisí nejen na druhé derivaci podle souřadnice, ale i na první derivaci, což svědčí o přítomnosti disperze.



Nelineární tlaková vlna mění při šíření vzduchem svůj tvar. Původně symetrický profil (a) se postupně mění v téměř skokový profil (c) na čele vlny. Při dostatečné intenzitě a nelinearitě se tlaková vlna může přeměnit v rázovou vlnu.

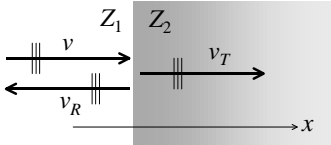
Nelinearita má za následek deformaci tvaru vlny během jejího šíření. Intenzivní vlna se nelineárním šířením deformuje tak, že oblast největšího zhuštění vzduchu se

pohybuje rychleji než oblasti menšího zhuštění vzduchu, tím se stává profil rázové vlny na přední straně vlny stále strmější. Nárůst akustického tlaku je nakonec tak strmý, že představuje prakticky skokovou změnu tlaku, kterou pak popisujeme jako **rázovou vlnu**.

7.3 Odraz a průchod zvuku rozhraním

7.3.1 Podmínky spojitosti

Ze zkušenosti je známo, že vlna se na rozhraní dvou prostředí částečně odrazí a částečně prochází do druhého prostředí. Protože platí zákon zachování energie, je zřejmé, že se odražená a lomená vlna určitým způsobem o původní energii rozdělí. Jestliže známe konkrétní mechanismus, jímž se vlna šíří, můžeme spočítat přesně, jaká část vlny se odrazí a jaká projde.



Ilustrace k odvození amplitud odrazivosti a propustnosti rozhraní.

Uvažujme pro jednoduchost kolmý dopad akustické vlny na rozhraní $x = 0$ dvou různých prostředí 1 a 2, kde se zvuk šíří rychlostmi c_1 a c_2 . Zleva necht' na rozhraní dopadá postupná rovinná vlna $v(t - x/c_1)$, která se současně částečně odrazí jako $v_R(t + x/c_1)$ a částečně projde jako $v_T(t - x/c_2)$. Indexy R a T jsou odvozeny ze slov latinského původu reflexe (odraz) a transmise (průchod). Všimněte si, že vlny tedy popisujeme pomocí akustické rychlosti a ne výchylky. Vlevo od rozhraní se současně nacházejí dopadající a odražená vlna, takže akustická vlna v prvním prostředí je popsána jejich součtem

$$v_1 = v \left(t - \frac{x}{c_1} \right) + v_R \left(t + \frac{x}{c_1} \right), \quad (7.13)$$

zatímco ve druhém prostředí je jen prošlá vlna

$$v_2 = v_T \left(t - \frac{x}{c_2} \right). \quad (7.14)$$

Abychom úspěšně *sešili* obě řešení dohromady, musíme znát **podmínky spojitosti** vlnění na rozhraní. Jde o dvě přirozené podmínky: na obou stranách rozhraní musí být stejná rychlost a stejný tlak, tj. musí platit

$$v_1 = v_2 \quad \text{a} \quad p_1 = p_2.$$

Dá se snadno ukázat, že první podmínka plyne z rovnice kontinuity a druhá z pohybové rovnice.

Podmínka spojitosti rychlostí na rozhraní $x = 0$ dává vzhledem k (7.13) a (7.14) rovnici

$$v(t) + v_R(t) = v_T(t).$$

Podmínka spojitosti tlaků na rozhraní je vzhledem k Ohmovu zákonu akustiky (7.9) rovna

$$Z_1 v(t) - Z_1 v_R(t) = Z_2 v_T(t).$$

Všimněte si, že u odražené vlny jdoucí doprava jsme správně obrátili znaménko na $-Z_1 v_R(t)$. Uvedené podmínky spojitosti vedou na soustavu dvou algebraických lineárních rovnic. Z nich snadno spočteme odraženou a prošlou vlnu na rozhraní

$$v_R(t) = \tilde{r}v(t) \quad \text{a} \quad v_T(t) = \tilde{t}v(t),$$

kde

$$\tilde{r} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{a} \quad \tilde{t} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

jsou **koeficient odrazivosti** a **koeficient propustnosti** rozhraní. Tyto koeficienty závisí jen na poměru akustických impedancí. Obecně přitom vždy platí $-1 \leq \tilde{r} \leq 1$ a $0 \leq \tilde{t} \leq 2$. Dokázali jsme, že odražená a prošlá vlna

$$v_R = \tilde{r}v \left(t + \frac{x}{c_1} \right) \quad \text{a} \quad v_T = \tilde{t}v \left(t - \frac{x}{c_2} \right),$$

mají stejný tvar jako vlna dopadající, jen mají jinou, obvykle menší, amplitudu.

Konkrétně pro rozhraní vzduch – voda je $Z_2/Z_1 \approx 4000$, proto je koeficient kolmé odrazivosti zvuku na vodní hladině $\tilde{r} \approx -0.9995$ a koeficient propustnosti $\tilde{t} \approx 0.0005$. Všimněte si rovněž, že při odrazu zvuku na vodě se mění polarita vlny, neboť koeficient odrazivosti je záporný $\tilde{r} \approx -1$. Fáze vlny se tedy posouvá o 180° , stejně jako tomu bylo u struny s pevným koncem. Při odrazu z druhé strany, tedy z vody do vzduchu, je naopak $\tilde{r} \approx +1$ a fáze ani polarita odražené vlny se nemění.

7.3.2 Odrazivost a propustnost

Podívejme se nyní na energetické poměry. Akustická intenzita dopadající vlny je rovna $I = Z_1 v^2$. Po průchodu vlny rozhraním platí $v_T = \tilde{t}v$ a její akustická intenzita je $I_T = Z_2 v_T^2$. **Propustnost** rozhraní je tedy

$$T = \frac{I_T}{I} = \frac{Z_2 v_T^2}{Z_1 v^2} = \frac{Z_2}{Z_1} \tilde{t}^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}.$$

Podobně pro odraženou vlnu je $v_R = \tilde{r}v$ a její akustická intenzita je $I_R = Z_1 v_R^2$. **Odrazivost** rozhraní je pak dána vzorcem

$$R = \frac{I_R}{I} = \frac{Z_1 v_R^2}{Z_1 v^2} = \tilde{r}^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2.$$

Pochopitelně platí $0 \leq R \leq 1$ a $0 \leq T \leq 1$ a také zákon zachování energie

$$I_R + I_T = I \quad \text{neboli} \quad R + T = 1,$$

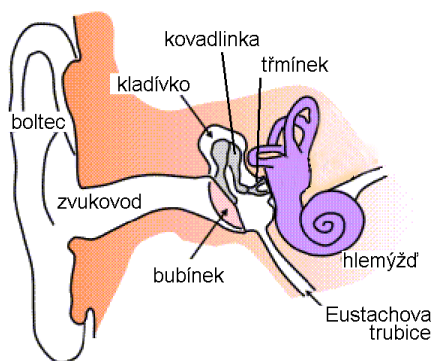
jak lze ověřit prostým dosazením.

Právě jsme ukázali, že vlna, která dorazí na rozhraní dvou prostředí, se zde částečně odráží a částečně prochází do druhého prostředí. Energetické poměry na rozhraní popisuje odrazivost a propustnost rozhraní, které jsou funkcemi akustických impedancí obou prostředí. Jsou-li akustické impedance velmi odlišné, většina energie zvukové vlny se odráží zpět. Jsou-li naopak podobné $Z_1 \approx Z_2$, bude $T \approx 1$, tj. většina výkonu vlny rozhraním prochází.

Tak například pro rozhraní vzduch – voda je propustnost $T \approx 4Z_1/Z_2 \approx 0.001$, tj. pokles asi 30 dB. To znamená, že naprostá většina akustické energie se na vodní hladině odráží zpět do vzduchu. To například vysvětluje, proč je u klidné vodní hladiny tak dobře slyšet, co se děje na protějším břehu. Zvuk se na hladině odráží mnohem lépe, než světlo na těch nej kvalitnějších zrcadlech!

7.3.3 Impedanční přizpůsobení ucha

Výrazný pokles intenzity zvuku přechodem ze vzduchu do vody asi o 30 dB vysvětluje, proč se nám svět pod vodou jeví tak nápadně tichý. **Impedanční přizpůsobení** zvuku při přechodu ze vzduchu do tělní tekutiny ve vnitřním uchu je úkolem ušních kůstek *kladívka*, *kovadlinky* a *třmínku*. Tyto drobné kůstky musí efektivně přenést zvukové vlny z jednoho prostředí, kterým je vzduch, do impedančně zcela odlišného prostředí, kterým je *lymfatická kapalina v labyrintu* vnitřního ucha.



Anatomie lidského ucha, povšimněte si především složení vnitřního ucha.

Lymfatická kapalina má zhruba stejné akustické vlastnosti jako voda. Systém ušních kůstek funguje jako maličká mechanická páka, která zpomalí rychlost a znásobí působící sílu. Tím vzroste poměr přenášeného tlaku a rychlosti a přiblíží se akustické impedanci vody. Díky tomu nakonec třmínek předá přes oválné okénko téměř celý akustický výkon do lymfatické kapaliny v labyrintu. Jakákoli mechanická závada na komplikované transformaci zvuku z vnějšího ucha až do *Cortiho orgánu* způsobuje hluchotu.

7.3.4 Harmonická vlna na rozhraní

Ze zkušenosti víme, že při dopadu světla na rozhraní dvou propustných prostředí se světlo částečně odrazí a částečně projde do druhého prostředí. To platí nejen pro světlo, ale pro jakékoliv vlnění včetně zvuku. Tak jako jsme odvodili vzorce pro propustnost a odrazivost zvuku při kolmém dopadu akustické vlny na rozhraní, můžeme tento výsledek rozšířit i na šikmý dopad. Pro jednoduchost budeme uvažovat jen harmonické vlny. Při odvozování vzorců pro propustnost a odrazivost dostaneme nečekaně znovu zákony lomu a odrazu.

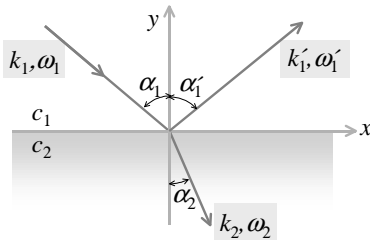
Nechť na rozhraní dané rovinou $y = 0$ dopadá pod úhlem α_1 k normále splývající s osou y rovinná vlna

$$v = A \sin(\omega_1 t - k_{1x}x - k_{1y}y).$$

Tato vlna se částečně odráží od rozhraní pod úhlem α'_1 a zároveň se částečně lomí pod úhlem α_2 do druhého prostředí, kde se však šíří rychlostí c_2 . Odraženou vlnu a lomenou vlnu popisují výrazy

$$v_R = A_R \sin(\omega'_1 t - k'_{1x}x - k'_{1y}y), \quad v_T = A_T \sin(\omega_2 t - k_{2x}x + k_{2y}y).$$

Předpokládáme tedy, že obě vzniklé vlny budou nadále postupnými rovinnými vlnami s nám zatím neznámými amplitudami, frekvencemi a směry šíření.



Ilustrace k odvození zákona lomu. Akustická vlna dopadá na rozhraní a částečně se odráží a částečně se láme do druhého prostředí.

Na rozhraní platí **okrajové podmínky**, které umožňují sešít řešení na hranici obou rozhraní. První okrajová podmínka říká, že normálová složka akustické rychlosti i na rozhraní musí být spojitou funkcí souřadnic a času $v_{1n} = v_{2n}$ a druhá, že také akustický tlak musí být spojitou funkcí souřadnic a času $p_1 = p_2$. Protože nad rozhraním máme současně dopadající a odraženou vlnu a pod rozhraním jen propuštěnou vlnu, mají okrajové podmínky tvar

$$v_n + v_{Rn} = v_{Tn} \quad \text{a} \quad p + p_R = p_T.$$

Podle Ohmova zákona akustiky je tlak úměrný akustické rychlosti, tj. platí $p = \pm Zv$. Dosadíme za tlak do druhé podmínky a dostaneme rovnici $Z_1 v - Z_1 v_R = Z_2 v_T$ nebo po dosazení za harmonické rovinné vlny

$$Z_1 A \sin(\omega_1 t - k_{1x}x) - Z_1 A_R \sin(\omega'_1 t - k'_{1x}x) = Z_2 A_T \sin(\omega_2 t - k_{2x}x).$$

Tato podmínka musí platit pro všechny časy t a pro všechny body x na rozhraní. To je možné jen tehdy, když budou argumenty všech tří sínů stejnými funkcemi x a t .

Musí tedy platit jednak podmínka $\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2$, tj. odražená a lomená vlna mají stejnou frekvenci jako vlna dopadající. Proto se také nemění výška tónu ani barva světla průchodem zvuku nebo světla různými prostředími. Dále musí být stejné i tečné složky vlnových vektorů dopadající, odražené a lomené vlny $k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}$. Dosadíme-li sem podle definice vlnového vektoru výrazy

$$k_{1x} = \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_1, \quad k'_{1x} = \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha'_1 \quad \text{a} \quad k_{2x} = \frac{\omega}{c_2} \sin \alpha_2,$$

dostaneme

$$\frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_1 = \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha'_1 = \frac{\omega}{c_2} \sin \alpha_2.$$

Odtud máme dvě podmínky, první dává známý **zákon odrazu** a druhá **zákon lomu**

$$\alpha_1 = \alpha'_1 \quad \text{a} \quad \frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}.$$

7.3.5 Odrazivost a propustnost při šikmém dopadu

Jsou-li splněny zákony odrazu a lomu, musí platit ještě rovnost amplitud na rozhraní. Tak dostáváme z podmínky spojitosti tlaků rovnici

$$Z_1 A - Z_1 A_R = Z_2 A_T.$$

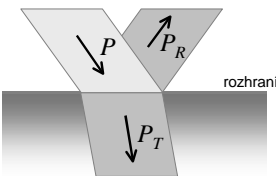
Nyní napíšeme podmínku spojitosti pro rychlosti. Akustická rychlost je vektor a na rozhraní se chová spojitě pouze její normálová složka. Platí tedy druhá podmínka $v \cos \alpha_1 + v_R \cos \alpha'_1 = v_T \cos \alpha_2$. Po dosazení za v , v_R a v_T a vzhledem k zákonu odrazu a lomu dostaneme pro amplitudy druhou rovnici

$$(A_1 + A_R) \cos \alpha_1 = A_T \cos \alpha_2.$$

Řešením této soustavy dvou algebraických rovnic vzhledem na amplitudu A dopadající vlny snadno najdeme a dostaneme

$$\tilde{t} = \frac{A_T}{A} = \frac{2Z_1 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_2 + Z_2 \cos \alpha_1} \quad \text{a} \quad \tilde{r} = \frac{A_R}{A} = \frac{Z_1 \cos \alpha_2 - Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_2 + Z_2 \cos \alpha_1}.$$

Jde o zobecnění již známých vzorců pro součinitele propustnosti a odrazivosti pro případ šikmého dopadu.



Výkon P akustické vlny se na rozhraní rozdělí na výkon odražené P_R a propuštěné P_T vlny.

Nyní se podíváme na energetické poměry na rozhraní. Tok akustické energie dopadající pod úhlem α_1 na plochu S rozhraní dostaneme jako

$$P = IS \cos \alpha_1 = Zv^2 S \cos \alpha_1.$$

Propustnost rozhraní je tedy podíl výkonu propuštěné a dopadající vlny

$$T = \frac{P_T}{P} = \frac{Z_2 v_T^2 \cos \alpha_2}{Z_1 v^2 \cos \alpha_1} = \frac{Z_2 \cos \alpha_2}{Z_1 \cos \alpha_1} \tilde{t}^2 = \frac{4Z_1 Z_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(Z_1 \cos \alpha_2 + Z_2 \cos \alpha_1)^2}$$

a **odrazivost** je podíl výkonu odražené a dopadající vlny

$$R = \frac{P_R}{P} = \frac{Z_1 v_R^2 \cos \alpha_1}{Z_1 v^2 \cos \alpha_1} = \tilde{r}^2 = \left(\frac{Z_1 \cos \alpha_2 - Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_2 + Z_2 \cos \alpha_1} \right)^2.$$

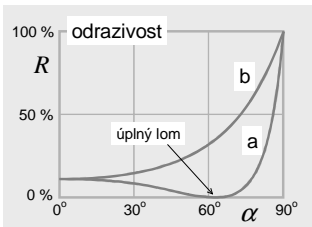
Pochopitelně platí zákon zachování energie $P = P_R + P_T$, tj. součet toho, co se odrazí a toho, co projde rozhraním, je roven energii dopadající vlny. Platí tedy i rovnice

$$R + T = 1.$$

Všimněte si, že pro $Z_1 \cos \alpha_2 = Z_2 \cos \alpha_1$ se žádný zvuk neodrazí³ a všechna energie projde do druhého prostředí. Nastane to při úhlu dopadu

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{c_1}{Z_1} \sqrt{\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{c_1^2 - c_2^2}}.$$

Případ **úplného lomu** může nastat jen v případě, kdy je současně $Z_1 > Z_2$ a $c_1 < c_2$ nebo pokud je současně $Z_1 < Z_2$ a $c_1 > c_2$. V opačném případě je závislost odrazivosti na úhlu dopadu monotónně rostoucí funkcí.



Odrazivost zvuku R na rozhraní dvou prostředí v závislosti na úhlu dopadu α_1 . Křivka (a) odpovídá případu $c_2/c_1 = 1/2$ a $Z_2/Z_1 = 2$ a křivka (b) případu $c_2/c_1 = 1/2$ a $Z_2/Z_1 = 1/2$. Všimněte si, že pro případ (a) a úhel dopadu $\alpha_1 \approx 63.4^\circ$ nastává úplný lom.

Podobné vzorce je možno odvodit pro propustnost a odrazivost světelných vln na optickém rozhraní. Ty jsou v optice známy jako **Fresnelovy vzorce**. Protože světlo je však na rozdíl od zvuku příčným vlněním, dostaneme dva různé vzorce pro každou z obou polarizací.

³Analogický případ je znám z optiky jako Brewsterův lom.

7.3.6 Evanescentní vlna, totální reflexe

Při lomu od kolmice, tj. do prostředí s větší rychlostí šíření $c_1 < c_2$, je úhel lomu vždy větší než úhel dopadu a při určitém úhlu dopadu, zvaném **mezní úhel**, se úhel lomu stává úhlem pravým, tj. $\alpha_2 = 90^\circ$. Označíme-li mezní úhel jako α_M , dostaneme pro něj ze zákona lomu jednoduchý vzorec

$$\sin \alpha_M = \frac{c_1}{c_2}.$$

Co se stane, když vlna dopadá na rozhraní pod úhlem větším, než je mezní úhel? Odpověď na tuto prostou otázku není tak jednoduchá. Především, ze zákona lomu dostaneme, že úhel lomu α_2 bude ryze imaginární, platí totiž

$$\sin \alpha_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \alpha_1 > 1, \quad \text{a proto} \quad \cos \alpha_2 = -i \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_M}.$$

Také součinitel odrazivosti \tilde{r} a propustnosti \tilde{t} v tomto případě vychází imaginární. Snadno se ukáže, že součinitel odrazivosti je roven komplexní jednotce, tj. platí $\tilde{r} = e^{-i\theta}$, kde pro argument θ platí

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\cos \alpha_1}{\sqrt{\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_M}}.$$

Pokud jde o odrazivost, platí $R = |\tilde{r}|^2 = 1$, což znamená, že plných 100 % energie akustické vlny se odráží zpět do prvního prostředí podle zákona odrazu, přitom se fáze odražené vlny posouvá o úhel θ . Pokud tedy na rozhraní dopadá akustická vlna pod úhlem větším, než je úhel mezní, nehovoříme již o lomu, ale o **úplném odrazu** vlny.

I když jsme ukázali, že všechna energie vlny se na rozhraní odráží zpět do prvního prostředí, neznamená to ještě, že lomená vlna musí mít všude nulovou amplitudu. Skutečně, součinitel odrazivosti je $\tilde{t} \neq 0$, proto také amplituda lomené vlny je $A_2 = \tilde{t}A_1 \neq 0$. Lomená vlna je pak dána vzorcem

$$v_2 = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x \sin \alpha_2 + k_2 y \cos \alpha_2)} = \tilde{t}A_1 e^{y/\Delta} e^{i(\omega t - k_1 x \sin \alpha_1)}.$$

Odtud vidíme, že lomená vlna se šíří podél rozhraní $y = 0$ jako postupná vlna rychlostí $c = \omega/k_1 \cos \alpha_1 = c_1/\cos \alpha_1$, ale s hloubkou $y < 0$ její amplituda exponenciálně slábne. Parametr

$$\Delta = \frac{1}{k_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_M}}$$

se nazývá **hloubka vniku** a má řádově velikost odpovídající vlnové délce dopadající akustické vlny. Právě popsaná lomená vlna klouzající po rozhraní je případem zvláštní vlny, která se nazývá obecně **evanescentní vlna**. Taková vlna přenáší energii pouze podél rozhraní, zatímco směrem do zakázaného prostředí je exponenciálně tlumena.

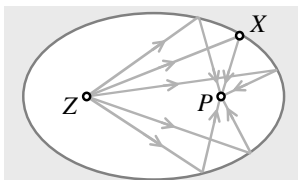
7.3.7 Ozvěna a akustika hudebních sálů

Zvuk se po odrazu od kolmé stěny vrací, takže je možno slyšet **ozvěnu** neboli **echo**. Podmínkou však je, aby se zvuk vrátil později než za 1/10 sekundy. To znamená, že zvuk se musí odrážet na stěně vzdálené alespoň 17 m. V opačném případě splyne ozvěna s původním zvukem.

Ozvěna překáží srozumitelnosti řeči, a proto se jí snažíme v hudebních a přednáškových sálech co možná nejvíce potlačit. Dělá se to tak, že se stěny a stropy obkládají materiály, které velmi dobře absorbují zvuk. Například na podlahu se kladou koberce a na stěny zvlněné závěsy. Také nábytek a přítomnost posluchačů ozvěnu a dozvuk potlačují. Holé stěny zvuk naopak velmi dobře odrážejí, takže ozvěna je v takových místnostech těžko přehlédnutelná.

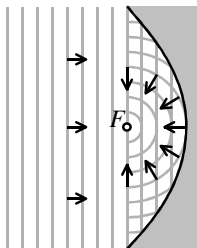
7.3.8 Fokuzace zvuku

Zvukové vlny je možno podobně jako světlo soustřeďovat a rozptylovat pomocí zakřivených ploch. Vhodným tvarem klenuté duté plochy je možno soustředit zvukové vlny, podobně jako světlo na zrcadle, do jediného bodu zvaného **ohnisko**,⁴ kde také dochází k výraznému zesílení intenzity akustické vlny.



Fokuzace sférické zvukové vlny vycházející ze zdroje Z do bodu P pomocí eliptického zrcadla. Body Z a P jsou ohniska zrcadla, proto platí $|ZX| + |XP| = 2a$.

Například eliptické zrcadlo zachytí zvuk vycházející z bodového zdroje Z , který se nachází v jednom z ohnisek, do druhého ohniska P . K zesílení zvuku dojde proto, že všechny vlny vycházející z bodového zdroje Z a odražené na různých místech X zrcadla dorazí nakonec do ohniska P současně, což je důsledek definiční vlastnosti elipsy $|ZX| + |XP| = 2a$, kde a je velká poloosa elipsy.



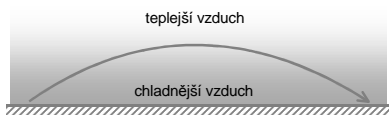
Fokuzace zvuku do ohniska paraboly.

Podobně parabolické zrcadlo zachytí rovinnou vlnu (zdroj je v nekonečnu) a soustředí ji do ohniska F . Zesílení zvuku je přitom zhruba rovno S/λ^2 , kde S je

⁴Pojem ohnisko je převzat z optiky a souvisí s ohněm, latinský původ slova *focus* je totiž ohniště, krb. Již v antice bylo známo, že pomocí dutých zrcadel je možno sluneční paprsky soustředit tak, že v ohnisku zrcadla je jimi možno zapálit oheň.

čelní plocha parabolického zrcadla a λ vlnová délka zvuku. Protože se zde využívá analogie s optikou, nazývá se tato část akustiky **geometrická akustika**.

Pro zachycení co největšího množství zvuku se v době před vznikem moderní elektroniky používalo naslouchadel ve tvaru velkých trychtýřů. Prakticky stejný tvar má i zvukovod našeho vnějšího ucha. S použitím dvojice takových trychtýřů bylo možno relativně přesně určovat i směr zdroje zvuku. To se využívalo ještě za druhé světové války u protiletadlového dělostřelectva v noci. Z teorie plyne, že optimální tvar trychtýře má být popsán exponenciální funkcí. Obrácením trychtýře se dostane difuzor, který slouží k lepšímu usměrnění toku zvuku ze zdroje do předepsaného směru.



Při teplotní inverzi se zvuk může odrazit na vrstvě teplejšího vzduchu.

Zvuková vlna se může odrážet také na teplejších vrstvách vzduchu, a pak, například při teplotní inverzi, je možno velmi dobře slyšet zvuk i z tak vzdálených zdrojů, které za normálních podmínek slyšet nejsou. Příčinou tohoto jevu je úplný odraz. Akustický paprsek se láme podle zákona lomu

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2},$$

a pokud paprsek dopadne na rozhraní tak, že vychází $\sin \alpha_2 > 1$, nemůže se paprsek zlomit do druhého prostředí. V tom případě pozorujeme **úplný odraz** neboli **totalní reflexi**. Například na rozhraní vrstev vzduchu s rozdílem teplot $\Delta T \approx 10^\circ\text{C}$, bude poměr rychlostí šíření zvuku $c_1/c_2 \approx 0.98$, takže úplný odraz zvuku nastává už pro úhly dopadu větší než 80° .

7.3.9 Dutinový rezonátor

Uvažujme dutinový rezonátor s tuhými stěnami ve tvaru kvádra o rozměrech $a \times b \times c$. Hledáme harmonická řešení, která popisují možná chvění vzduchu v rezonátoru. Řešíme skalární vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 \phi,$$

kde předpokládáme harmonické řešení $\phi(x, y, z, t) = U(x, y, z) \cos \omega t$. Po dosazení dostaneme Helmholtzovu rovnici

$$\nabla^2 U + \frac{\omega^2}{c_0^2} U = 0.$$

Její řešení hledáme standardní Fourierovou metodou separace proměnných, tj. řešení očekáváme ve tvaru součinu tří funkcí $U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Po dosazení do Helmholtzovy rovnice dostaneme tři obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{X''}{X} = -k_1^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_2^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -k_3^2,$$

a pro koeficienty k_1, k_2 a k_3 platí opět disperzní relace $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \omega^2/c_0^2$. Řešení těchto rovnic jsou harmonické funkce, tj. například $X = C \cos k_1 x + S \sin k_1 x$.

Nyní se podíváme blíže na okrajové podmínky. Předpokládáme tuhé stěny, tj. normálové složky rychlosti musí být na stěnách rovny nule, takže platí $v_x(0, y, z) = v_x(a, y, z) = 0$, $v_y(x, 0, z) = v_y(x, b, z) = 0$ a $v_z(x, y, 0) = v_z(x, y, c) = 0$. Rychlost souvisí s rychlostním potenciálem ϕ vztahem $\mathbf{v} = \nabla\phi$, platí tedy $v_x = \partial\phi/\partial x$, $v_y = \partial\phi/\partial y$ a $v_z = \partial\phi/\partial z$. Když to vše zohledníme, dostaneme nakonec hledané harmonické řešení pro potenciál ve tvaru

$$\phi_{mno} = A_{mno} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \cos \frac{\pi o z}{c} \cos \omega_{mno} t,$$

kde m, n a o jsou celá čísla $0, 1, 2, \dots$ a pro frekvenci z disperzní relace máme rovnici

$$\omega_{mno} = \pi c_0 \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{o^2}{c^2}}.$$

V akustickém rezonátoru se tedy mohou realizovat jen ta chvění vzduchu, která splňují tuto podmínku. Povolená chvění se nazývají **vibrační módy** nebo prostě **vidy**.

Pro akustický tlak dostaneme vzorec

$$p_{mno} = -\rho_0 \frac{\partial \phi_{mno}}{\partial t} = \rho_0 \omega_{mno} A_{mno} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \cos \frac{\pi o z}{c} \sin \omega_{mno} t,$$

tedy na stěnách rezonátoru budou tlakové kmitny. V případě rychlosti je podobné tvrzení o něco komplikovanější vzhledem na vektorový charakter akustické rychlosti. Platí, že normálové složky rychlosti mají na stěnách uzlové plochy, tj. složka v_x má uzlovou plochu na stěně $x = 0$ a $x = a$, složka v_y má uzlovou plochu na stěně $y = 0$ a $y = b$ a v_z má uzlovou plochu na stěně $z = 0$ a $z = c$. Nelze ale říci, že vektor rychlosti \mathbf{v} má uzlovou plochu na některé ze stěn.

Příklad 7.4 Najděte první vlastní akustické kmitočty vzduchové dutiny tvaru krychle o rozměru $a = 10$ cm.

Řešení: Frekvence jsou dány vzorcem

$$f_{mno} = \frac{c}{2a} \sqrt{m^2 + n^2 + o^2},$$

kde c je rychlost zvuku. Takto dostaneme řadu vlastních kmitočtů $f_{100} = f_{010} = f_{001} \approx 1.7$ kHz, $f_{110} = f_{101} = f_{011} \approx 2.4$ kHz, $f_{111} \approx 2.9$ kHz, $f_{200} = f_{020} = f_{002} \approx 3.4$ kHz, $f_{210} = f_{201} = f_{021} = f_{120} = f_{102} = f_{012} \approx 3.8$ kHz atd.

7.3.10 Počet módů

Pokud je dutina mnohem větší než vlnová délka stojatých vln, je možno spektrum možných stojatých vln v dutině pokládat za kvazispojité. Počet módů stojatých zvukových vln s vlnovým vektorem menším než k , případně s frekvencí nižší než ω , nezávisí na tvaru dutiny, ale jen na jejím objemu V vzorcem

$$N(k) \approx \frac{k^3 V}{6\pi^2}, \quad \text{příp.} \quad N(\omega) \approx \frac{\omega^3 V}{6\pi^2 c^3}.$$

Vzorec se nejnázne odvodí pro dutinu tvaru krychle o rozměru L . Podmínka pro povolené vlnové vektory \mathbf{k} stojatých vln představuje body

$$(k_1, k_2, k_3) = \frac{\pi}{L} (m, n, o),$$

kteří tvoří pravidelnou trojrozměrnou mříž v prostoru vlnových čísel. Vzdálenost sousedních bodů mříže je π/L . Počet bodů $N(k)$ majících velikost vlnového vektoru menší než zvolená hodnota k je zřejmě roven poměru objemu osminy koule o poloměru k a objemu jediné buňky $(\pi/L)^3$, platí tedy

$$N(k) = \frac{\frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} k^3}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} = \frac{k^3 L^3}{6\pi^2} = \frac{k^3 V}{6\pi^2}.$$

S rostoucím vlnovým číslem počet módů velmi rychle roste. Když zde nahradíme vlnový vektor frekvencí podle vzorce $k = \omega/c$, dostaneme také vzorec $N(\omega) = \omega^3 V / 6\pi^2 c^3$ pro počet akustických módů v dutině objemu V s frekvencí menší než ω .

Počet akustických módů v dutině je neomezený, protože módovými čísly mohou být všechna přirozená čísla. Protože však skutečné prostředí není kontinuum, ale je složeno z diskretních atomů a molekul, bude spektrum možných akustických kmitů nakonec vždy shora omezeno hodnotou

$$k_{\max} \approx \frac{\pi}{a} \quad \text{nebo} \quad \omega_{\max} \approx \frac{\pi c}{a},$$

kde a je vzdálenost mezi sousedními atomy. Pro běžné plyny tedy bude $f_{\max} \approx 10^{12}$ Hz a pro kapaliny a tuhé látky $f_{\max} \approx 10^{13}$ Hz. Zvuky o vyšší frekvenci se proto prostředím nemohou šířit.

7.3.11 Tepelné kmity

I když v dutině není přítomen žádný zdroj zvuku, přesto bude každý akustický mód v důsledku tepelných fluktuací molekul kmitat. Podle klasického **ekvipartičního teorému** je tepelná energie každého vibračního módu stejná a je rovna $E_0 = k_B T$, kde $k_B \approx 1.381 \times 10^{-23}$ J/K je **Boltzmannova konstanta** a T je absolutní teplota. Energie jednoho módu je za pokojové teploty $T \approx 300$ K zhruba rovna

$$E_0 \approx 0.025 \text{ eV} \approx 4 \times 10^{-21} \text{ J}.$$

Objemová hustota energie tepelných kmitů v akustické oblasti je součtem tepelných energií všech akustických módů

$$w_a = \frac{E}{V} \approx \frac{k_B T}{V} N(\omega) \approx \frac{k_B T}{6\pi^2 c^3} \omega^3.$$

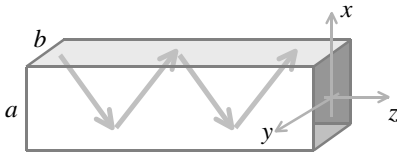
Numericky tak pro všechny akustické módy $f < 20$ kHz vychází hustota energie $w_a \approx 4 \times 10^{-15}$ J/m³ a tomu odpovídá izotropní akustická intenzita

$$I_a = \frac{1}{4} c w_a \approx 3 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2.$$

Jistě není náhoda, že tato hodnota se blíží prahové hodnotě slyšení našeho ucha $I_0 \approx 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Je zřejmé, že ucho nepotřebuje mít větší citlivost, než je I_0 , protože zvuk o nižší intenzitě by stejně v tepelném šumu zanikl.

7.3.12 Dutinový vlnod

V mikrovlnné technice se používají dutinové vlnodody, tedy jakési duté roury z vodivého plechu. V optice se používají planární vlnodody nebo optická vlákna fungující na principu úplného odrazu. Světlo je možno vést i mezi dvěma odraznými plochami. Také akustické vlny je možno díky vysoké odrazivosti stěn vést zvukovodem. Příkladem akustického vlnododu je zvukodod vnějšího ucha, který vede zvuk k ušnímu bubínku.



Akustická vlna vedená zvukovodem s obdélníkovým profilem $a \times b$ ve směru osy z .

Omezme se pro jednoduchost na vlnodod s obdélníkovým profilem, jehož stěny tvoří dvě rovnoběžné odrazné desky kolmé k ose x ležící ve vzdálenosti a od sebe a dvě rovnoběžné desky kolmé k ose y vzdálené o b . Vedená vlna se šíří ve směru osy vlnododu, musí mít tedy tvar postupné vlny ve směru osy z

$$\phi = U(x, y) \cos(\omega t - kz).$$

Nevíme však zatím, jaký tvar má příčný profil $U(x, y)$ vlny. Najdeme jej z vlnové rovnice $\partial^2 \phi / \partial t^2 = c_0^2 \nabla^2 \phi$, do které dosadíme předpokládané řešení ϕ . Dostaneme Helmholtzovu rovnici

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 \right) U = 0.$$

Tu řešíme opět Fourierovou metodou separace proměnných, tj. předpokládáme $U(x, y) = X(x)Y(y)$ a dostaneme dvě obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{X''}{X} = -k_1^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_2^2, \quad \text{kde} \quad k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2.$$

Rovnice mají harmonická řešení. Na stěnách vlnododu však musí být normálové složky akustické rychlosti $\mathbf{v} = \nabla \phi$ rovny nule, proto odtud dostaneme dvě podmínky na možná k_1 a k_2

$$k_1 a = \pi m \quad \text{a} \quad k_2 b = \pi n, \quad \text{kde} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

jsou módová čísla. Vlnododem ve směru osy z vedená vlna (mód) má tedy tvar

$$\phi_{mn} = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - kz)$$

a **disperzní relace** vedené vlny zní

$$\omega = c_0 \sqrt{k^2 + \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}.$$

Vzhledem k podmínce $k^2 \geq 0$ je zřejmé, že počet vlnovodem vedených módů (m, n) při daném kmitočtu ω je vždy konečný, neboť je omezen podmínkou

$$\omega^2 \geq c_0^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Protože disperzní relace je nelineární, budou se fázová a grupová rychlost od sebe lišit a obě rychlosti budou navíc záviset na konkrétním vedeném módu, tj. na modových číslech m a n . Fázová rychlost vedené vlny není rovna rychlosti zvuku c_0 , ale je větší

$$c = \frac{\omega}{k} = c_0 \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{k^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \geq c_0.$$

Naopak grupová rychlost vedené vlny je menší než rychlost zvuku

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{k^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}} \leq c_0$$

a obě rychlosti jsou svázány podmínkou $cu = c_0^2$. Všimněte si, že čím vyšší mód (m, n) budeme uvažovat, tím větší význam při šíření vlny zvukovodem bude disperse mít.

7.4 Intenzita a hlasitost zvuku

7.4.1 Akustická intenzita

Jak věděl již Galileo, hlasitost a intenzita zvuku je určena amplitudou zvukové vlny. Při měření intenzity zvuku však obvykle neměříme amplitudu výchylky, ale amplitudu akustického tlaku. Připomeňme, že akustický tlak p_a je časově proměnná složka tlaku superponovaná na atmosférický tlak p_0 , platí tedy $p = p_0 + p_a$. Pro běžné zvuky má akustický tlak hodnotu $p_a \approx 10^{-5} - 10^2$ Pa, je tedy o mnoho řádů nižší než barometrický tlak $p_0 \approx 10^5$ Pa. Akustický tlak se tudíž nedá měřit obyčejným barometrem, jednak proto, že na to není dostatečně citlivý a dále proto, že střední hodnota akustického tlaku je stejně nulová.

Vztah mezi amplitudou akustického tlaku a amplitudou rychlosti postupné vlny je dán Ohmovým zákonem, pro efektivní hodnoty platí $p_{\text{ef}} = Zv_{\text{ef}}$, kde $Z = \rho c \approx 430$ Pa s / m je **akustická impedance vzduchu**. **Hustota akustické energie** se spočte podle vzorce $w_a = \rho v_{\text{ef}}^2$, nás ale zajímá především **akustická intenzita**

$$I_a = Zv_{\text{ef}}^2 = \frac{p_{\text{ef}}^2}{Z}.$$

Hustota akustické energie se měří v jednotkách J/m^3 a akustická intenzita v jednotkách W/m^2 . Mezi hustotou akustické energie a akustické intenzity rovinné vlny platí jednoduchý vztah $I_a = w_a c$. Z těchto vzorců můžeme doložit, že běžným hodnotám hlasitosti zvuků odpovídají akustické rychlosti a akustické intenzity

$$v_{\text{ef}} \approx 10^{-7} - 10^0 \text{ m/s} \quad \text{a} \quad I_a \approx 10^{-12} - 10^2 \text{ W/m}^2.$$

Nejtíší zvuk, který lidské ucho ještě registruje, nazýváme **prahem slyšení**. Velikost této **prahové akustické intenzity** je rovna $I_0 \approx 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Snadno dopočteme, že příslušná prahová hodnota akustického tlaku je $p_0 = \sqrt{\rho c I_0} \approx 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$.

Akustický výkon P prošlý plochou S skloněnou o úhel θ vůči směru akustického záření je roven součinu

$$P = \mathbf{I}_a \cdot \mathbf{S} = I_a S \cos \theta.$$

Celkový výkon zdroje zvuku pak dostaneme integrací akustické intenzity přes plochu, v níž se zdroj zvuku nachází, platí tedy

$$P = \oint \mathbf{I}_a \cdot d\mathbf{S}.$$

Uvažujme malý izotropní zdroj zvuku o výkonu P , platí tedy $I_a \approx \text{konst.}$ Pokud jej obepneme uzavřenou plochou o poloměru r , musí pro akustický výkon prošlý touto plochou platit $P = I_a S = 4\pi r^2 I_a$. Akustická intenzita od všesměrového zdroje proto klesá se čtvercem vzdáleností podle vzorce

$$I_a = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Výsledek je zcela v souladu s tím, co víme o sférické vlně, jejíž amplituda klesá jako $1/r$, a její intenzita proto klesá jako $1/r^2$. V následující tabulce jsou uvedeny typické hodnoty akustického výkonu běžných hudebních nástrojů.

nástroj	výkon	nástroj	výkon
housle	1 mW	klavír	500 mW
flétna	50 mW	komorní orchestr	10 W
kontrabas	100 mW	symfonický orchestr	80 W
trubka	400 mW		

Příklad 7.5 Určete amplitudu kmitů vzduchu při nejtíší zvuku, který ucho ještě vnímá, tj. při prahu slyšení.

Řešení: Prahu slyšení odpovídá akustická intenzita $I_0 \approx 10^{-12} \text{ W/m}^2$, tomu odpovídá prahová hodnota akustického tlaku $p_0 = \sqrt{Z I_0} \approx 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ a prahová hodnota akustické rychlosti $v_0 = \sqrt{I_0/Z} \approx 5 \times 10^{-8} \text{ m/s}$, kde $Z = \rho c \approx 430 \text{ Pa s/m}$ značí akustickou impedanci vzduchu. Při frekvenci $f = 3 \text{ kHz}$ je tedy amplituda kmitů $A_0 = v_0/\omega \approx 3 \times 10^{-12} \text{ m}$. Z tohoto výsledku je zřejmé, že lidské ucho je velmi citlivý detektor, který vnímá dokonce chvění vzduchu o amplitudě stokrát menší než rozměry molekul vzduchu!

Příklad 7.6 Určete amplitudu kmitů vrstev vzduchu u velmi hlasitého zvuku o intenzitě $I_a \approx 100 \text{ W/m}^2$.

Řešení: Pro amplitudu kmitů platí $A_0 = \sqrt{I_0/Z}/\omega$, takže pro nejhlubší tón $f \approx 20 \text{ Hz}$ dostaneme $A_0 \approx 4 \text{ mm}$. Tyto kmity je možno pohodlně sledovat neozbrojenýma očima, stačí se pozorně dívat na chvění membrány hlubokotónového reproduktoru.

7.4.2 Decibel

V elektrotechnice se k popisu relativního poměru dvou veličin, například zesílení, odstupu signál-šum apod., běžně užívá logaritmická míra. Příslušnou jednotkou určující poměr mezi veličinami je **decibel**, značí se dB. Jednotka dostala své jméno podle vynálezce telefonu ALEXANDRA GRAHAMA BELLA. Z pohledu fyziky nejde o skutečnou fyzikální jednotku, protože decibel má, podobně jako radián, steradián nebo obloukový stupeň, rozměr 1. Hodnota 10 dB, tj. jeden **bel**, odpovídá poměru veličin 10 : 1, hodnota 20 dB odpovídá poměru 100 : 1 atd.

7.4.3 Hladina akustické intenzity

Interval hodnot akustické intenzity je velmi rozsáhlý, a proto je výhodné použít k popisu intenzity logaritmickou míru. Navíc, lidské smysly reagují na smyslové podněty rovněž logaritmicky, tedy pokud roste podnět řadou geometrickou, podráždění příslušného smyslu roste jen řadou aritmetickou. Tato zákonitost se v akustice nazývá **Weber–Fechnerův zákon**. V jiné formulaci zní:

Změna podnětu, která je zaznamenána, je rovna stálému zlomku velikosti podnětu.

Zákon formuloval roku 1834 ERNST HEINRICH WEBER a roku 1858 jej důkladnými měřeními potvrdil GUSTAV THEODOR FECHNER.

Psychofyzilogickou mírou intenzity zvuku je **hlasitost**. K ní nejbližší fyzikální veličinou je **hladina akustické intenzity** L_a , kterou měříme v decibelech. Podle Weber-Fechnerova zákona je malý nárůst hladiny intenzity dL_a roven relativnímu nárůstu akustické intenzity I_a

$$dL_a \approx \frac{dI_a}{I_a},$$

odtud integrací dostaneme

$$L_a = A + B \log I_a.$$

Pokud však chceme hladinu akustické intenzity měřit v decibelech, musíme volit $B = 10$ a pokud dále požadujeme, aby hladina akustické intenzity byla nulová právě pro práh slyšení I_0 , musíme volit $A = -10 \log I_0$. Tak dospíváme ke známé definici **hladiny akustické intenzity**

$$L_a = 10 \log \frac{I_a}{I_0}.$$

Zde $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ představuje referenční akustickou intenzitu, která odpovídá **prahu slyšení** lidského ucha při kmitočtu asi 1 kHz. Všechny zvuky, které ucho slyší, mají podle definice hladinu akustické intenzity kladnou. Hladina intenzity při **prahu bolesti** je kolem 140 dB, jejich akustická intenzita je tedy $I_a \approx 100 \text{ W/m}^2$.

Jako základní jednotka byl zvolen desetkrát menší decibel rovněž proto, že jeden decibel je zhruba nejmenší rozdíl hladin akustické intenzity, který je lidské ucho ještě schopno rozlišit. V oblasti středních intenzit je však ucho ještě o něco selektivnější, takže lidské ucho je schopno od sebe odlišit celkem asi 325 stupňů různé intenzity zvuku.

Při současném působení dvou nekoherentních zvuků je výsledná intenzita dána součtem intenzit $I = I_1 + I_2$, ale ne součtem hladin intenzit $L \neq L_1 + L_2$. Dává-li například jeden reproduktor hladinu intenzity $L_1 = 100 \text{ dB}$ a druhý rovněž $L_2 = 100 \text{ dB}$, pak výsledná hladina hlasitosti bude jen $L = 103 \text{ dB}$ a ne 200 dB. Je to proto, že odpovídající intenzity jsou

$$I_1 = I_2 = 10^{-2} \text{ W/m}^2 \quad \text{a} \quad I = I_1 + I_2 = 2 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2,$$

a proto

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = L_1 + 10 \log 2 \approx 103 \text{ dB}.$$

Pamatujte si, zdvojnásobení intenzity způsobí nárůst hladiny intenzity o 3 dB.

Příklad 7.7 Během koncertu metalové skupiny je na pódiu zapojeno současně 12 stejných reproduktorů. Zpěvák však zakopl o kabel napájějící jeden reproduktor a přetrhl jej. O kolik poklesla hladina intenzity zvuku?

Řešení: Místo 12 reproduktorů bude nyní hrát jen 11 reproduktorů, takže hladina intenzity zvuku poklesne o $\Delta L = 10 \log(12/11) \approx 0.87 \text{ dB}$, čehož si nejspíše nikdo z posluchačů ani nevšimne.

7.4.4 Princip měření akustické intenzity

Akustickou intenzitu nelze měřit přímo, protože barometr nedokáže zaznamenat tak rychlé změny akustického tlaku. Výjimkou jsou velmi intenzivní zvuky, které se projeví změnou stacionárního tlaku vlivem nelinearity stavové rovnice. Metodu založenou na měření časově stálého příspěvku tlaku akustického záření navrhl roku 1882 LORD RAYLEIGH, vlastním jménem JOHN WILLIAM STRUTT. Přístroje, které měří akustický tlak přímo, se nazývají **absolutní akustické radiometry**. Kmitá-li vzduch adiabaticky, platí pro velikost tlaku nelineární rovnice

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\kappa} = \frac{p_0}{(1 + \varepsilon)^\kappa},$$

kde p_0 je původní barometrický tlak, který naměříme za nepřítomnosti zvuku. Rozvineme-li nelineární výraz vpravo v Taylorovu řadu, dostaneme

$$p = p_0 \left[1 - \kappa \varepsilon + \frac{1}{2} \kappa (\kappa + 1) \varepsilon^2 + \dots \right].$$

Radiometr měří střední hodnotu tlaku $\langle p \rangle$, proto oscilující druhý člen v rozvoji ke stacionárnímu akustickému tlaku nepřispívá. V akustické aproximaci tedy žádný tlak akustického záření nenaměříme. Teprve třetí, kvadratický člen ke stacionárnímu akustickému tlaku přispěje. Střední **tlak akustického záření** je tedy roven

$$\langle p_a \rangle = \langle p \rangle - p_0 \approx \frac{1}{2} \kappa (\kappa + 1) p_0 \langle \varepsilon^2 \rangle.$$

Pro postupnou harmonickou vlnu je $\varepsilon = \partial u / \partial x = v_a / c$, takže $I_a = Z \langle v_a^2 \rangle = Z c^2 \langle \varepsilon^2 \rangle$, a protože $c^2 = \kappa p_0 / \rho_0$, je tlak akustického záření roven

$$\langle p_a \rangle \approx \frac{1 + \kappa}{2c} I_a.$$

Pro hladinu intenzity $L_a \approx 140$ dB, tj. pro intenzitu $I_a \approx 100$ W/m², je tlak akustického záření ještě stále relativně malý $\langle p_a \rangle \approx 0.35$ Pa. Měřitelné hodnoty zaznamená radiometr až pro mnohem větší intenzity, které jsou běžně dosažitelné v oblasti ultrazvuku.

Citlivější radiometr zvaný **Rayleigho přístroj** pochází rovněž z roku 1882 a funguje tak, že měří silový moment, kterým intenzivní zvuková vlna působí na lehkou kruhovou destičku o poloměru $r \approx 10$ mm zavěšenou na jemném torzním vlákně. Silový moment způsobený obtékáním vzduchu kolem skloněné destičky závisí na čtverci akustické rychlosti, a proto jej lze naměřit. Moment se snaží pootočit kruhovou destičku do směru kolmého na směr šíření zvukové vlny a jeho velikost je rovna

$$M = \frac{4}{3} \rho r^3 \langle v_a^2 \rangle \sin 2\alpha = \frac{4}{3} \frac{I_a r^3}{c} \sin 2\alpha.$$

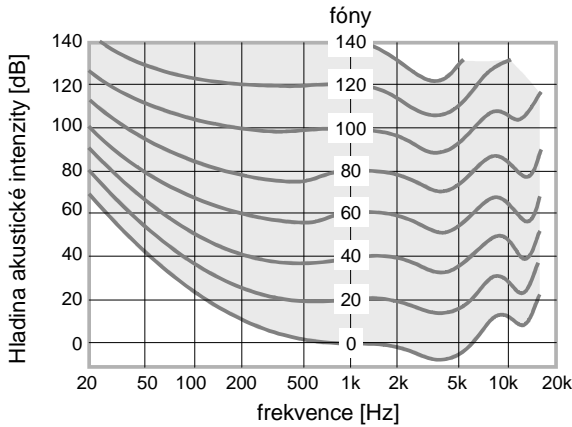
Největší otáčivý moment nastává při sklonu $\alpha = 45^\circ$. Silový moment je rovněž měřitelný až při vyšších intenzitách zvukového záření.

Pro praktická měření středních intenzit používáme **nepřímé radiometry**, kterými jsou nejčastěji různé druhy mikrofónů. Nejvhodnější je pro svoji lineární charakteristiku **mikrofón elektrostatický**. Tvoří jej tenká elektricky vodivá membrána, která se v přítomnosti zvuku rozechvěje, a tím periodicky mění kapacitu mezi membránou a pevnou druhou destičkou tvořící společně vzduchový kondenzátor. Elektrický signál se pak patřičně zesílí a pohodlně vyhodnotí elektronicky.

7.4.5 Hladina hlasitosti zvuku

Ucho registruje akustické vlny jako zvuk, jen pokud mají frekvence z intervalu 20 Hz až 20 kHz. Ucho přitom není na všechny frekvence stejně citlivé. Pokusy ukazují, že například zvuk o intenzitě 40 dB a o frekvenci 1 kHz se zdá být zhruba stejně hlasitý jako zvuk o intenzitě 70 dB, ale o frekvenci 50 Hz nebo jako zvuk o intenzitě 90 dB, ale o frekvenci 20 Hz. Ucho je pro akustické frekvence v okolí 3 kHz nejcitlivější a k okrajům zvukového spektra jeho citlivost klesá. Subjektivní hlasitost zvuku tedy není rovna akustické intenzitě, ale závisí na fyziologických vlastnostech lidského

ucha. Zatímco akustická intenzita je objektivní fyzikální veličina, kterou můžeme měřit výše popsányi fyzikálními přístroji, hlasitost zvuku se takto přímo měřit nedá.



Křivky stejné hlasitosti podle Fletchera a Munsona.

Díky logaritmické citlivosti ucha pracujeme většinou s hladinou hlasitosti a ne s hlasitostí samotnou. **Hladinu hlasitosti** zvuku o frekvenci f definujeme jako hladinu akustické intenzity zvuku o frekvenci 1 kHz, který vnímáme subjektivně jako stejně hlasitý. Platí tedy

$$L(f) = L_a(f = 1 \text{ kHz}).$$

Jednotkou hladiny hlasitosti je **fón** zkratkou Ph. Pojmy hladina hlasitosti a hladina intenzity tedy splývají jen pro zvuky o frekvenci 1 kHz.

Obrácenou závislost hladin akustické intenzity na frekvenci $L_a(f)$, které vnímáme stejně hlasitě jako zvuky dané hladiny hlasitosti $L = \text{konst}$, nazýváme **křivkami stejné hlasitosti**. Naměřili je roku 1933 HARVEY FLETCHER a WILDEN MUNSON. Přehlednou představu o vlastnostech lidského ucha a relativních hlasitostech zvuku udává **plocha slyšení**, tj. schéma zobrazující křivky stejné hlasitosti v diagramu akustických intenzit, popřípadně akustických hladin, v závislosti na frekvenci zvuků. Plocha, kterou všechny tyto křivky pro $L = 0 \text{ Ph}$ až 140 Ph vyplní, se nazývá plocha slyšení. Všechny zvuky, které se nacházejí pod křivkou 0 Ph , leží pod **prahem slyšení**. Oblast zvuků, které leží nad křivkou 140 Ph , leží nad **prahem bolesti**. Zvuky o vyšší hlasitosti vedou k trvalému poškození ucha. Zvuky vlevo od plochy slyšení patří do oblasti infrazvuku a zvuky vpravo patří do oblasti ultrazvuku. Ucho je nejcitlivější pro frekvence kolem 3 kHz.

Pokud není frekvenční spektrum daného zvuku blíže známo, předpokládáme, že rozhodující složka akustického spektra leží v okolí frekvence jeden kilohertz a hladinu hlasitosti nahrazujeme přibližně hladinou akustické intenzity $L \approx L_a$. To znamená, že číselné hodnoty hladiny hlasitosti uváděné ve fónech budou prakticky stejné jako hodnoty hladiny intenzity měřené v decibelech.

7.4.6 Hlasitost

Protože ani hladina hlasitosti neodpovídá přesně tomu, co fyziologicky vnímáme jako hlasitost zvuku, definuje se další akustická veličina zvaná **hlasitost**. Značí se obvykle písmenem N a její jednotkou je **son**. Experimenty ukazují, že dvakrát hlasitější se zdá zvuk silnější o 10 fónů. Jednotka jeden son je přitom kalibrována jako hlasitost hladiny zvuku 40 Ph. Tedy zvuk o hladině hlasitosti 50 Ph je vnímán jako dvakrát silnější, má proto hlasitost dva sony. Zvuk o hladině 60 Ph má hlasitost čtyři sony atd. Vzorcem se hlasitost zvuku vypočte takto

$$N = 2^{(L-40)/10},$$

kde hlasitost je měřena v sonech a hladina hlasitosti ve fónech.

zvuk	hladina	hlasitost
absolutní ticho	0 Ph	0.06 son
tíkot hodinek	20 Ph	0.25 son
tichý hovor	40 Ph	1 son
normální hovor	60 Ph	4 son
symfonický orchestr	80 Ph	16 son
motocykl	100 Ph	64 son
start letadla	120 Ph	260 son
křik člověka	128 Ph	450 son
poškození sluchu	150 Ph	2 kson
křik velryby	188 Ph	29 kson
smrt člověka	190 Ph	33 kson
start rakety	210 Ph	130 kson

7.4.7 Pohltivost zvuku

Zvuk ve vzduchu příliš tlumen není, pohlcení a utišení zvuku v místnosti je proto způsobeno především pohltivostí stěn. Dopadá-li na stěnu akustická vlna o intenzitě I_0 , pak část o intenzitě $I_A = \alpha I_0$ se stěnou pohltí a část $I_R = (1 - \alpha) I_0$ se od stěny odrazí. Mírou absorpce zvuku je **pohltivost** stěny α . Po N odrazech tak zbude z původní intenzity I_0 jen akustická intenzita o velikosti

$$I = (1 - \alpha)^N I_0.$$

Největší pohltivost má otevřené okno $\alpha = 1$, velkou pohltivost mají také pórovité materiály jako plst, koberce nebo záclony. Minimální pohltivost vykazuje naopak kámen nebo beton. Hodnoty pohltivosti některých běžných materiálů jsou uvedeny v tabulce.

Pohltivost pro tón 512 Hz

mramor, beton	0.01	obrazy, koberce	0.30
omítnutá stěna	0.03	plst	0.60
dřevěná podlaha, linoleum	0.10	otevřené okno	1.00

Na členitém povrchu je absorbovaný akustický výkon roven součtu

$$P_A = (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots) I_0 = \sum_k \alpha_k S_k I_0,$$

kde α_k jsou pohltivosti jednotlivých povrchů o velikostech ploch S_k .

7.4.8 Izotropní zvukové pole

Výkon přenesený zvukovou vlnou o intenzitě \mathbf{I} skrz plochu \mathbf{S} je roven součinu $P = \mathbf{I} \cdot \mathbf{S} = IS \cos \theta$, kde θ je úhel mezi normálou plochy a směrem šíření zvuku. Pro akustickou intenzitu rovinné vlny přitom platí $\mathbf{I} = w\mathbf{c}$. Pro izotropní zvukové pole je však výkon nezávislý na orientaci plochy a platí

$$P = IS = \frac{1}{4} cwS,$$

jak hned ukážeme, proto pro izotropní zvukové pole zde platí $I = \frac{1}{4}cw$.

V důsledku mnohonásobného odrazu zvuku od stěn místnosti vzniká uvnitř malých prostorů v podstatě **izotropní zvukové pole**. Celková akustická energie w se rovnoměrně rozdělí mezi všechny možné směry, takže množství energie proudící do směru θ nezávisí na směru, ale jen na velikosti prostorového úhlu $d\Omega$ a je rovna $dw_\theta = w d\Omega/4\pi$. Pro výkon prošlý plochou S tak máme

$$P = \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{I} = \int cS \cos \theta dw_\theta = \frac{1}{4\pi} cwS \int \cos \theta d\Omega.$$

Za element prostorového úhlu můžeme dosadit $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, po integraci přes všechny možné směry dostaneme hledaný výsledek

$$P = \frac{1}{2} cwS \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{4} cwS,$$

kteří můžeme interpretovat tak, že pouze čtvrtina energie izotropního zvukového pole proudí zvoleným směrem.

7.4.9 Útlum a dozvuk

Uvažujme uzavřenou místnost o objemu V , v níž je nahromaděna akustická energie $E = wV$. Při pohltivosti jednotlivých stěn α_k se odrazy od stěn S_k každou sekundou ztrácí akustický výkon $\frac{1}{4}cw \sum_k \alpha_k S_k = \frac{1}{4}cw\bar{\alpha}S$, kde $\bar{\alpha} = \frac{1}{S} \sum_k \alpha_k S_k$ značí střední pohltivost a $S = \sum_k S_k$ celkový povrch stěn a podlah místnosti. Pokud je v místnosti zdroj zvuku o akustickém výkonu P , pak musí platit zákon zachování energie ve tvaru

$$V \frac{dw}{dt} = P - \frac{1}{4}cw\bar{\alpha}S.$$

V ustáleném stavu $dw/dt = 0$ proto musí platit

$$w_0 = \frac{4P}{c\bar{\alpha}S} \quad \text{a} \quad I_0 = \frac{1}{4}cw_0 = \frac{P}{\bar{\alpha}S}.$$

Ustálená hodnota akustické intenzity je tedy přímo úměrná akustickému výkonu zdroje a nepřímá úměrná pohltivosti a ploše stěn.

Vypneme-li zdroj zvuku, tj. $P = 0$, bude akustická energie ještě chvíli doznívat. Řešením výše uvedené diferenciální rovnice dostaneme výsledek

$$w = w_0 e^{-\bar{\alpha}Sc t/4V} = w_0 e^{-t/t_0},$$

kde w_0 je hustota energie na počátku a $t_0 \approx 4V/\bar{\alpha}Sc$ je charakteristická doba dozívání zvuku v místnosti. Vzhledem k tomu, že zvuk se šíří rychlostí c , odpovídá dozvuku střední volná dráha akustického záření $l_0 = ct_0 \approx 4V/\bar{\alpha}S$. **Dozvuk** definujeme jako dobu, za kterou klesne v místnosti hustota akustické energie o 60 dB. Snadno se tak nalezne, že pro dozvuk platí

$$\tau = t_0 \ln 10^6 \approx \frac{55V}{\bar{\alpha}Sc}.$$

Doba dozívání a dozvuk rostou lineárně s rozměrem místnosti, proto je dozvuk větší ve velkých koncertních sálech nebo chrámech než v normálních bytech. Na absorpci zvuku má vliv i vybavení, nábytek a osoby přítomné v místnosti. Absorpce jedné osoby v sále odpovídá absorpci 0.42 m^2 otevřeného okna, absorpce dřevěné židle je 0.01 m^2 a čalouněného křesla asi 0.1 m^2 až 0.3 m^2 .

Ze zkušenosti se ví, že optimální doba dozvuku pro posluchárny a přednáškové sály je 0.8 s až 1.0 s, zatímco pro koncertní sály 1.0 s až 1.5 s. Ve vhodném tvaru a velikosti hudebního sálu pak spočívá tajemství dobré akustiky.

Příklad 7.8 Odhadněte dozvuk obývacího pokoje $4 \times 4 \times 3 \text{ m}$ a koncertního sálu $40 \times 60 \times 10 \text{ m}$.

Řešení: Dozvuk obývacího pokoje je prakticky zanedbatelný $\tau \approx 55V/\alpha Sc \approx 0.2 \text{ s}$, neboť $V = 48 \text{ m}^3$, $S = 80 \text{ m}^2$ a $\alpha \approx 0.5$. Dozvuk koncertního sálu je podstatně větší $\tau \approx 1.9 \text{ s}$, neboť $V = 24\,000 \text{ m}^3$, $S = 6800 \text{ m}^2$ a $\alpha \approx 0.3$, a musí se dále upravovat. Dozvuk v kamenném kostele může být ještě větší.

Příklad 7.9 Odhadněte intenzitu zvuku v obývacím pokoji $4 \times 4 \times 3 \text{ m}$, který je buzen zdrojem o akustickém výkonu $P \approx 1 \text{ W}$. Pohltivost stěn nechť je $\alpha \approx 0.5$.

Řešení: Zatímco akustická intenzita poblíž reproduktoru přesahuje 1 W/m^2 (tj. 120 dB), pro průměrnou akustickou intenzitu v místnosti dostaneme jen $I_0 \approx P/\alpha S = 0.025 \text{ W/m}^2$ (tj. 104 dB).

7.5 Zdroje zvuků

7.5.1 Rozdělení zvuků

Akustika je část mechaniky, která se zabývá vznikem, šířením a vlastnostmi zvuku, tj. akustickými vlnami. Těmi se rozumí mechanické vlny malé intenzity v pružném

prostředí. Zvuk se může šířit nejen vzduchem, ale i kapalinami nebo pevnými látkami, nemůže se však šířit vzduchoprázdnem.

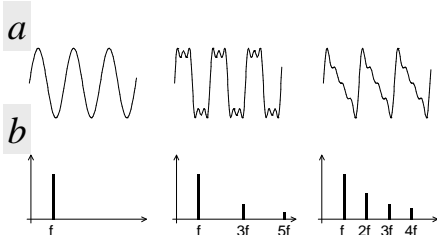
V užším smyslu pak **zvukem** rozumíme jen ty akustické vlny, které slyšíme. Jde o akustické vlny, jejichž frekvence spadají do intervalu 20 Hz až 20 kHz. Akustické vlny vyšší frekvence se nazývají **ultrazvuk** a akustické vlny nižší frekvence **infrazvuk**.

Zdrojem zvuku je jakýkoli kmitající předmět, například struna houslí, jazyk klarinetu, ramínka ladičky, vibrující kůže bubny, křídla komára, chvění lidských hlasivek nebo kmity membrány reproduktoru.

Jak jsme již uvedli, zdravé lidské ucho vnímá zvuky o frekvencích 20 Hz až 20 kHz. Pro dobré porozumění lidské řeči z toho postačí mnohem užší interval frekvencí 500 Hz až 5 kHz. Ty si proto z hlediska telefonní techniky zaslouhují největší pozornost. Rozsah frekvencí, které vnímá jako zvuk například pes, je 40 Hz až 46 kHz. Pes tedy slyší i to, co my už neslyšíme a co považujeme za ultrazvuk. To samozřejmě psovodi dobře vědí a k ovládní svých psů používají ultrazvukovou píšťalku. Ještě vyšší ultrazvukové frekvence slyší například krysa nebo netopýr, protože krysa slyší zvuky o frekvenci 1 kHz až 100 kHz, delfín a velryby 70 Hz až 150 kHz a netopýr 1 kHz až 150 kHz. Rozdělení akustických vlnění na zvuk, ultrazvuk a infrazvuk je tedy jen konvence, žádná ostrá hranice z pohledu fyziky mezi infrazvukem, zvukem a ultrazvukem není.

7.5.2 Druhy zvuků

Harmonická vlna je nejjednodušším typem zvuku. Harmonická vlna obsahuje jedinou frekvenci a představuje v akustice **čistý tón**. Amplitudě vlny odpovídá v akustice **hlasitost tónu**, frekvenci pak **výška tónu**. Vyšší frekvence představují **vysoké tóny** a nižší frekvence představují **hluboké tóny**. Protože zvuk se šíří ve vzduchu rychlostí $c \approx 340$ m/s, je vlnová délka nejhlubších tónů 17 m a nejvyšších tónů 17 mm.

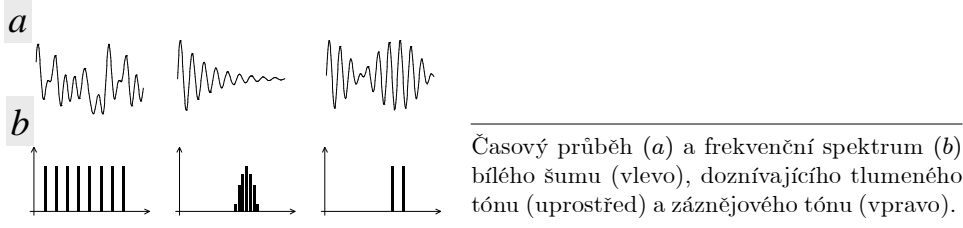


Časový průběh (a) a frekvenční spektrum (b) čistého tónu (vlevo), tónu obsahujícího jen liché harmonické (uprostřed) a tónu obsahujícího všechny harmonické složky (vpravo).

Zvuk vydávaný hudebními nástroji není nikdy čistým harmonickým tónem. Čistý tón je možno vyrobit až díky elektronice, například na hudebním syntezátoru nebo pomocí počítače. **Tón** vydávaný skutečným hudebním nástrojem obsahuje vždy více čistých tónů současně. Kvalitní hudební nástroj vyluzuje spolu se **základním tónem** o frekvenci f_1 současně jen jeho celistvé násobky, tzv. **aliquótní tóny**, což jsou **vyšší harmonické tóny** o frekvencích $f_m = m f_1$, kde m je celé číslo. Relativní zastoupení harmonických složek ve výsledném tónu určuje charakteristickou **barvu tónu** neboli **témbr**. Ten je u každého nástroje nepatrně odlišný.

Proto stejný tón vydaný houslemi, kytarou nebo klavírem vždy bezpečně rozpoznáme.

Všechny tóny určitého zvuku tvoří dohromady jeho **frekvenční spektrum**. V případě kvalitního hudebního nástroje je toto spektrum harmonické, tj. neobsahuje jiné než harmonické složky. Harmonické spektrum nemusí být úplné, mohou v něm chybět například sudé harmonické složky.



Harmonická směs tónů tvoří **hudební akord** a jejich rytmická posloupnost vytváří **hudbu**. Charakteristické řazení tónů v čase utváří **melodii**. Disharmonická směs mnoha tónů tvoří **hluk**. Spojitá směs všech možných tónů představuje **šum**. Ostrý a intenzivní, ale časově krátký zvuk, se nazývá **třesk**. Artikulovaný zvuk vytvářený lidskými hlasivkami a modulovaný v ústní dutině a hrtanu se nazývá **řeč** nebo **zpěv**.

7.5.3 Struna

Zdrojem zvuku se stává každý kmitající předmět. Je-li frekvenční spektrum nástroje harmonické, může sloužit jako **hudební nástroj**. Hudební nástroje obecně generují zvuky pomocí chvění strun (kytara, housle, klavír, harfa), vzduchových sloupců (varhany, píšťala, flétna), napnutých membrán (buben, reproduktor) nebo rezonujících předmětů (zvon, činely, triangel, cimbál, ladička).

Struna je pružný a pevný drát napjatý mezi dvěma pevnými body. Jak již víme, strunou se šíří mechanická vlna rychlostí $c_S = \sqrt{F/\rho S}$, která závisí na napětí struny. Tato rychlost je obvykle mnohem menší než rychlost zvuku! Úderem prstů se struna rozechvěje. Nemůže však kmitat na libovolné frekvenci, ale pouze na povolených frekvencích, které odpovídají jednotlivým vibračním módům struny. Ty tvoří, jak jsme již ukázali, harmonické spektrum se složkami

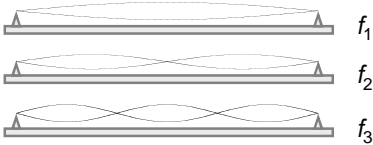
$$f_m = m f_1 = m \frac{c_S}{2L}, \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \dots$$

a L je délka struny. **Výška tónu struny** je určena základní frekvencí

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$$

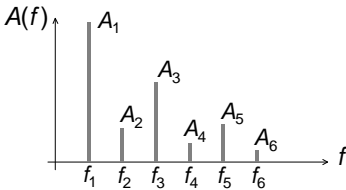
a nezávisí na množství ani intenzitě ostatních harmonických složek. Základní frekvenci každé struny je možno doladit silou jejího napnutí tak, aby všechny struny hudebního nástroje nakonec spolu vzájemně ladily. U strunných nástrojů k tomu

slouží napínací kolíčky. Výška tónu závisí také na délce struny a to je důvod, proč se musí nástroj při změně teploty vždy znova doladit. Posouváním prstů po pražcích hmatníku kytary strunu zkracujeme, a tak můžeme na stejné struně postupně vyluzovat i několik různých tónů.



Struna se může chvět pouze na frekvencích, které jsou násobkem základní frekvence $f_m = mf_1$, jak plyne z vlastností stojatých vln.

Vibrační módy struny odpovídají harmonické stojaté vlně, proto je možno podmínku povolených frekvencí odvodit velmi jednoduše také geometricky. Stačí si uvědomit, že vzdálenost mezi uzly stojaté vlny je $\lambda/2$, a že krajní body struny nemohou kmitat, takže musí odpovídat uzlům stojaté vlny. Na celou strunu délky L se tedy musí vejít m násobků půlvln, takže pro povolené stojaté vlny na struně platí podmínka $m\lambda/2 = L$. Odtud je $\lambda = 2L/m$ a odpovídající frekvence jsou $f_m = c_S/\lambda = mc_S/2L$.



Typické spektrum hudebního nástroje, které obsahuje všechny harmonické složky $f_m = mf_1$.

Barva zvuku závisí na způsobu rozkmitání struny. Jinou barvu má tón, když strunu rozkmitáme smyčcem, jinou prstem a jinou trsátkem. Závísí také na místě, kde strunu rozkmitáváme. To vše dokážeme vysvětlit pomocí studia spektra tónu. Jestliže známe počáteční tvar struny $U(x)$ a počáteční rychlost struny $V(x)$, lze odtud spočíst celé frekvenční spektrum chvějící se struny. Obecný tvar výchylky struny je dán vzorcem

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi mx}{L} \left(C_m \cos \frac{\pi mc_S t}{L} + S_m \sin \frac{\pi mc_S t}{L} \right).$$

Odtud pro $t = 0$ je

$$U(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \frac{\pi mx}{L} \quad \text{a} \quad V(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi mc_S}{L} S_m \sin \frac{\pi mx}{L},$$

a tedy amplitudy C_m a S_m musí být rovny

$$C_m = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin \frac{\pi mx}{L} dx \quad \text{a} \quad S_m = \frac{2}{\pi mc_S} \int_0^L V(x) \sin \frac{\pi mx}{L} dx.$$

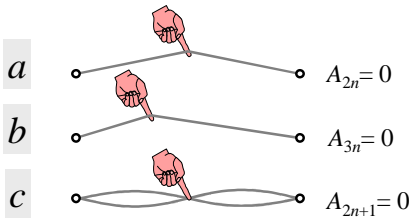
Amplituda m -té harmonické složky je pak podle Pythagorovy věty rovna

$$A_m = \sqrt{C_m^2 + S_m^2}.$$

Například, pokud strunu rozkmitáme vychýlením jejího středu $x = L/2$ o vzdálenost a , pak je počáteční tvar struny popsán rovnicemi $U(x) = 2ax/L$ pro $x < L/2$ a $U(x) = 2a(L-x)/L$ pro $x > L/2$. Počáteční rychlost struny bereme jako nulovou. Amplitudy chvění jednotlivých módů jsou

$$A_m = \frac{4a}{\pi m} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2}\right), \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \dots,$$

tedy klesají úměrně m . Protože však intenzita zvuku vydávaného strunou je úměrná čtverci rychlosti $I_m \sim \omega_m^2 A_m^2 \sim m^2 A_m^2$, budou jednotlivé harmonické složky zhruba stejně intenzivní. Zvuk struny bude v tomto případě nepříjemně ostrý, snesitelný jen při ocelových strunách, jejichž malá ohebnost vyšší harmonické tóny silně tlumí. Jestliže se však brnká měkkým prstem, převládá ve zvuku struny základní tón a vrchní harmonické tóny jsou o něco slabší. Tím se zvuk stává měkčím, zůstává však plným. Významným nástrojem tohoto druhu je harfa.



Udeříme-li do středu struny (a), sudé harmonické složky se nevybudí. Udeříme-li právě do třetiny struny (b), nevybudí se harmonické složky násobku tří. Konečně, podržíme-li po vybuzení struny prst uprostřed struny (c), budou okamžitě utlumeny všechny liché harmonické.

Všimněte si také, že v uvedeném případě sudé harmonické složky ze spektra vypadnou, neboť je $A_{2n} = 0$ a zbývají pouze liché složky $A_{2n+1} \neq 0$. To platí pro všechny případy, kdy je struna rozkmitávána přesně uprostřed, neboť tehdy budou obě funkce $U(x)$ a $V(x)$ symetrické vzhledem ke středu struny, takže integrály pro sudé m vymizí. Podobně, pokud je struna rozkmitána v jedné třetině, vyjde $A_{3n} = 0$. Naopak, pokud strunu nejprve rozkmitáme, a pak přidržíme střed struny, zaniknou módy o lýchých frekvencích a bude $A_{2n+1} = 0$. Změna frekvenčního spektra má pochopitelně za následek změnu barvy tónu.



Výsledné spektrum hudebního nástroje závisí jak na původním spektru struny, tak na rezonanční křivce rezonátoru.

Struna sama o sobě vydává vlivem akustického zkratu jen sotva slyšitelný tón. Abychom jej zesílili, připojujeme strunu na ozvučnici (zvukovou desku nebo skříňku), která se od struny rozechvěje na stejné frekvenci, ale stejné zvukové vlny vyzařuje díky svým větším geometrickým rozměrům mnohem efektivněji. Relativní zastoupení jednotlivých čistých tónů ve zvukovém spektru je pak dáno nejen

způsobem rozkmitání struny, ale také hudebními vlastnostmi připojené ozvučnice. Rezonanční vlastnosti ozvučné skříňky u houslí nebo ozvučné desky u klavíru mají tedy zásadní význam nejen pro intenzitu, ale také pro barvu výsledného zvuku, podle které lze každý nástroj spolehlivě určit i ve zvuku celého orchestru.

Struny smyčcových hudebních nástrojů jsou naladěné na tyto tóny: housle g, d¹, a¹, e², celkové napětí 28 kg, viola c, g, d¹, a¹, celkové napětí 31 kg, čelo C, G, d, a, celkové napětí 45 kg, basa E₁, A₁, D, G, celkové napětí 200 kg. Ostatní tóny vytváří hudebník tak, že prsty levé ruky tlačí strunu k hmatníku a tím krátí jejich délku. Struny klavíru mají temperované ladění po půltónech od A₂ do a⁴. Celkové napětí strun je asi 11 000 kg.

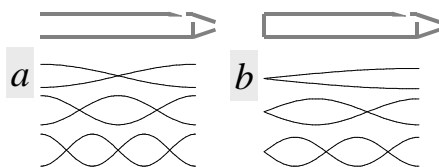
Základní poznatky o závislosti výšky tónů na délce a napětí struny znal již PYTHÁGORAS ZE SAMU v 6. stol. př. n. l. Závislost výšky tónu na napětí struny, hustotě a průřezu struny určil roku 1636 MARIN MERSENNE a matematickou teorii chvění struny podal roku 1715 BROOK TAYLOR. Pověstným houslařem se stal na počátku osmnáctého století ANTONIO STRADIVARI, od té doby se dodnes již nikomu stejně ceněné nástroje vyrobit nepodařilo.

7.5.4 Píšťala

Další velkou skupinu hudebních nástrojů tvoří dechové nástroje, jejichž zvuk je určen akustickými vlastnostmi vzduchových sloupců uvnitř **píšťal**. Zdrojem zvuku u píšťal jsou vzduchové víry, které vznikají prouděním vzduchu kolem ostré hrany, zvané **ret**. Proudící vzduch vytváří za ostrou hranou víry, které vzduch rozechvějí a rozezvučí (Strouhalovy třecí tóny). Píšťaly tohoto typu se nazývají **retné**. Zdrojem chvění vzduchu v píšťale může být také tenký kmitající **jazýček**, který se rozechvěje proudícím vzduchem. Tyto píšťaly se nazývají **jazýčkové**. Frekvence kmitání jazýčku závisí na jeho délce l a tloušťce h přibližně vztahem

$$f \approx 0.162 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{l^2},$$

kde E je Youngův modul pružnosti a ρ hustota materiálu, z něhož je jazýček zhotoven. U žesťových nástrojů nahrazují jazýček sevřené rty hrajícího muzikanta. Zvuk vydávaný rtem nebo jazýčkem je rezonančně zesílen vzduchovým sloupcem píšťaly, takže nakonec znějí jen vybrané harmonické tóny. Na principu chvění vzduchových sloupců fungují všechny dechové nástroje. Kombinací otevřených klapky trubky nebo klarinetu vybíráme preferovaný mód, který se pak v píšťale netlumeně rozezní.



Možná chvění vzduchového sloupce otevřené (a) a uzavřené píšťaly (b).

Rozeznáváme dále **otevřené píšťaly**, které mají kmitny na obou koncích a **uzavřené píšťaly**, které mají na uzavřeném konci uzel. Otevřená píšťala má kmitnu na obou koncích, takže se do ní vejde sudý počet čtvrtvln, a proto platí

$$2m \frac{\lambda}{4} = L, \quad \text{odtud} \quad f_m = \frac{c}{\lambda} = m \frac{c}{2L}.$$

Uzavřená píšťala má na uzavřeném konci uzel, takže se do ní vejde lichý počet čtvrtvln, a proto platí

$$(2m - 1) \frac{\lambda}{4} = L, \quad \text{odtud} \quad f_m = \frac{c}{\lambda} = (2m - 1) \frac{c}{4L}.$$

Zde L značí délku píšťaly, c rychlost zvuku ve vzduchu a $m = 1, 2, 3, \dots$. Frekvence základního tónu otevřené píšťaly je $f_1 = c/2L$ a je dvakrát vyšší než základní frekvence uzavřené píšťaly $f_1 = c/4L$. Uzavřená píšťala tedy zní o oktávu níže než otevřená píšťala stejných rozměrů. Teorii chvění vzduchového sloupce a píšťal podal roku 1732 DANIEL BERNOULLI.

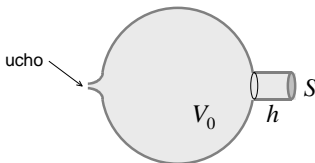
7.5.5 Helmholtzův rezonátor

Ke studiu chvění vzduchu se používá **Helmholtzův rezonátor** (HERMANN VON HELMHOLTZ 1863). Jde prakticky o velkou dutou nádobu s tenkým úzkým hrdlem. Vzduch v dutině je možno v důsledku pružnosti vzduchu snadno rozkmitat. Pohyb vzduchu $x(t)$ v hrdle rezonátoru o průřezu S a délce h je popsán pohybovou rovnicí

$$\rho_0 S h \ddot{x} = (p - p_0) S,$$

kde p_0 a ρ_0 je tlak a hustota klidného vzduchu. Pro tlak vzduchu v dutině objemu V_0 platí podle Poissonova zákona

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\kappa = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + Sx} \right)^\kappa.$$



Helmholtzův rezonátor je tvořen dutinou opatřenou úzkým hrdlem, v němž kmitá sloupec vzduchu. Ucho se přikládá k malému otvoru na opačném konci rezonátoru.

Pro malé kmity lze stavovou rovnici linearizovat $p - p_0 \approx -\kappa p_0 S x / V_0$, takže po dosazení za $p - p_0$ do pohybové rovnice dostaneme rovnici harmonických kmitů

$$\ddot{x} = -\frac{\kappa p_0}{\rho_0} \frac{Sx}{V_0 h} = -c^2 \frac{S}{V_0 h} x,$$

kde c značí rychlost zvuku. Frekvence chvění vzduchu v hrdle rezonátoru je tedy dána vzorcem

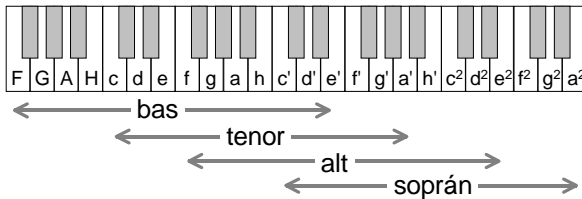
$$\omega = c \sqrt{\frac{S}{V_0 h}}.$$

Na pokusy můžete namísto Helmholtzova rezonátoru použít i prázdnou sklenici od piva nebo plastovou láhev od limonády. Když do ní fouknete, uslyšíte *hučení* odpovídající rezonančnímu chvění vzduchu v láhvi. Například pro plastovou láhev o objemu dvou litrů, s hrdlem o průřezu 4 cm^2 a délce hrdla 2 cm vychází rezonanční kmitočet $f \approx 170\text{ Hz}$. Také *šum moře* v mušli přiložené k uchu je příkladem rezonančního chvění vzduchu uvnitř závitů mušle. Zdrojem tohoto zvuku je obvykle z okolí do mušle vnikající akustický hluk, v případě absolutně tichého okolí jím pak bude tep vlastní srdce.

Někdy je otvor udělán přímo do dutiny a hrdlo je příliš krátké ($h \approx 0$), než aby šlo použít předchozí vzorec. V tom případě platí přibližně vzorec $\omega \approx c\sqrt{D/V_0}$, kde D je průměr otvoru.

7.5.6 Lidský hlas

Lidský hlas vzniká podobně jako zvuk v jazýčkové píšťale. V hrtanu jsou dvě pružné blány zvané **hlasivky**, které jsou při řeči a zpěvu napnuté, takže mezi nimi je úzká hlasová šterbina. Průchodem vzduchu z plic se hlasivky rozkmitají, a tím se rozkmitá i vzduch v hrtanu a ústní dutině. Na principu rezonančního chvění vzduchu v ústní dutině se pak vytvářejí jednotlivé hlásky **lidské řeči**. Primární rozehvění vzduchu je způsobeno výdechem vzduchu přes pružné hlasivkové svaly, samotná **hláska** je ale vytvářena (formována) až v ústní dutině pomocí jazyka, zubů a rtů. Hlasivky nejsou pro řeč nezbytně nutné, modulací vzduchu jdoucího přímo z plic vzniká artikulovaný **šepot**.



Hudební rozsahy lidského hlasu.

Výška hlasu závisí na délce hlasivek (u mužů asi 18 mm , u žen asi 12 mm) a jejich napětí, které je možno hlasivkových napětím svalů v jistém rozmezí měnit. Tyto hranice o délce asi dvě oktávy odpovídají rozsahu lidského hlasu. **Bas** tónový rozsah $F - e^1$, **tenor** $c - a^1$, **alt** $f - e^2$ a **soprán** $c^1 - a^2$.

Vlastní tón hrtanu je **vedlejší formant**, který je prakticky neměnný a má frekvenci asi 400 Hz . Jednotlivé samohlásky vznikají rezonancí v dutině ústní. Jednotlivé polohy jazyka, zubů a rtů určují po řadě **hlavní formanty** F_1 a F_2 samohlásek **u**, **o**, **a**, **e** a **i**, jejichž frekvence uvádí tabulka.

Hlavní formanty	u	o	a	e	i
F_1 (v Hz)	400	650	950	650	400
F_2 (v Hz)	800	1050	1350	2000	2500

U samohlásky u je formant F_1 natolik výrazný, že připomíná jediný tón. Tím se vysvětluje, proč je samohláska u tak podobná zvuku ladičky, která vydává prakticky také jen jediný tón.

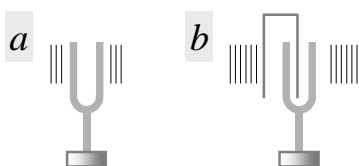
Rezonanční frekvence závisí nejen na geometrii rezonátoru, ale také na rychlosti šíření zvuku. Pokud vydechujeme z plic například hélium namísto vzduchu, bude frekvence vydávaných zvuků asi třikrát vyšší.

7.5.7 Další zdroje zvuku

Pro potřeby ladění hudebních nástrojů se používá přesná **zvuková ladička**, první vyrobil roku 1752 JOHN SHORE, trumpetista orchestru GEORGA FRIEDRICHA HÄNDELA. Zvuk vzniká vibrační raménka ladičky, jeho frekvence tudíž závisí na pružnosti materiálu a rozměrech ladičky. Pro frekvenci základního tónu ocelové ladičky ($c \approx 5064 \text{ m/s}$) platí poloempirický vzorec

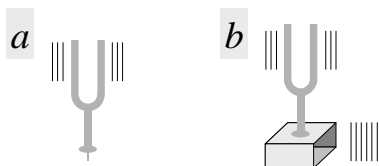
$$f_1 \approx 81\,800 \frac{h + 0.05}{(l + 0.38)^2},$$

kde l představuje délku a h tloušťku ramene ladičky měřenou v cm a f_1 základní frekvenci v Hz. Protože obě raménka kmitají k sobě nebo od sebe, vznikají jen liché kmitavé módy a spektrum má od sebe velmi vzdálené složky $f_1, 6.27f_1, 17.55f_1, \dots$, takže prakticky zní pouze jediný, tj. základní tón ladičky. Pokud se navíc použije nízkoroztažný kov, například invar, nezávisí tón vydávaný ladičkou na teplotě okolí. Tyto vlastnosti předurčily ladičku již v 18. století za základní pomůcku pro ladění hudebních nástrojů.



Když zakryjeme jedno z ramen ladičky (a), tón se výrazně zesílí (b).

Pomocí ladičky je možno jednoduše demonstrovat destruktivní interferenci. Obě ramena ladičky kmitají v protifázi. Pokud však jedno rameno chvějící se ladičky zakryjeme, například dlouhou sklenicí, zvuk vydávaný ladičkou se paradoxně zesílí.



Zvuk ladičky (a) se výrazně zesílí, pokud ji připevníme na rezonanční krabici (b).

Také akustický zkrat je možno jednoduše demonstrovat pomocí ladičky. Pokud ladičku připevníme k otevřené rezonanční krabici, bude zvuk ladičky výrazně hlasitější.

Historicky významným zdrojem zvuku jsou zvony. Prakticky jde o chvějící se vhodně tvarované bronzové desky. **Zvon** je rozezníván úderem těžkého kladiva zvaného také srdce. Tvar zvonu je pečlivě volen tak, aby současně znějící tóny byly konsonantní, tím se zvuk zvonu stává současně lahodným a velebným. Základní tón zvonu závisí na jeho geometrických rozměrech a při stejných poměrech platí $f_1 \sim 1/\sqrt{m}$, kde m je hmotnost zvonu. Vhodný tvar zvonu se hledá obtížně, obvykle se experimentuje na menších modelech, a teprve pak se správný, ověřený tvar zvětší na požadované rozměry.

intenzivní technické zvuky je možno vytvářet pomocí sirén. Například **Seebeckova siréna** funguje tak, že do rotujícího kotouče, v němž jsou rovnoměrně po obvodu vyvrtány otvory, necháme proudit stlačený vzduch. Vzduch proniká periodicky otvory v kotouči a vydává intenzivní tón. Frekvenci tónu sirény spočteme jednoduše jako součin frekvence n otáček kotouče a počtu N otvorů na obvodu kotouče, tj. platí $f = nN$. Podobně funguje **Savartova siréna**, tj. ozubené kolo, na jehož zuby naráží plíšek s frekvencí $f = nN$, kde N je počet zubů na obvodu kola. Při dostatečných otáčkách n přestáváme vnímat nárazy jednotlivých zubů a uslyšíme hudební tón o frekvenci f .

7.5.8 Reproduktor

Pro generaci zvuku v elektronických přístrojích používáme obvykle dynamický **reproduktor**. Zvuk vytvářený reproduktorem vzniká tak, že elektrický signál z CD přehrávače nebo FM tuneru přivádíme po zesílení do cívky uložené do prstencové mezery radiálního magnetu. Elektrický proud uvede cívku do kmitavého pohybu a tím se rozkmitá i membrána reproduktoru, která je pružně přichycena k cívce. Velká plocha membrány rozkmitá okolní vzduch a z reproduktoru je slyšet hudbu. Aby byl zvuk co nejvěrnější, musí být membrána i cívka co nejlehčí, aby měla zanedbatelnou setrvačnost. Pro vysoké tóny proto volíme rozměry reproduktoru co nejmenší. Reproduktor však nedokáže generovat tóny, jejichž vlnová délka je větší než průměr membrány. Malý reproduktor tedy nedokáže dobře reprodukovat hluboké tóny, pro které musíme použít co největší reproduktor. Tím se vysvětluje, proč pro odlišné oblasti zvukového spektra se konstruují různé typy reproduktorů s odlišnými frekvenčními charakteristikami. Elektronikou se vyřeší rozdělení zvuku do jednotlivých oblastí zvukového spektra. Toto zařízení se nazývá **elektronická výhybka**. Výhybky a reproduktory se pak společně montují do jediné nebo několika **reprosoustav**.

Důležitým parametrem reproduktoru je **citlivost**. Měří se jako hladina akustické intenzity ve vzdálenosti jeden metr od reproduktoru, jímž prochází jeden watt elektrického příkonu. Obvykle se pohybuje kolem 90 dB.⁵ Zesilovač 100 W tedy vybudí v reproduktoru až 110 dB akustické intenzity.

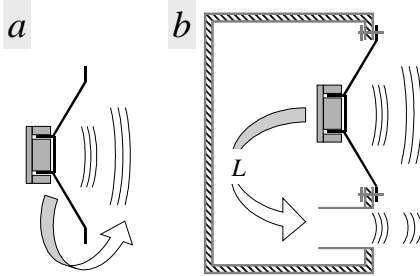
Akustická intenzita příslušející hladině $L_a \approx 90$ dB je $I_a \approx 10^{-3}$ W/m² a akustický výkon procházející polokoulí o poloměru $r \approx 1$ m je pak

$$P_a \approx \pi r^2 I_a \approx 3 \times 10^{-3} \text{ W}.$$

⁵ Nejlepší pásmové reproduktory mají citlivost až 100 dB.

Účinnost reproduktoru je tedy obvykle menší než jedno procento.

Dalším parametrem je směrová charakteristika reproduktoru a maximální příkon (sínusový a hudební), který je možno přivádět do reproduktoru, aniž by hrozilo jeho poškození.



Akustický zkrat (a) a princip reproduktoru s basreflexem (b). Maximálně jsou zesíleny hluboké tóny splňující podmínku $L = \lambda/2 = c/f$.

Při produkci nejhlubších tónů dochází k **akustickém zkratu**. Zadní strana membrány totiž rovněž produkuje zvukové vlny, a to s přesně opačnou polaritou než strana přední. Pokud se vlna ze zadní strany membrány složí s vlnou z přední strany, vzájemně se téměř vyruší. U kratších vln to není obvykle možné, protože než zadní vlna oběhne membránu, získá fázový posun a navíc se znatelně utlumí. U dlouhých vln, větších než jsou rozměry reproduktoru, však ke zkratu dochází. Aby se posílily hluboké tóny – basy, připevňuje se reproduktor na rozlehlou ozvučnicovou desku, která prodlouží dráhu pro zadní vlnu nebo se reproduktor upevní na uzavřenou krabici – reprobodnu, a tak se zcela znemožní destruktivní interference. Tvar a rozměry reprobodny mají vliv na barvu zvuku, protože ta se chová jako rezonátor a selektivně zvýhodňuje jen některé tóny. Zadní vlnu je ovšem možno i využít, to se dělá pomocí **basreflexu**. V reprobodně se udělá otvor, který propustí zadní vlnu a ta vlna, která získá dráhový rozdíl $\lambda/2$, bude nyní ve fázi s přední vlnou. Pouze tyto tóny budou zesílené a budou mít dvojnásobnou amplitudu oproti tónům bez basreflexu. Protože basreflex výrazně zkreslí spektrum hlubokých tónů, používá se jen u levnějších reprozařízení.

7.5.9 Pulzující deska

Podívejme se nyní blíže na matematický popis vzniku zvuku. Nejjednodušším zdrojem zvuku je harmonicky pulzující deska $x = 0$ nekonečných rozměrů, která vyzářuje rovinnou vlnu $\phi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$. Zde ϕ značí rychlostní potenciál akustické vlny. Okrajová podmínka je určena pohybem desky $v(0, t) = U \cos \omega t$, kde U značí amplitudu rychlosti pohybu desky. Protože $v(0, t) = [\partial\phi/\partial x]_{x=0} = kA \cos \omega t$, máme odtud $A = U/k$. Pro akustickou rychlost $v = \partial\phi/\partial r$ a akustický tlak $p = -\rho\partial\phi/\partial t$ tak dostaneme řešení

$$v = U \cos(kx - \omega t) \quad \text{a} \quad p = ZU \cos(kx - \omega t),$$

kde $Z = \rho c$ je akustická impedance vzduchu. Střední akustická intenzita před deskou je tedy rovna

$$I_a = \langle pv \rangle = ZU^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} ZU^2$$

a závisí na čtverci amplitudy rychlosti U chvění desky, ale nezávisí na vzdálenosti x od desky. Akustický výkon vyzářený plochou S je proto roven

$$P = I_a S = \frac{1}{2} ZU^2 S.$$

Protože $U = kA = 2\pi A/\lambda = 2\pi f A/c$, roste vyzářený výkon se čtvercem frekvence f chvění desky, vysoké tóny se tedy reproduktorem vybudí snadněji než tóny hluboké.

Každý rozlehlý zdroj zvuku můžeme rozložit do mnoha pulzujících rovinných desek o velikostech S_m za předpokladu $S_m \gg \lambda^2$, a výkon takového zdroje pak dostaneme jako součet jednotlivých příspěvků

$$P \approx \sum_m \frac{1}{2} ZU_m^2 S_m \approx \frac{1}{2} Z \oint U^2 dS. \quad (7.15)$$

7.5.10 Pulzující koule

Abychom pochopili vliv rozměrů zdroje na vyzářený výkon, probereme nyní záření harmonicky pulzující koule o poloměru R . Pro větší stručnost zápisu použijeme komplexní reprezentaci harmonických vln. Pulzující koule kolem sebe vyzářuje sférickou akustickou vlnu

$$\phi(r, t) = \frac{A}{r} e^{ikr} e^{-i\omega t}.$$

Její amplitudu A najdeme z okrajové podmínky: normálová složka rychlosti vzduchu na povrchu koule se musí rovnat rychlosti povrchu koule, tj. musí platit $v(R, t) = U e^{-i\omega t}$, kde U je amplituda rychlosti povrchu koule. Protože

$$v(R, t) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{r=R} = A \frac{-1 + ikR}{R^2} e^{ikR} e^{-i\omega t} = U e^{-i\omega t},$$

můžeme odtud najít amplitudu $A = UR^2 e^{-ikR} / (-1 + ikR)$ a pomocí ní vyjádřit rychlostní potenciál vzorcem

$$\phi = U \frac{R^2}{r} \frac{1}{-1 + ikR} e^{ik(r-R)} e^{-i\omega t}.$$

Pro akustickou rychlost $v = \partial \phi / \partial r$ a akustický tlak $p = -\rho \partial \phi / \partial t$ v obecném místě r dostaneme

$$v = U \frac{R^2}{r^2} \frac{-1 + ikr}{-1 + ikR} e^{ik(r-R)} e^{-i\omega t} \quad \text{a} \quad p = U \frac{R^2}{r} \frac{ikZ}{-1 + ikR} e^{ik(r-R)} e^{-i\omega t}.$$

Všimněte si, že poblíž zdroje $r \approx R$ jsou tlak a rychlost vzájemně fázově posunuty o 90° , zatímco daleko od zdroje jsou ve fázi. Střední akustická intenzita je spočte jako

$$I_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(pv^*) = \frac{1}{2} ZU^2 \frac{R^2}{r^2} \frac{k^2 R^2}{1 + k^2 R^2}$$

a klesá se čtvercem vzdálenosti r od středu koule. Konečně celkový akustický výkon

$$P = 4\pi r^2 I_a = 2\pi R^2 ZU^2 \frac{k^2 R^2}{1 + k^2 R^2}$$

dostaneme integrací přes kouli $4\pi r^2$. Vyzářený výkon závisí obecně na poměru velikosti koule a vlnové délky, pro velkou kouli $R \gg \lambda$ platí aproximace $P \approx 2\pi R^2 ZU^2$, což je v souladu se vzorcem (7.15), neboť nyní je $S = 4\pi R^2$, zatímco pro malou kouli $R \ll \lambda$ platí aproximace

$$P \approx 2\pi R^2 ZU^2 (kR)^2.$$

Vidíme tedy, že u malého zdroje se projevuje **akustický zkrat**, v důsledku čehož klesá vyzářený akustický výkon malého zdroje s vlnovou délkou jako $(R/\lambda)^2$. Model pulzující koule tak jednoduše objasňuje, proč je nutno ke generaci hlubokých tónů použít dostatečně veliký reproduktor $R \approx \lambda$.

7.5.11 Chvějící se struna

Na závěr si ještě uvedeme bez odvození akustický výkon

$$P \approx \frac{\pi^2}{4} ZU^2 k^3 R^4 l,$$

který vyzařuje struna délky l a poloměru R chvějící se harmonicky s amplitudou rychlosti U . Protože amplituda rychlosti struny je rovna $U = \omega A$, kde A je amplituda příčné výchylky struny, je zřejmé, že výkon roste s druhou mocninou amplitudy chvění a s pátou mocninou frekvence chvění struny.

Akustické záření vycházející ze struny pochopitelně není izotropní, ale závisí na úhlu θ mezi směrem rychlosti U chvění struny a směrem průvodiče r , a to faktorem $\cos^2 \theta$. Struna tedy nejvíce vyzařuje v rovině chvění, v kolmém směru pak nevyzařuje nic.

7.6 Hudební stupnice

7.6.1 Souzvuk, konsonance

Každý hudební tón obsahuje vedle základní harmonické složky f také vyšší harmonické složky $2f, 3f, 4f, \dots$. Zazní-li tedy tón f a současně tón $2f$ o oktávu vyšší (s

vyššími harmonickými $4f, 6f, 8f, \dots$), žádný nový harmonický tón se neobjeví, jen se zdůrazní sudé harmonické složky původního tónu f , změní se tedy pouze barva tónu, který se stane plnějším. To je důvod, proč dva tóny vzdálené o oktávu dávají plný souzvuk. Tón f a tón $2f$ o oktávu vyšší vlastně znějí natolik podobně, že je hudebníci dokonce značí stejným písmenem. Odlišují je jen indexem označujícím příslušnou oktávu.

Pokud zazní současně tóny $2f$ a $3f$, výsledný zvuk připomíná tón f , protože spektrum obou tónů obsahuje harmonické složky $2f, 3f, 4f, 6f, 8f, 9f, 10f, \dots$, tedy téměř kompletní spektrum tónu f . Oba tóny proto tvoří velmi dobrý **souzvuk**, **konsonanci**. Mimořádné libozvučnosti kvinty, tj. dvojsouzvuku $2 : 3$, si všiml již Pythagoras a vybudoval na ní svůj systém ladění.

Podobně dostaneme velmi dobrý souzvuk pro tóny v poměru $3 : 4, 3 : 5, 4 : 5, 5 : 6$ a konečně i pro $5 : 8$. Jiné dvojice tónů, například $4 : 7, 5 : 7, 8 : 9$ atd., již znějí nelibozvučně, hovoříme proto o **nesouzvuku**, **disonanci**. Pro harmonický souzvuk tedy musí být obě poměrná čísla menší než sedm. Čím menší čísla tento poměr tvoří, tím je souzvuk tónů dokonalejší. Hudební souzvuk dvou tónů znamená, že oba tóny mají společnou periodu, takže nevytvářejí zázněje, které jsou fyzikální příčinou disonance.

Délky základních intervalů.

interval			půltóny		
prima	$1/1$	0	kvinta	$3/2$	7
malá sekunda	$9/8$	1	malá sexta	$8/5$	8
velká sekunda	$10/9$	2	velká sexta	$5/3$	9
malá tercie	$6/5$	3	malá septima	$9/5$	10
velká tercie	$5/4$	4	velká septima	$15/8$	11
kvarta	$4/3$	5	oktáva	$2/1$	12
triton	$7/5$	6	***	*	*

7.6.2 Hudební intervaly

Vzdálenosti mezi tóny jsou dány poměry jejich frekvencí a nazývají se **hudební intervaly**. Základní intervaly mají jména: prima, sekunda, tercie, kvarta, kvinta, sexta, septima, oktáva, nóna, decima, undecima, duodecima, terdecima, kvartdecima a kvintdecima. Označení pochází z diatonické stupnice, kde jsou jednotlivé stupně různě veliké, proto je nutno rozlišovat intervaly čisté, malé a velké, které mohou být dále všechny ještě zvětšené a zmenšené o půltón nebo dvojsvětšené a dvojsmenšené o dva půltóny, tj. o celý tón. Základním intervalem je prima $1/1$ a oktáva $2/1$, čistými intervaly jsou dále kvinta $3/2$ a kvarta $4/3$. Velká a malá sekunda jsou pak intervaly $9/8$ a $10/9$, velká a malá tercie jsou intervaly $5/4$ a $6/5$, velká a malá sexta jsou intervaly $5/3$ a $8/5$, velká a malá septima jsou intervaly $9/5$ a $15/8$.

7.6.3 Hudební spektrum

Rozsah slyšitelných tónů zabírá přibližně interval tónů o frekvencích 20 až 20 000 Hz. Tomu odpovídají tři dekády (10^3) nebo deset **oktáv** (2^{10}) hudebního intervalu. V hudební praxi vystačíme obvykle s osmi oktávami. Každá oktáva je rozdělena na intervaly, které oddělují jednotlivé tóny. Oktávy i tóny mají svá jména. Například u diatonické stupnice rozeznáváme osm základních tónů **c-d-e-f-g-a-h-c** v každé oktávě a u chromatické stupnice třináct tónů **c-cis-d-dis-e-f-fis-g-gis-a-ais-h-c**.

oktáva	tóny					rozsah
						Hz
subkontra	C ₂	D ₂	E ₂	...	H ₂	16 – 33
kontra	C ₁	D ₁	E ₁	...	H ₁	33 – 66
velká	C	D	E	...	H	66 – 132
malá	c	d	e	...	h	132 – 264
čárkovaná	c ¹	d ¹	e ¹	...	h ¹	264 – 528
dvoučárkovaná	c ²	d ²	e ²	...	h ²	528 – 1056
tříčárkovaná	c ³	d ³	e ³	...	h ³	1056 – 2112
čtyřčárkovaná	c ⁴	d ⁴	e ⁴	...	h ⁴	2112 – 4224

7.6.4 Absolutní a relativní výška tónu

Absolutní výška tónu se udává v hertzích, například tón a' má výšku, tj. frekvenci, $f = 440$ Hz. Vzdálenost dvou tónů, tj. **hudební interval** nebo **relativní výška** tónu se udává zlomkem. Relativní vzdálenost dvou tónů $f_1 = 200$ Hz a $f_2 = 300$ Hz je tedy $3/2$. Říkáme pak, že tón f_2 je o čistou kvintu (interval $3/2$) vyšší než tón f_1 . Základním a nejdůležitějším intervalem je **oktáva**, tj. interval $2/1$.

Vzdálenost dvou tónů se udává také v centech, které zavedl roku 1885 ALEXANDER JOHN ELLIS. **Cent** je definován tak, aby vzdálenost temperovaného půltónu byla přesně 100 centů, tj. aby celá oktáva byla rovna 1200 centům. Proto je vzdálenost dvou tónů f_1 a f_2 v centech dána vzorcem

$$\Delta = 1200 \log_2 \frac{f_2}{f_1} = \frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{f_2}{f_1}.$$

Například kvinta $3/2$ odpovídá 702 centům. Lidské ucho rozliší nanejvýš interval pěti centů (tři promile), a to jen v oblasti maximální citlivosti kolem 1 kHz.

Transpozice tónu je posun tónu o oktávu výše nebo níže, posun o dvě kvinty dává interval $9/4$, po transpozici dolů dostaneme sekundu $9/8$. **Inverze** je doplněk tónu do oktávy, například z kvinty $3/2$ tak dostaneme kvartu $4/3$. Součet kvinty a kvarty proto dává oktávu, tj. platí $3/2 * 4/3 = 2/1$.

7.6.5 Akord

Akord je souzvuk alespoň tří tónů, tj. harmonický trojzvuk, čtyřzvuk apod. Základním hudebním akordem je **durový kvintakord**. Výšky tónů durového kvintakordu jsou v poměru $4 : 5 : 6$, v tónině C-dur jej tvoří například tóny **c-e-g**.

Základní kvintakordy jsou **tónika** T (začíná na I. stupni), **dominanta** D (začíná na V. stupni) a **subdominanta** S (začíná na V. stupni pod základním stupněm neboli po transpozici o oktávu výše na IV. stupni). Pojmenování tónika, dominanta a subdominanta zavedl roku 1722 JEAN-PHILIPPE RAMEAU.

Sextakord dostaneme posunutím nejspodnějšího tónu kvintakordu o oktávu výše, výšky tónů pak jsou v poměru 5 : 6 : 8. **Kvartsextakord** se dostane posunutím nejspodnějšího tónu sextakordu o oktávu výše, výšky tónů jsou pak v poměru 3 : 4 : 5.

Molový kvintakord se dostane inverzí durového kvintakordu, výšky tónů, které jej tvoří, jsou tedy v poměru $1/4 : 1/5 : 1/6$, tj. 10 : 12 : 15. V tónině C-dur je molovým kvintakordem například **e-g-h**. Molový kvintakord se dostane také jako I., III. a V. stupeň molové stupnice.

7.6.6 Stupnice

Základem hudební produkce jsou vzájemně ladící tóny. Dva tóny spolu ladí, jsou v **souzvuku** neboli **konsonanci**, pokud jsou jejich frekvence v poměru malých celých čísel. Vyšší harmonické tóny jsou celočíselným násobkem základního tónu, a proto vzájemně ladí a při hudbě nevadí. Tóny vydávané různými nástroji nebo i různými strunami stejného nástroje už ladit nemusí. Aby různé struny ladily a bylo možné hrát současně několik tónů, musí být soustava základních tónů vhodně vybrána. Tak vznikají **hudební stupnice**, vybrané množiny tónů zvolené tak, aby libovolné dva tóny hudební stupnice vzájemně ladily. Výběr základních tónů do hudební stupnice je úkolem **teorie ladění**. Tento výběr není jednoznačný, proto také historicky vzniklo mnoho různých hudebních stupnic. Z nich se dnes používá jen několik málo.

Stupnice je řada tónů jedné oktávy uspořádaných podle určitých pravidel. Tato pravidla také určují vzdálenosti mezi jednotlivými stupni. **Tónina** je souhrn všech tónů jedné stupnice. Obvyklé stupnice obsahují celé tóny a půltóny. Nejběžnější stupnicí je durová stupnice, která má osm stupňů. Stupnici C-dur tvoří tóny **c-d-e-f-g-a-h-c**, které odpovídají bílým klávesám u klavíru.

S jednotlivými stupni jsou spojena jména intervalů, tj. prima, sekunda, tercie, kvarta, kvinta, sexta, septima, oktáva. Sekunda je například vzdálenost mezi prvním a druhým stupněm, tercie je vzdálenost mezi prvním a třetím stupněm atd. Protože u různých stupnic jsou intervaly různé veliké, je nutno dále rozlišovat intervaly čisté, zvýšené, snížené apod.

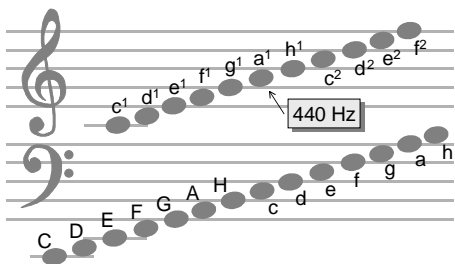
Stupnice dělíme v zásadě na **celotónové**, které obsahují jen celé tóny, **diatonické**, které obsahují současně celé tóny i půltóny, a **chromatické**, které obsahují jen půltóny. Podle způsobu ladění dělíme stupnice na **přirozené** a **temperované**.

Základem všech stupnic je oktáva. Pokud ji rozdělíme na tři intervaly, dostaneme nejjednodušší **třítónovou stupnici**. Můžeme ji rozdělit na tři stejné intervaly o velikosti $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$, tj. 400 centů, jenže pak budou spolu ladit jen tóny vzdálené o oktávu. Vhodnější je proto oktávu rozdělit na kvintu $3/2$ a kvartu $4/3$ (**c-f-g-c**), protože pak budou všechny tóny v poměru 6 : 8 : 9 : 12 a budou vzájemně ladit. V tomto případě však zase jednotlivé intervaly mezi tóny nebudou stejné. Podobně

můžeme přidávat další tóny vhodným dělením kvinty a kvarty.

Pětítónová stupnice (pentatonická) (například **c-d-e-g-a-c**) představuje jednodušší verzi hudebních stupnic. Objevuje se v hudbě národů celého světa, především na dalekém východě a v evropské lidové hudbě, například keltské. Používali ji i staří Řekové. Rovněž první středověké chorály byly ještě skládány v pětítónové stupnici. Pentatonickou stupnicí **cis-dis-fis-gis-ais-cis** se sekvencí $c - cp - c - c - cp$ nám dají například černé klapky klavíru.

Dnes převládá v moderní hudbě **sedmitónová stupnice** (heptatonická) (**c-d-e-f-g-a-h-c**) mající původ v lidové hudbě Indie a Íránu. S malými výjimkami se dnes používá jen jediná sedmitónová stupnice zvaná **diatonická**. Její původ je možno vysledovat až do starého Řecka. Západní hudba dělí oktávu na dvanáct půltónů a každý z nich může být základem diatonické stupnice. Až do 17. století se všechny používaly. Posledních tři sta let se však používají jen dvě diatonické stupnice, durová a molová (major a minor). **Durová stupnice** užívá sekvenci $c - c - p - c - c - c - p$, zatímco **mollová stupnice** užívá sekvenci $c - p - c - c - p - c - c$, kde c a p představují celý tón a půltón.



Zápis tónů čtyř oktáv v notové osnově s houslovým G-klíčem a basovým F-klíčem.

Diatonická harmonická stupnice má sedm tónů v každé oktávě. Tyto tóny značíme písmeny abecedy **c-d-e-f-g-a-h**. Graficky se tyto tóny zobrazují do pěttilinkové **notové osnovy**. Pomocí notového zápisu je možno zapsat jakoukoliv **melodii**, tj. posloupnost tónů.

název módu	pořadí tónů a půltónů	poznámka
dórský	$c - p - c - c - c - p - c$	Pythagorás
frygický	$p - c - c - c - p - c - c$	
lydický	$c - c - c - p - c - c - p$	
mixolydický	$c - c - p - c - c - p - c$	
aiolský	$c - p - c - c - p - c - c$	moll
lokrický	$p - c - c - p - c - c - c$	
jónský	$c - c - p - c - c - c - p$	dur

7.6.7 Módy

Diatonickou stupnicí můžeme transponovat o libovolný počet intervalů, tak dostaneme celkem sedm různých stupnic (středověkých módů) dórskou, frygickou, lydickou, mixolydickou, aiolskou, lokrickou a jónskou. Protože jónská stupnice má

půltón mezi III. a IV. a dále mezi VII. a VIII. stupněm, jde vlastně o durovou stupnici. Podobně aiolská stupnice je základem mollové stupnice.

7.6.8 Hudební ladění

Ve starověku se používalo především **Pythagorejské ladění** (kvintové). Jednotlivé tóny se získaly posunem o kvintu, tj. o interval $3/2$. Ve středověku se používalo především **přirozené ladění** (terciové). Od 16. století se prosadilo **temperované ladění**, čistá je už jen oktáva, zato všechny půltóny jsou stejné, mají 100 centů. Výhodou temperovaného ladění je snadná transpozice stupnic.

Kromě oktávy $2/1$, se kterou žádný problém není, existují jen tři hudební intervaly, jejichž soulad je důležitý. Jsou to kvinta $3/2$, velká tercie $5/4$ a velká sexta $5/3$. Zbývající tři konsonantní intervaly kvarta, malá sexta a malá tercie ve skutečnosti nejsou odlišné, protože se dají odvodit z prvních tří transpozic o jednu oktávu. Například inverzí kvinty $c - g$ dostaneme $g - c'$, což je kvarta. Proto, je-li kvinta na nástroji naladěna, je naladěna také kvarta.

Podstatou ladění je tedy způsob, jak jsou naladěny kvinta, tercie a sexta. Například v diatonické stupnici existuje šest kvint ($3/2$) $f - c$, $c - g$, $g - d$, $d - a$, $a - e$, $e - h$, tři tercie ($5/4$) $f - a$, $c - e$, $g - h$ a čtyři sexty ($5/3$) $c - a$, $g - e$, $d - h$ a ($27/16$) $f - d$. Je však nemožné naladit všech sedm not stupnice tak, aby všechny intervaly byly současně konsonantní.

stupeň	pythagor. ladění	tvrdé ladění	měkké ladění
I.	432	24	120
II.	486	27	135
III.	512	30	144
IV.	576	32	160
V.	648	36	180
VI.	729	40	192
VII.	768	45	216
VIII.	864	48	240

Relativní výšky tónů a intervaly mezi sousedními stupni přirozených diatonických stupnic, symboly c a p značí celý tón a půltón.

7.6.9 Pythagorejské ladění

Pythagorejské ladění vychází z čistých kvint. Pokud tón o výšce 1 zvyšujeme o kvintu, dostaneme postupně tóny o výšce $3/2$, $9/4$ a $27/8$. Podobně, když je snižujeme, dostaneme tóny $2/3$, $4/9$ a $8/27$. Pokud všechny tyto tóny posuneme do společné oktávy, tj. do intervalu 1 až 2, dostaneme po jejich uspořádání a doplnění o oktávu řadu osmi tónů o relativní výšce 1, $9/8$, $32/27$, $4/3$, $3/2$, $27/16$, $16/9$ a 2. Jednotlivé tóny jsou tedy navzájem v poměrech

$$432 : 486 : 512 : 576 : 648 : 729 : 768 : 864.$$

Všimněte si, že intervaly mezi jednotlivými stupni nejsou stejné, ale jsou dvojí. Pět intervalů je větších, mají velikost $9/8$ a dva jsou menší, mají velikost $253/243$. Celá stupnice tedy obsahuje pět celých tónů a dva půltóny, které je možno zapsat symbolicky jako řadu

$$c - p - c - c - c - p - c.$$

Pythagorejské ladění mělo ještě jednu nevýhodu, dvanáct kvint, které generují jednotlivé tóny stupnice, není rovno přesně sedmi oktávám, ale rozdíl se nazývá **Pythagorejské komma** a je roven

$$\frac{(3/2)^{12}}{2^7} = \frac{531\,441}{524\,288} \approx 1.014.$$

7.6.10 Přírozené ladění

Od 16. století se hudba hraje převážně akordicky, nejdůležitějším a nejlibozvučnějším akordem je **durový kvintakord**, tj. trojzvuk s poměrem frekvencí $4 : 5 : 6$. Abychom jej mohli zahrát na co největší množině strun, je nutno ladění nástroje upravit. Pokud vytvoříme tři na sebe navazující kvintakordy

$$4 : 5 : 6 \rightarrow 4 : 5 : 6 \rightarrow 4 : 5 : 6,$$

budou výšky těchto tónů v poměru

$$16 : 20 : 24 = 24 : 30 : 36 = 36 : 45 : 54,$$

a pokud je všechny přesuneme do jediné oktávy, dostaneme řadu osmi tónů

$$24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48,$$

kde poslední tón oktávu uzavírá. Tak jsme dostali **čistou durovou stupnici**. Ani tato stupnice není zcela rovnoměrná, intervaly tvoří řadu

$$c - c - p - c - c - c - p,$$

kde intervaly jsou rovny $9/8$, $10/9$ (celý tón) a $16/15$ (půltón). Malý rozdíl $81/80$ mezi oběma celými tóny $9/8$ a $10/9$ se nazývá **syntonické komma** a obvykle se zanedbává.

Podobně je možno vybudovat **čistou mollovou stupnici** z molového kvintakordu $10 : 12 : 15$, který se dostane inverzí durového kvintakordu $1/4 : 1/5 : 1/6$. Tak se dostane řada osmi tónů

$$120 : 135 : 144 : 160 : 180 : 192 : 216 : 240.$$

Intervaly tvoří posunutou řadu

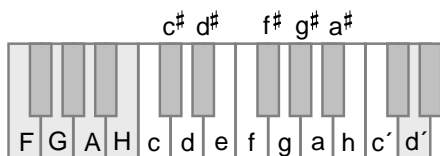
$$c - p - c - c - p - c - c,$$

kde intervaly jsou rovny opět $9/8$, $10/9$ (celý tón) a $16/15$ (půltón). Všimněte si, že ze všech přírozených stupnic je durová stupnice vyjádřena pomocí nejmenších čísel, je tedy nejvíce melodická a proto i nejpoužívanější.

7.6.11 Chromatická stupnice

Aby byla stupnice rovnoměrnější, zavádí se k osmi základním tónům durové stupnice navíc ještě pět zvýšených půltónů $c^\sharp = \text{cis}$, $d^\sharp = \text{dis}$, $f^\sharp = \text{fis}$, $g^\sharp = \text{gis}$ a $a^\sharp = \text{ais}$, kde každý z půltónů je zvednut o stejný interval $25/24$ od tónů c , d , f , g , a . Podobně je možno definovat pět snížených půltónů $d^b = \text{des}$, $e^b = \text{es}$, $g^b = \text{ges}$, $a^b = \text{as}$, $h^b = \text{b (hes)}$, kde každý z půltónů je snížen o interval $25/24$ od tónů d , e , g , a , h . Posuvky \sharp a b se čtou *křížek* a *béčko*.

Všimněte si, že v přirozeném ladění enharmonické tóny, jako například $\text{cis} = 25/24 \approx 1.042$ a $\text{des} = 27/25 = 1.08$, nesplývají. Aby nebylo nutno zavádět příliš mnoho nových strun, ladí se nástroj na průměrnou hodnotu obou enharmonických tónů, a přidává se proto jen pět nových kláves. Tyto dvanáctitónové stupnice se pak nazývají **chromatické stupnice**. Chromatická stupnice umožňuje na rozdíl od diatonické pohodlnou transpozici stupnic.



Rozmístění půltónů (černé klapky) na klavíru.

7.6.12 Temperované ladění

U nástrojů, které není možno pokaždé ladit, například už jen z toho důvodu, že obsahují příliš velký počet strun, příkladem je klavír nebo varhany, se místo přirozeného ladění používá rovnoměrné temperované ladění. U **temperované stupnice** jsou všechny půlintervaly přesně stejné a jejich velikost je tedy rovna

$$\sqrt[12]{2} \approx 1.059 \quad \text{neboli} \quad 100 \text{ centů,}$$

protože se jich do oktávy musí vejít právě dvanáct. Souzvuk tónů temperované stupnice není tak dokonalý jako u harmonických stupnic, protože poměr jejich frekvencí už není racionálním číslem. Pro srovnání, harmonické půltóny mají velikost $25/24 \approx 1.042$, $16/15 \approx 1.067$, $27/25 = 1.080$. Rozdíl mezi harmonickými a temperovanými stupnicemi tedy činí maximálně 2 %, což rozliší jen cvičené ucho. V temperované stupnici rozdíl mezi zvýšenými a sníženými enharmonickými tóny, tj. například mezi cis a des , zcela mizí.

7.6.13 Absolutní nastavení stupnice

Absolutně jsou všechny hudební stupnice určeny pomocí **komorního čárkovaného a**, které má od roku 1939 podle normy ISO absolutní frekvenci rovnu přesně

$$a' = a^1 = 440 \text{ Hz.}$$

Proto má tón a'' o oktávu vyšší frekvenci $a'' = a^2 = 880 \text{ Hz}$ a tón A o oktávu snížený frekvenci $A = 220 \text{ Hz}$. Výška ostatních tónů již závisí na hudební stupnici

a typu ladění. Například tón c' má v durové stupnici frekvenci 264 Hz, tj. $3/5$ ze 440 Hz, ale v mollové stupnici 275 Hz, tj. $5/8$ ze 440 Hz.

Chromatická stupnice přirozená a temperovaná

nota	přiroz.	Hz	nota	temper.	Hz
c'	1/1	264	c'	1	261.63
cis'	25/24	275	cis'	1.059	277.18
des'	27/25	285.12	des'	1.122	293.66
d'	9/8	297	d'	1.189	311.13
dis'	75/64	309.38	dis'	1.260	329.63
es'	6/5	316.8	es'	1.335	349.23
e'	5/4	330	e'	1.414	369.99
f'	4/3	352	f'	1.498	392.00
fis'	25/18	366.67	fis'	1.587	415.30
ges'	36/25	380.16	ges'	1.682	440
g'	3/2	396	g'	1.782	466.16
gis'	25/16	412.5	gis'	1.888	493.88
as'	8/5	422.4	as'	2.0	523.25
a'	5/3	440	a'		
ais'	125/72	458.33	ais'		
b'	9/5	475.2	b'		
h'	15/8	495	h'		
c''	2/1	528	c''		

7.6.14 Názvy not

Základem ladění je kvarta $4/3$ a kvinta $3/2$. Jejich součet dělá oktávu $2/1$ a jejich rozdíl sekundu $9/8$, která definuje celý tón. Rozdělení oktávy do dvou tetrachord oddělené celým tónem je základem diatonické stupnice (obsahují dvojí, tj. celé tóny a půltóny). Tetrachord znamenal původně nástroj se čtyřmi strunami, krajní se liší o kvartu, vnitřní byly laděny různě. Zde tetrachord znamená část stupnice obsahující čtyři tóny vzdálené od sebe o půltón a dva celé tóny.

Oktáva je složena ze dvou stejných tetrachord $e-f-g-a \oplus b-c-d-e$, kde každá z tetrachord obsahuje čtyři tóny vzdálené o malou sekundu, velkou sekundu a velkou sekundu, což dohromady tvoří kvartu $256/243 * 9/8 * 9/8 = 4/3$. Křížek \oplus zde značí velkou sekundu $9/8$, a to dá dohromady skutečně celou oktávu $4/3 * 9/8 * 4/3 = 2$. Tyto tóny Řekové nazývali jmény: *hypate*, *parhypate*, *lichanos*, *mese*, *paramese*, *trite*, *paranete* a *nete*, tedy ne písmeny jako je značíme dnes. Později byl přidán jeden tetrachord na každé straně, a tak vznikl *Větší dokonalý systém* obsahující dvě oktávy $BCDE + EFGa \oplus bcde + efga$. Půltónový interval je vždy mezi tóny $e-f$ a $b-c$. Nakonec byl přidán ještě tón A , aby byly obě oktávy úplné. V tomto okamžiku se ujalo označení tónů písmeny, nejprve řeckými, později latinskými a tóny obou oktáv dostaly označení, na které jsme dnes zvyklí **ABCDEFGabcdefga**.

Za počáteční notu základní stupnice dnes považujeme notu **c**, důvod je historický, souvisí s vývojem **hexachordu**, soustavy šesti strun naladěných tak, aby intervaly tvořily posloupnost $c-c-p-c-c$. Hexachord je možno v existující soustavě not sestavit pouze na třech místech **GABCDE**, **CDEFGA** nebo **FGAB^bCD**. Přirozené **B** se nazývalo tvrdé (durum) a snížené **B** se nazývalo měkké (molle), proto hexachord začínající na notě **G** se označoval jako tvrdý a hexachord začínající na notě **F** se označoval jako měkký. Z toho později vzniklo označení stupnic dur a moll. Konečně hexachord začínající na notě **C** se nazýval přirozený.

7.6.15 Z historie ladění

Posloupnost sedmi tónů diatonické stupnice byla pojmenována nejprve písmeny řecké abecedy A-B-Γ-Δ-E-Z-H, později latinské abecedy A-B-C-D-E-F-G (ANICIUS MANLIUS BOETHIUS 6. stol. *De Institutione Musica*). Pro neharmoničnost tónu *b* (například s tónem *f*) se tento někdy snižoval o půltón a oba tóny *b* se rozlišovaly způsobem psaní na *b-quadratum* (hranaté) a *b-rotundum* (kulaté). Z kulatého *b* vznikl časem tón *b = hes* a z hranatého tón *h*. Tak vzniklo dnešní označení základních tónů stupnice **c-d-e-f-g-a-h-c**.

Základní poznatky o harmonii tónů znal již PYTHAGORÁS ZE SAMU v 6. stol. př. n. l. a EUKLEIDÉS ALEXANDRIJSKÝ ve 3. stol. př. n. l. Na rozdíl od Pythagora, který kladl důraz na matematickou přesnost, ARISTOXENÉS Z TARENTU preferoval sluchový cit. DIDYMOS a KLAUDIOS PTOLEMAIOS zavedli do hudební teorie tercie $5/4$ a $6/5$ a malý půltón $16/15$ namísto Pythagorova půltónu $256/243$. V hudbě se tercie a sexty objevují až od počátku renesance, kdy začaly být pokládány rovněž za harmonické (WALTER ODINGTON 1300).

Podle Platónovy nauky o hudbě sfér byly ve středověku jednotlivé noty přiřazeny planetám takto: **a** = Měsíc, **b** = **h** = Merkur, **c** = Venuše, **d** = Slunce, **e** = Mars, **f** = Jupiter a **g** = Saturn. Vedle sedmi planet, sedmi kovů a sedmi dnů v týdnu máme tedy v astrologii ještě sedm tónů do oktávy.

BARTOLOMÉ RAMOS DE PAREJA nahrazuje ve své *Musica practica* z roku 1482 Pythagorovy intervaly $81/64$ a $32/27$ harmonickými intervaly $5/4$ a $6/5$. GIOSEFFO ZARLINO 1588 píše, že konsonance nastává pro každý poměr malých čísel do šesti.

GUIDO D'AREZZO v 11. století označuje noty hexachordu *ut, re, mi, fa, sol* a *la* podle počátečních slabik prvních šesti veršů latinského chvalo zpěvu na sv. Jana Křtitele *Ut queant laxis, Resonare fibris ...* Později byla přidána nota *si* a solmizační slabika *ut* se dnes nahrazuje slabikou *do*.

Temperované ladění navrhl roku 1691 ANDREAS WERCKMEISTER především proto, aby odstranil problém s Pythagorejským komma. Principy skladby pomocí **chromatické stupnice** (skládající se ze dvanácti půltónů v oktávě) poprvé formuloval skladatel ARNOLD SCHOENBERG na počátku dvacátého století.

7.6.16 Transpozice stupnic

Při temperovaném ladění je transpozice stupnic snadná. Jak víme, durová stupnice musí zachovávat délky intervalů podle schématu $c - c - p - c - c - c - p$. Stupnice

základních tónů **c-d-e-f-g-a-h-c** to splňuje, je tedy durovou stupnicí začínající tónem **c**, nazývá se proto stupnicí C dur. Pokud požadujeme durovou stupnicí G dur, která začíná od noty **g**, nevystačíme se základními tóny **g-a-h-c-d-e-f-g**, protože mezi tóny **e-f** je půltón a mezi tóny **f-g** je celý tón. Musíme proto zvýšit tón **f** na **fis**, a hledaná stupnice má pak složení **g-a-h-c-d-e-fis-g**. Podobně, stupnice D dur má dvě zvýšené noty **fis** a **cis**, takže ji tvoří tóny **d-e-fis-g-a-h-cis-d**. Analogicky dostaneme všechny možné durové a mollové stupnice, jak je to uvedeno přehledně v následujících dvou tabulkách paralelních durových a mollových stupnic.

Paralelní stupnice křížkové (kvintový okruh)

Durové stupnice	Molové stupnice	Počet #	Výčet # v předznamenání
C dur	a moll	0	
G dur	e moll	1	fis
D dur	h moll	2	fis, cis
A dur	fis moll	3	fis, cis, gis
E dur	cis moll	4	fis, cis, gis, dis
H dur	gis moll	5	fis, cis, gis, dis, ais
Fis dur	dis moll	6	fis, cis, gis, dis, ais, eis
Cis dur	ais moll	7	fis, cis, gis, dis, ais, eis, his

Paralelní stupnice béčkové (kvartový kruh)

Durové stupnice	Molové stupnice	Počet b	Výčet b v předznamenání
C dur	a moll	0	
F dur	d moll	1	bé
B dur	g moll	2	bé, es
Es dur	c moll	3	bé, es, as
As dur	f moll	4	bé, es, as, des
Des dur	b moll	5	bé, es, as, des, ges
Ges dur	es moll	6	bé, es, as, des, ges, ces
Ces dur	as moll	7	bé, es, as, des, ges, ces, fes

7.7 Ultrazvuk

7.7.1 Co je to ultrazvuk

Ucho slyší zvuky o frekvencích 20 Hz až 20 kHz, zvukové vlny o vyšších frekvencích už lidské ucho neslyší. Vlny takových frekvencí nazýváme **ultrazvuk**. Technicky dovedeme vyrobit ultrazvukové vlny téměř neomezené frekvence a intenzity. Speciálně, ultrazvukové vlny o extrémně vysokých frekvencích (větších než 10^9 Hz) se

označují jako **hyperzvuk**. Tyto akustické vlny jsou však již značně tlumené, a nemají proto takový praktický význam jako ultrazvuk. Experimenty také ukazují, že hyperzvuk o frekvenci vyšší než 10^{13} Hz se již běžnými látkami vůbec šířit nemůže. Je to důsledek skutečnosti, že vlnová délka takové hyperzvukové vlny je již menší než vzdálenost atomů.

Ultrazvuk se šíří přímočaře a chová se tedy spíše jako světlo než zvuk. Platí pro něj zákony odrazu a lomu, ultrazvukové vlny je možno soustředit do jednoho směru nebo bodu. Ultrazvuk je proto možno s úspěchem užívat i k zobrazování. Odlišné vlastnosti ultrazvuku ve srovnání s obyčejným zvukem plynou z jeho velmi krátké vlnové délky. Zatímco vlnová délka zvuku o frekvenci 1 kHz je rovna třetině metru, vlnová délka ultrazvuku o frekvenci 1 MHz je rovna třetině milimetru a vlnová délka zvuku o frekvenci 1 GHz je rovna dokonce třetině mikrometru, takže je již menší než vlnová délka světla.

Ultrazvuk se používá především v kapalinách, protože ve vzduchu je velmi silně absorbován. Například intenzita ultrazvuku o frekvenci 1 MHz je zeslabena na polovinu průchodem 22 mm silné vrstvy vzduchu, zatímco ve vodě se zeslabí intenzita ultrazvuku na polovinu až průchodem 10 m silné vrstvy vody. Ultrazvuk se tedy chová přesně opačně než rádiové vlny, které jsou naopak ve vodě silně tlumeny. Protože radar pod vodou nefunguje, jsou lodi a ponorky odkázány na sonary.

7.7.2 Využití ultrazvuku

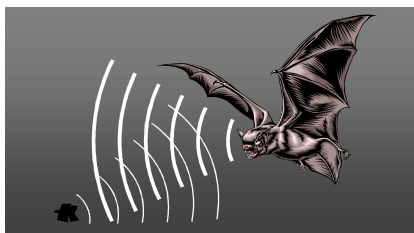
Zařízení, které využívá **echolokace**, tj. odrazu ultrazvuku, se nazývá sonar. Funguje podobně jako radar, ale pracuje s ultrazvukovými vlnami a ne elektromagnetickými vlnami, které jsou ve vodě mnohem více tlumeny než zvuk. **Sonar** byl původně navržen pro odhalování ledovců, zájem o něj vzrostl až díky ponorkové válce za I. světové války. První sonar vyrobil roku 1918 PAUL LANGEVIN. Sonarem jsou dnes běžně vybaveny i rybářské lodě. Sonar zjišťuje profil dna a hloubku moře, hledá rybí hejna nebo nepřátelské ponorky. Ultrazvuk lze využít také k určování rychlosti automobilů policejním radarem nebo k zaostřování automatických fotoaparátů.



Hlavička pětiměsíčního plodu v děloze matky při sonografickém vyšetření.

Sonografie (zobrazování pomocí ultrazvuku) umožňuje v reálném čase bezbolestně a bez škodlivých následků prohlížet břišní dutinu lidského těla nebo pozorovat vývoj a určovat pohlaví plodu v děloze matky. Ultrazvuk umožňuje nedestruk-

tivní kontrolu kvality neprůhledných materiálů, například kovových odlitků nebo svarů potrubí. Ultrazvuk používají k orientaci a lovu také některá zvířata, například netopýři v noci nebo delfíni ve vodě.



Pomocí ultrazvuku se v noci orientuje a také loví svou kořist netopýř.

Intenzivní ultrazvuk způsobuje v kapalinách **kavitaci**, komplexní jev podobný varu kapaliny, k němuž však dochází za studena. Již pro intenzitu 1 W/cm^2 (tj. 160 dB) bude efektivní hodnota akustického tlaku ve vodě rovna jedné atmosféře

$$p_{\text{ef}} \approx \sqrt{ZI} \approx 10^5 \text{ Pa},$$

což znamená, že ve vodě vznikají a rychle zanikají malé bublinky se záporným tlakem, kde se voda mění na páru. Kavítace je možno využít k odstraňování zubního kamene, k drčení ledvinových kamenů, k čištění optických skel a brýlí, k emulgaci nemísitelných kapalin nebo k odplyňování kovových tavenin.

Není technicky obtížné vyrobit ultrazvuk o intenzitě 100 W/cm^2 (tj. 180 dB) naprosto nepředstavitelné pro slyšitelný zvuk. Takto intenzivní ultrazvukový svazek je možno použít k bezkontaktnímu nahřívání materiálů, k pájení kovových, především hliníkových prášků, k dezinfekci chirurgických nástrojů nebo k pasterizaci potravin.

Příklad 7.10 Odhadněte, v jakém rozsahu vzdáleností bude spolehlivě fungovat sonar, který vysílá signál o délce $\Delta t = 1 \text{ ms}$ s opakovací periodou $T = 2 \text{ s}$.

Řešení: Odražený signál se vrátí za dobu $t = 2L/c$, která musí být delší než doba trvání signálu Δt , jinak by odražený signál zanikl ve vyslaném signálu, a kratší než perioda T pro jednoznačnost určení vzdálenosti. Sonar tedy určí spolehlivě vzdálenosti z intervalu

$$c\Delta t/2 < L < cT/2,$$

kde $c \approx 1500 \text{ m/s}$ je rychlost zvuku ve vodě. Numericky dostaneme $0.75 \text{ m} < L < 1500 \text{ m}$.

7.7.3 Zdroje ultrazvuku

Upevníme-li ocelovou tyčinku uprostřed a podélně ji rozechvějeme, bude vydávat základní tón o frekvenci $f_1 = c/2L$. Čím bude tyčinka kratší, tím vyšší tón bude vyluzovat, až při délce $L \approx 10 \text{ cm}$ přestaneme zvuk slyšet docela, protože tón přešel do oblasti ultrazvuku. Pokud tedy tyčinku vhodně rozkmitáme, stane se zdrojem ultrazvuku.

První zdroje ultrazvuku byly založeny na **magnetostrikčním jevu**,⁶ který

⁶ Stejný jev způsobuje *vrčení* transformátorů. Kdyby transformátorem procházel střídavý proud o frekvenci větší než 20 kHz, vyzářoval by ultrazvuk. S tím se dnes setkáme například u impulzních zdrojů nebo kompaktních zářivek.

objevil roku 1842 JAMES PRESCOTT JOULE. Feromagnetické látky mění v magnetickém poli své rozměry, například pro železo a magnetickou intenzitu 10^5 A/m je relativní změna délky řádu 10^{-3} . Periodickou změnou magnetického pole v cívice se železné jádro rozkmitá a stane se vydatným zdrojem ultrazvuku. Magnetostrikce se používá pro frekvence do 50 kHz. Pro vyšší frekvence se hodí spíše zdroje založené na **elektrostripci**, což je inverzní **piezoelektrický jev**.⁷ Na destičku piezoelektrického krystalu, například z křemene SiO_2 nebo z titaničitanu barnatého BaTiO_2 , se přivede vysokofrekvenční napětí, které destičku rozkmitá. Při rezonanci budou amplitudy mechanických kmitů značné. Takto se generuje ultrazvuk až do frekvencí 10 MHz. Piezoelektrický jev objevili roku 1880 PIERRE and PAUL-JACQUES CURIE, když zjistili, že při stlačení krystalu křemene se na jeho stěnách indukuje elektrické napětí.

7.7.4 Ultrazvuk a měření času

Také dnes tak běžné **křemenné hodiny** (QUARTZ) fungují na principu rezonance ultrazvukových kmitů malé křemenné destičky. Mechanické kmity křemenného krystalu stabilizují díky piezoelektrickému jevu kmity elektrické a tím i chod křemenných hodin. Potřebná frekvence jeden hertz se dostane z oblasti ultrazvuku digitálními děliči frekvence. Na ručičky hodinek se pohyb přenese krokovým motorkem. Miniaturní krystal do běžných hodin má zhruba tvar ladičky, tj. písmene U, délku 1 mm a tloušťku $50 \mu\text{m}$. Krystal je zhotoven tak, aby frekvence jeho kmitů byla rovna přesně 32 768 Hz (tj. 2^{15} Hz) s chybou minimalizovanou na 31°C , tj. na průměrnou teplotu zápěstí. Typická chyba křemenných hodinek je kolem třiceti sekund za rok.

První křemenné hodiny zkonstruoval roku 1927 WARREN MARRISON. Křemenné hodiny podstatně vylepšil roku 1938 LOUIS ESSEN. Jeho hodiny obsahovaly křemenný prsteneček o průměru 65 mm, který kmital na ultrazvukové frekvenci kolem 100 kHz a byly tak přesné (jejich chyba je menší než sekunda za rok), že jimi bylo možno měřit i nerovnoměrnost rotace Země, která byla až do té doby považovaná za stálou. Křemenné hodiny začaly nahrazovat na astronomických observatořích kyvadlové hodiny. Jako standard byly křemenné hodiny vytlačeny až v šedesátých letech poté, co byly zdokonaleny atomové hodiny. Pro běžné potřeby jsou však křemenné hodiny svou přesností stále naprosto postačující v neposlední řadě také díky své ceně, rozměrům a energetickým nárokům.

První atomové hodiny na bázi atomu césia sestrojili roku 1955 LOUIS ESSEN a JACK PARRY, dosahovaly relativní přesnosti 10^{-9} . Současné atomové hodiny dosahují přesnosti 10^{-14} , tj. chyba jedné sekundy za milióny let.

⁷Piezoelektrický jev se dříve využíval u klasických gramofonů pro převod mechanických kmitů na elektrické (krystalová přenoska), dnes se běžně používá u elektretových mikrofonů nebo u plynových zapalovačů.

7.7.5 Absorbce zvuku

Zvuk je absorbován nejen stěnami, ale i samotným pružným prostředím, ve vzduchu přitom překvapivě mnohem silněji než v kapalinách nebo pevných látkách. Intenzita akustické vlny je po průchodu vrstvy o tloušťce x zeslabena na hodnotu $I = I_0 \exp(-2\kappa x)$. Experimenty také ukazují, že součinitel absorbce roste se čtvercem frekvence $\kappa \approx af^2$, kde pro vzduch je součinitel $a \approx 2 \times 10^{-11} \text{ s}^2 / \text{m}$ a pro vodu je $a \approx 3 \times 10^{-14} \text{ s}^2 / \text{m}$. Zvuk je tedy ve vzduchu zeslabován sedmsetkrát silněji než ve vodě. Ze závislosti na frekvenci je zřejmé, že absorbce je významná především pro ultrazvukové vlny.

Příčinou absorbce zvuku je přeměna energie akustické vlny na teplo, u tekutin především v důsledku jejich viskozity. Abychom tedy popsali absorpci zvuku, musíme do popisu prostředí zahrnout i jeho viskozitu. Omezíme se pouze na malé akustické vlny, kdy rovnice můžeme linearizovat, takže platí $\rho \approx \rho_0 + \rho_a$ a $p \approx p_0 + p_a$. Navíc budeme pro jednoduchost uvažovat šíření zvuku pouze ve směru osy x . Z Navier-Stokesovy rovnice za těchto předpokladů dostaneme

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_a}{\partial x} + (2\eta - \eta') \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx -\frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

neboť pro druhou vazkost platí $\eta' \approx \frac{2}{3}\eta$. Ze stavové rovnice máme $p_a = c^2 \rho_a$ a z rovnice kontinuity plyne

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Z těchto tří rovnic vyloučením rychlosti a hustoty dostaneme vlnovou rovnici pro akustický tlak

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} + \frac{4\eta}{3\rho_0} \frac{\partial^3 p_a}{\partial x^2 \partial t}.$$

Pro $\eta = 0$ jde o obyčejnou vlnovou rovnici, pro $\eta \neq 0$ však jde o vlnovou rovnici s tlumením. Uvažujme proto tlumenou harmonickou vlnu

$$p_a = Ae^{-\kappa x} e^{i(\omega t - kx)} = Ae^{i\omega t - (\kappa + ik)x}$$

a dosadíme ji do naší vlnové rovnice. Rovnice bude pro $\kappa \ll k$ splněna jen tehdy, pokud bude platit

$$\kappa \approx \frac{2\eta}{3\rho_0 c^3} \omega^2 \approx af^2,$$

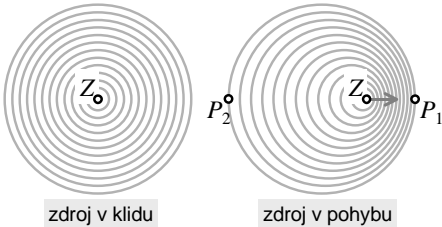
tlumení tedy skutečně roste s viskozitou a čtvercem frekvence zvukové vlny.

7.8 Dopplerův jev

7.8.1 Co je Dopplerův jev

Pohybuje-li se zdroj nebo přijímač zvuku, dochází ke změně přijímačem vnímané výšky tónu (frekvence) oproti stavu, kdy byli zdroj i přijímač v klidu. Jev snadno

pochopíme v případě pohybu zdroje. Jak se zdroj Z pohybuje, posouvá se střed sférických vln, které vyzařuje, takže před pohybujícím se zdrojem se vlnoplochy budou zhušťovat, zatímco za ním se budou naopak zřeďovat. Proto pozorovatel P_1 před pohybujícím se zdrojem bude vnímat zvýšení frekvence a pozorovatel P_2 za pohybujícím se zdrojem bude vnímat snížení frekvence. Změna vnímané frekvence závisí na rychlosti zdroje, jak za chvíli ukážeme.



Před pohybujícím se zdrojem Z se vlnoplochy zhušťují, pozorovatel P_1 vnímá vyšší frekvenci. Za pohybujícím se zdrojem se vlnoplochy zřeďují, pozorovatel P_2 vnímá pokles frekvence.

Tento jev platí pro všechna známá vlnění, tedy nejen pro zvuk, ale také pro mechanické vlny, světlo nebo rádiové vlny a nazývá se **Dopplerův jev**, protože jej roku 1842 objevil CHRISTIAN DOPPLER. Ten se původně domníval, že jeho objev umožní přirozeně vysvětlit rozmanité barvy hvězd na obloze relativním pohybem hvězd vzhledem k Zemi. Dopplerův jev má dnes ohromný praktický význam. Na Dopplerově jevu je založena řada přesných bezkontaktních metod měření rychlosti. Dopplerův jev umožňuje měřit *in vivo* rychlost krve v tepnách, rychlost automobilů na silnici, rychlost letadel ve vzduchu, ale i rychlost vzdálených galaxií na noční obloze. Také netopýr využívá Dopplerova jevu k přesnému určení směru a rychlosti letu své kořisti.

7.8.2 Elementární odvození

Zvuková vlna urazí od zdroje za jednu periodu T vzdálenost λ rovnou vlnové délce, jenže mezitím se zdroj sám posune o vzdálenost $v_Z T$, kde v_Z je rychlost pohybu zdroje, takže následující vlna vznikne již ve vzdálenosti $\lambda' = \lambda - v_Z T$ od předchozí vlny. To je vzdálenost sousedních hřebenů vln a zároveň vlnová délka vlnění pro nehybného pozorovatele. Rychlost postupu vln se však nemění, tj. $c' = c$, takže frekvence vnímaných vln bude rovna

$$f' = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - v_Z T} = f \frac{c}{c - v_Z}.$$

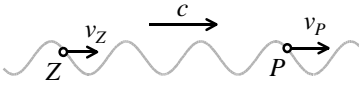
Příkladem Dopplerova jevu je například charakteristický pokles otáček motoru nebo výšky tónu klaksonu v okamžiku, kdy nás míjí rychlý automobil. Že je tento pokles zřetelný, dokazuje následující příklad. Uvažujme automobil jedoucí rychlostí $v_Z \approx 30$ m/s (tj. 108 km/h) po silnici. Když nás bude míjet, zaznamenáme pokles frekvence jeho klaksonu z hodnoty

$$f_1 = f \frac{c}{c - v_Z} \quad \text{na hodnotu} \quad f_2 = f \frac{c}{c + v_Z},$$

tj. pokles zhruba o 20% (asi o tři půltóny).

Podobně má na pozorovanou frekvenci vliv i pohyb přijímače, protože se k vlnám buď přibližuje nebo vzdaluje, a tak mění dobu mezi střetnutími s jednotlivými hřebeny vln. Rychlost relativního pohybu vln vzhledem k pozorovateli se změní na $c' = c - v_P$, kde v_P je rychlost pozorovatele, zatímco vlnová délka se nyní nemění $\lambda' = \lambda$. Pozorovatel proto vnímá frekvenci

$$f' = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{c - v_P}{\lambda} = f \frac{c - v_P}{c}.$$



Ilustrace k odvození Dopplerova jevu.

Konečně, pokud se pohybuje zdroj i pozorovatel zároveň, pak platí současně $\lambda' = \lambda - v_Z T$ a $c' = c - v_P$, takže pozorovatel registruje pozměněnou frekvenci

$$f' = \frac{c'}{\lambda'} = f \frac{c - v_P}{c - v_Z},$$

kde všechny rychlosti měříme ve směru pohybu vlny. Je-li zdroj i pozorovatel v relativním klidu, tj. $v_Z = v_P$, žádná změna frekvence se nepozoruje $f' = f$. Všimněte si, že Dopplerův jev závisí na obou rychlostech v_Z a v_P a pouze pro malé rychlosti

$$f' \approx f \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

závisí čistě na relativní rychlosti $v = v_Z - v_P$ zdroje a pozorovatele. Na akustický Dopplerův jev tedy není možno aplikovat princip relativity, protože všechny vztažné soustavy nejsou pro popis zvuku rovnocenné. Významnou soustavou je pochopitelně ta vztažná soustava, která je spojena s pružným prostředím, v němž se zvuková vlna šíří.

7.8.3 Odvození z harmonické vlny

Obecnější odvození Dopplerova jevu vychází ze studia šíření harmonické vlny. Uvažujme akustickou vlnu, kterou vyzařuje zdroj Z a zachycuje přijímač P . Pro vlnu platí vlnová rovnice, která nezávisí od pohybu zdroje a ani od pohybu přijímače. Z vlnové rovnice plyne, že rychlost vlnění je rovna c a že pro vlnu platí disperzní relace $\omega = kc$. Pokud je tedy zdrojem vysílána harmonická vlna šířící se ve směru $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, pak má tvar

$$u(\mathbf{r}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (7.16)$$

Pokud přijímač stojí, například v místě $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, pak registruje harmonické kmity

$$u_0 = u(\mathbf{0}, t) = A \sin \omega t$$

s frekvencí ω . Pokud se však přijímač pohybuje rychlostí \mathbf{v}_P a pro jeho polohu platí $\mathbf{r} = \mathbf{v}_P t$, pak registruje kmity

$$u_P = u(\mathbf{v}_P t, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_P t) = A \sin \omega_P t,$$

tj. s frekvencí $\omega_P = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_P$. Stejně tak platí pro pohyblivý zdroj, že jeho poloha je určena souřadnicí $\mathbf{r} = \mathbf{v}_Z t$ a vysílané kmity koherentní s vlnou (7.16) musí mít tvar

$$u_Z = u(\mathbf{v}_Z t, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_Z t) = A \sin \omega_Z t,$$

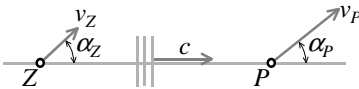
kde $\omega_Z = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_Z$. Poměr mezi frekvencí ω_P detekovanou přijímačem a frekvencí ω_Z vysílanou zdrojem je tedy

$$\frac{\omega_P}{\omega_Z} = \frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_P}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_Z} = \frac{c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_P}{c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_Z}. \quad (7.17)$$

Pokud se tedy přijímač pohybuje vzhledem ke směru šíření zvukové vlny šikmo, uplatní se jen průmět $v_P \cos \alpha_P$ jeho rychlosti do směru šíření, kde α_P je úhel mezi směrem pohybu zdroje \mathbf{v}_P a směrem šíření vlny $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Podobně, pro šikmo se pohybující zdroj se uplatní jen průmět rychlosti $v_Z \cos \alpha_Z$, takže vzorec pro Dopplerův jev má tvar

$$\frac{f_P}{f_Z} = \frac{\omega_P}{\omega_Z} = \frac{c - v_P \cos \alpha_P}{c - v_Z \cos \alpha_Z}. \quad (7.18)$$

Pokud budou zdroj i pozorovatel v relativním klidu, tj. $\mathbf{v}_Z = \mathbf{v}_P$, pak platí $f_P = f_Z$. Přijímač tedy registruje stejnou frekvenci, jakou vysílá zdroj. Také pokud se zdroj nebo pozorovatel pohybují kolmo na jejich spojnici, nemá tento jejich pohyb na přijímanou frekvenci vliv. Dopplerův jev se při příčném pohybu zdroje nebo pozorovatele neprojeví.



Dopplerův jev při šikmém pohybu zdroje a pozorovatele.

Směr \mathbf{n} pohybu vlny, a tedy i úhly α_P a α_Z , jsou odvozeny od spojnice PZ přijímače v okamžiku detekce a zdroje v okamžiku vyslání vlny, tj. od časově retardované polohy zdroje. Na to je třeba při výpočtech s obecnými pohyby dávat pozor!

Příklad 7.11 Automobil se zapnutým klaksonem o frekvenci f_0 projíždí rychlostí v kolem pozorovatele ve vzdálenosti a . Určete závislost výšky pozorované frekvence na čase.

Řešení: Přesná závislost frekvence f klaksonu na čase t , jak ji vnímá pozorovatel u silnice, je podle (7.18) dána vzorcem

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha_Z} = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c} \frac{vt}{\sqrt{a^2 + v^2 t^2}}},$$

pokud čas měříme od okamžiku maximálního přiblížení automobilu. Frekvence klaksonu tedy poklesne zhruba o $\Delta f \approx f_0 2v/c$ během časového intervalu $\Delta t \approx 2a/v$.

Příklad 7.12 Policejní radar v odstaveném autě vyšle signál o frekvenci f_0 , který se odrazí od měřeného automobilu blížícího se rychlostí v . Jakou frekvenci bude mít radarem zpětně zachycený signál?

Řešení: Automobil se přibližuje ke zdroji rychlostí v , dopadající signál se mu proto jeví podle (7.18) jako o frekvenci $f_A = f_0 (c + v) / c$. Tento signál je od karosérie automobilu odražen a zachycen radarem. Nyní se však pohybuje zdroj, takže detekovaná frekvence je podle (7.18) rovna

$$f = f_A \frac{c}{c - v} = f_0 \frac{c + v}{c - v}.$$

Zachycená frekvence se tedy zvýší zhruba tak, jak to odpovídá dvojnásobku rychlosti automobilu.



Christian Andreas Doppler 1803 - 1853

CHRISTIAN ANDREAS DOPPLER působil v letech 1836 až 1848 na Pražské polytechnice. Jeho nejvýznamnější spis *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels* (O barevném světle dvojhvězd a některých dalších hvězd) z roku 1842 obsahuje hypotézu, že barva hvězd souvisí s rychlostí jejich pohybu. Přestože posun spektra hvězd byl tehdejšími prostředky zatím neměřitelný, Dopplerův jev byl experimentálně ověřen již roku 1845 na zvukových vlnách. Doppler se většího uznání za svého života nedočkal a umírá na tuberkulózu.

7.8.4 Vliv větru

Konečně je možno uvážit i případ, kdy se vlna šíří pohybujícím se prostředím, například když se zvuk šíří vzduchem za ustáleného větru o rychlosti \mathbf{u} . Vzhledem k větrem unášenému vzduchu se zvuk šíří rychlostí \mathbf{c} , ale vzhledem k zemi se zvuk šíří rychlostí $\mathbf{c} + \mathbf{u}$. Disperzní relace pro pohybuující se prostředí má tvar

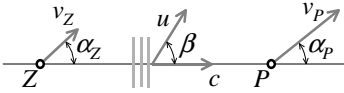
$$\omega = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{u}) = kc + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u},$$

neboť \mathbf{c} má směr \mathbf{k} , takže Dopplerův jev je nyní popsán vzorcem

$$\frac{\omega_P}{\omega_Z} = \frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_P}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_Z} = \frac{c + \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_P}{c + \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_Z},$$

kde $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ je opět směr šíření vlny. Pokud označíme úhel směru větru vůči směru šíření vlny jako β , pak platí

$$\frac{f_P}{f_Z} = \frac{\omega_P}{\omega_Z} = \frac{c + u \cos \beta - v_P \cos \alpha_P}{c + u \cos \beta - v_Z \cos \alpha_Z}.$$



Dopplerův jev za působení větru o rychlosti u .

Pokud však budou zdroj i pozorovatel v relativním klidu, tj. $\mathbf{v}_Z = \mathbf{v}_P$, pak opět platí $f_P = f_Z$ a žádný Dopplerův jev se nepozoruje. Samotný pohyb prostředí tedy posun frekvence nezpůsobí.

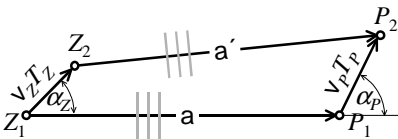
7.8.5 Kinematické odvození

Dopplerovy vzorce je možno odvodit i bez použití pojmů frekvence nebo vlnová délka. Takové odvození vlastně není součástí nauky o vlnění, ale spadá přímo do kinematiky. Předpokládejme, že zdroj Z vysílá v pravidelných intervalech s periodou T_Z světelný nebo rádiový impulz. Ten se šíří izotropně prostorem rychlostí c . Dále předpokládejme, že se zdroj pohybuje rychlostí \mathbf{v}_Z a pozorovatel rychlostí \mathbf{v}_P . Hledáme periodu T_P , se kterou budou vnímány tyto impulzy pohybujícím se pozorovatelem P . V čase t_1 je zdroj v místě Z_1 a vyšle pulz. Ten zachytí pozorovatel v místě P_1 v čase t'_1 . Protože se signál šíří rychlostí c , platí

$$|Z_1 P_1| = a = c(t'_1 - t_1). \quad (7.19)$$

V čase $t_2 = t_1 + T_Z$ vyšle zdroj další impulz, který zachytí pozorovatel v místě P_2 a v čase $t'_2 = t'_1 + T_P$. Opět platí

$$|Z_2 P_2| = a' = c(t'_2 - t_2). \quad (7.20)$$



Ilustrace ke kinematickému odvození Dopplerova jevu.

Pokud je perioda pulzů mnohem kratší než doba, za kterou impulz urazí vzdálenost mezi zdrojem a pozorovatelem, tj. pokud $T_Z \ll a/c$, pak platí aproximace

$$a' \approx a + v_P T_P \cos \alpha_P - v_Z T_Z \cos \alpha_Z$$

a z (7.20) vzhledem k (7.19) dostaneme

$$v_P T_P \cos \alpha_P - v_Z T_Z \cos \alpha_Z \approx c(T_P - T_Z).$$

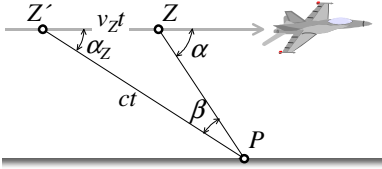
Odtud už snadno dostaneme výsledek

$$\frac{T_Z}{T_P} = \frac{c - v_P \cos \alpha_P}{c - v_Z \cos \alpha_Z},$$

ktej je ve shodě s dříve odvozeným výsledkem (7.18), pokud si uvědomíme, že frekvence f_Z a f_P jsou rovny převráceným hodnotám period T_Z a T_P .

7.8.6 Pohybující se zdroj zvuku

Pokud se letadlo pohybuje rychlostí v_Z ve směru α vzhledem k pozorovateli, pak se zvukový signál za letadlem opožděje a nám se zdá, že letadlo je teprve v místě Z' .



Opoždování zvukového signálu za rychlým objektem je značné. Letadlo vidíme v místě Z , ale podle sluchu se zdá, že je teprve v místě Z' , tedy opožděné o úhel β .

Úhlový posun β ve zdánlivé poloze letadla se najde jednoduše z trojúhelníka $\triangle PZZ'$ podle sínové věty. Platí tedy něco jako zákon lomu

$$\sin \beta = \frac{v_Z}{c} \sin \alpha. \quad (7.21)$$

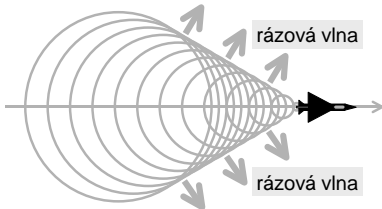
Pro $v_Z < c$ existuje ke každému α právě jedno řešení $\beta < 90^\circ$. To znamená, že pro letadla pomalejší než zvuk existuje právě jeden opožděný zvukový obraz letadla Z' . Pro letadlo kolmo nad hlavou je $\alpha \approx 90^\circ$, proto $\sin \beta \approx v_Z/c$. Pomocí tohoto vzorce je možno snadno rychlost pozorovaného letadla odhadnout. Pokud se rychlost letadla blíží rychlosti zvuku $v_Z \approx c$, pak se zpoždění β blíží úhlu, pod kterým letadlo vidíme $\beta \approx \alpha$, takže zvukový obraz Z' se vynoří z pod obzoru až v okamžiku, kdy je již letadlo nad naší hlavou.

7.8.7 Nadzvukový zdroj zvuku, rázová vlna

Všimněte si, že přijímaná frekvence f_P podle vzorce (7.18) popisujícího Dopplerův jev pro

$$c - v_Z \cos \alpha_Z = 0$$

diverguje. Za této podmínky totiž všechny vlnoplochy z pohybuujícího se zdroje zvuku přijdou k pozorovateli současně! Přitom dochází k takovému zhuštění vln, že místo akustické vlny registruje pozorovatel **rázovou vlnu** se skokovou změnou tlaku. Protože je kosinus vždy menší než jedna, vzniká rázová vlna jen u zdrojů pohybuících se rychleji než zvuk $v_Z > c$. Rázová vlna dorazí vždy ze směru $\cos \alpha_Z = c/v_Z = 1/M$, kde $M = v_Z/c$ je **Machovo číslo**. Náznorně je vznik rázové vlny vidět na obrázku.



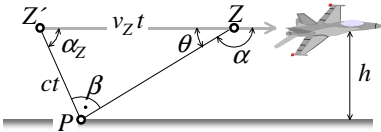
Rázová vlna (Machův kužel) vznikající za nadzvukovým letadlem.

Rázová vlna má tedy tvar pláště kužele s vrcholem v nadzvukovém zdroji zvuku, osa kužele je určena trajektorií zdroje a vrcholový úhel θ kužele se spočte podle vzorce

$$\sin \theta = \frac{1}{M}.$$

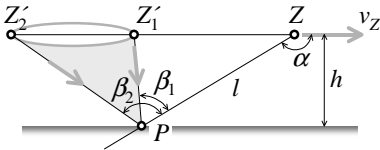
Vznik rázové vlny, zvané také **Machův kužel**, za předmětem pohybuujícím se nadzvukovou rychlostí poprvé popsal roku 1877 ERNST MACH.

Let nadzvukového letadla neslyšíme, dokud k nám nedorazí rázová vlna, která se šíří rychlostí zvuku. Podobně není možno slyšet ani střelu z pušky, dokud nás nemine, případně nezasáhne. Rázová vlna vznikající za letadlem má podobné fyzikální vlastnosti jako rázová vlna vznikající při explozi výbušniny. Výbuch způsobí rychlou nadzvukovou expanzi trhaviny a ta uvede okolní vzduch do intenzivní tlakové šokové vlny. Rázovou vlnu nelze popsat lineární vlnovou rovnicí, protože její amplituda je příliš velká, takže nelze zanedbat příslušné nelinearity.



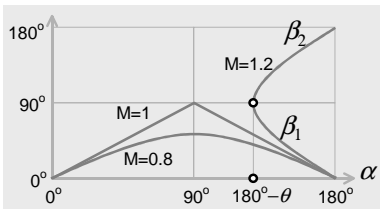
Rázová vlna za nadzvukovým letadlem Z se zdá přicházet ze směru Z' ležícím o 90° za skutečnou polohou letadla.

Teprve po příchodu rázové vlny, kdy je $\alpha \geq 180^\circ - \theta$, je možno motory letadla uslyšet. Lokalizovat letadlo sluchem je však nemožné, protože k nám zvuk letadla přichází současně ze dvou směrů Z'_1 a Z'_2 , pro které platí podmínka $\sin \beta = M \sin \alpha$, tj. ze směrů $\beta_1 = \beta$ a $\beta_2 = 180^\circ - \beta$. Podle sluchu se tedy zdá, jakoby letadla byla dvě, a to v místech Z'_1 a Z'_2 , ačkoliv ve skutečnosti je letadlo již v místě Z , tj. ve vzdálenosti $l = h / \sin \alpha > Mh$ od pozorovatele, kde h je výška letadla nad povrchem.



Zvuk nadzvukového letadla Z se po průchodu rázové vlny zdá přicházet ze dvou směrů Z'_1 a Z'_2 současně.

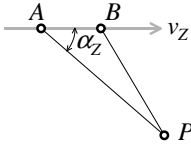
V prvním okamžiku $\alpha = 180^\circ - \theta$ je sice $Z'_1 = Z'_2$ a $\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$, ale oba zdánlivé směry Z'_1 a Z'_2 se od sebe velmi rychle, zpočátku dokonce nekonečně rychle, vzdalují, jak je možno vidět i z obrázků.



Závislost úhlů β (resp. β_1 a β_2) na úhlu α pro podzvukový a nadzvukový zdroj.

7.8.8 Čerenkovovo záření

Každá částice, která se pohybuje rychleji než vlny v daném prostředí, vytváří za sebou rázovou vlnu ve tvaru kužele. Příkladem může být v akustice rázová vlna za nadzvukovým letadlem nebo střelou z pušky a v optice **Čerenkovovo záření**, specifická světelná vlna způsobená pohybem elektricky nabitě ultrarelativistické částice, která se pohybuje rychleji než světlo v daném prostředí. Pouze ve vakuu se nic rychleji než světlo pohybovat nemůže, proto tam Čerenkovovo záření nevzniká.

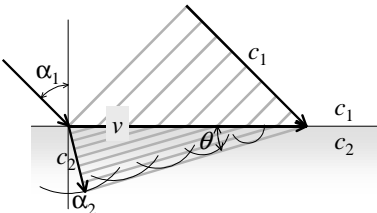


Čerenkovova vlna generovaná pohybem částice o rychlosti v_Z dorazí z bodů A i B do bodu P současně.

Částice pohybující se rychlostí v_Z vyzařuje kolem sebe sférické vlny šířící se rychlostí c . Tyto vlny se v některých směrech vzájemně zesílí a vytvoří Čerenkovovu vlnu. Takovým místem je například bod P , do kterého dorazí vlny z blízkých bodů A a B současně. Aby bylo $t_A = t_B$, kde $t_A = t + |PA|/c$ a $t_B = t + \Delta t + |PB|/c$, musí být $|PA| - |PB| = c\Delta t$. Zde t značí okamžik, kdy je částice v bodě A a Δt dobu, za kterou se dostane do bodu B . Protože pro malá Δt je $|PA| - |PB| \approx |AB| \cos \alpha_Z$, kde $|AB| = v_Z \Delta t$, máme odtud výsledek

$$\cos \alpha_Z = \frac{c}{v_Z},$$

který určuje směr šíření Čerenkovova záření. Toto záření objevil v roce 1934 PAVEL ANDREJEVIČ ČERENKOV, když si všiml slabého modrého světla vycházejícího z láhve vody vystavené radioaktivnímu záření. Teprve roku 1937 vznik záření a jeho spektrum teoreticky vysvětlili ILJA MICHAJLOVIČ FRANK a IGOR JEVGENJEVIČ TAMM.



Lomenou vlnu je možno chápat jako Čerenkovovo záření vzniklé pohybem vlnoplochy po rozhraní nadsvětelnou rychlostí $v = c_1 / \sin \alpha_1 > c_2$.

Čerenkovovo záření je však mnohem obecnějším jevem, o čemž svědčí například to, že také na rozhraní odraženou nebo lomenou vlnu můžeme chápat jako Čerenkovovo záření. Skutečně, pokud na rozhraní dvou prostředí dopadá vlna pod úhlem α_1 , klouže vlnoplocha po rozhraní nadsvětelnou rychlostí $v = c_1 / \sin \alpha_1$ a vyzařuje do druhého prostředí Čerenkovovo záření pod úhlem

$$\sin \theta = \frac{c_2}{v} = \frac{c_2}{c_1} \sin \alpha_1 \quad (7.22)$$

vzhledem k rozhraní. Protože úhel θ je současně úhlem lomu $\alpha_2 = \theta$, dostaneme z rovnice (7.22) rovnou zákon lomu $\sin \alpha_2 = (c_2/c_1) \sin \alpha_1$. Stejnou úvahou dostaneme i zákon odrazu, v prvním prostředí je však rychlost vln c_1 , takže pro úhel θ platí místo (7.22) rovnice

$$\sin \theta = \frac{c_1}{v} = \sin \alpha_1.$$

Protože úhel θ je současně úhlem odrazu $\alpha'_1 = \theta$, platí pro Čerenkovovo záření rozptýlené zpět do prvního prostředí zákon odrazu $\alpha'_1 = \alpha_1$.

7.8.9 Dopplerův jev pro světlo

Také pro **elektromagnetické vlny a světlo** platí Dopplerův jev. Vzorec pro frekvenční posun je však jiný než u zvuku v důsledku odlišného mechanismu šíření elektromagnetických vln. Dopplerův jev pro světlo se obvykle uvádí v sekcích věnovaných teorii relativity nebo elektromagnetickým vlnám. Příčinou odlišnosti Dopplerova jevu je skutečnost, že světlo ke svému šíření nepotřebuje žádné elastické prostředí. Proto také, v souladu s principem relativity, závisí poměr přijímané a vysílané frekvence jen na relativní rychlosti pozorovatele a zdroje $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Z - \mathbf{v}_P$.

Vlnový vektor tvoří v teorii relativity spolu s frekvencí dohromady **vlnový čtyřvektor** $(\mathbf{k}, \omega/c)$, který se transformuje stejně jako například čtyřvektor časoprostoru (\mathbf{r}, ct) . Platí tedy vzorec

$$\omega' = \frac{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

kde \mathbf{v} je rychlost pohybu čárkované soustavy vůči nečárkované soustavě.

Pokud spojíme s čárkovanou soustavou zdroj Z a s nečárkovanou pozorovatele P , bude \mathbf{v} značit rychlost zdroje Z vůči pozorovateli P . Vzorec pak můžeme přepsat do tvaru

$$\omega_Z = \frac{\omega_P - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_P}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega_P \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha_P}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

kde α_P značí úhel mezi směrem pohybu zdroje Z a směrem šíření vlny podle pozorovatele P . Při poslední úpravě jsme využili také disperzní relaci $k_P = \omega_P/c$ platící pro světlo ve vakuu. Pro **relativistický Dopplerův jev** tedy platí vzorec

$$\frac{f_P}{f_Z} = \frac{\omega_P}{\omega_Z} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha_P}.$$

Pokud se zdroj vzdaluje, je $\alpha_P = 180^\circ$, a pak platí

$$\frac{f_P}{f_Z} = \frac{\omega_P}{\omega_Z} = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}.$$

Pokud se zdroj přibližuje, je $\alpha_P = 0^\circ$, a pak platí

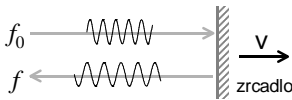
$$\frac{f_P}{f_Z} = \frac{\omega_P}{\omega_Z} = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}.$$

Tyto vzorce popisují **podélný Dopplerův jev**. Kromě podélného Dopplerova jevu, který je analogický Dopplerovu jevu v akustice, existuje pro světlo i **příčný Dopplerův jev**, který už v klasické fyzice analogii nemá. Skutečně, pokud se zdroj pohybuje kolmo na spojnici ZP , je $\alpha_P = \pm 90^\circ$, a pak vychází

$$\frac{f_P}{f_Z} = \frac{\omega_P}{\omega_Z} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq 1.$$

Jak ukazuje hlubší rozbor, pokles přijímané frekvence je způsoben relativistickou dilatací času, tj. tím, že z pohledu pozorovatele P běží čas v soustavě zdroje Z právě $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ krát pomaleji.

Příklad 7.13 Určete frekvenci světla, které se odrazí od kolmého zrcadla vzdalujícího se od zdroje Z rychlostí v .



Máme určit frekvenci světla po odrazu na pohybujícím se zrcadle.

Řešení: Frekvence světla z pohledu zrcadla je $f_Z = f_0 \sqrt{(c-v)/(c+v)}$ a z pohledu pozorovatele nastává další posun vlivem pohybu zrcadla jako zdroje $f = f_Z \sqrt{(c-v)/(c+v)}$, takže

$$f = f_0 \frac{c-v}{c+v}.$$

Stejný výsledek dostaneme úvahou, že v zrcadle vzniká obraz zdroje, který se pohybuje vzhledem k zrcadlu rychlostí v a tedy vzhledem k nehybnému zdroji rychlostí

$$u = \frac{2v}{1 + v^2/c^2},$$

jak plyne z relativistického vzorce pro skládání rychlostí. Pro malé rychlosti je pochopitelně $u \approx 2v$. Pozorovatel tedy zachytí signál zrcadlového obrazu o frekvenci $f = f_0 \sqrt{(c-u)/(c+u)}$, po dosažení za rychlost u dostaneme opět výsledek

$$f = f_0 \frac{c-v}{c+v}.$$

Všimněte si, že relativistický výsledek pro světlo je překvapivě zcela shodný s klasickým výsledkem pro zvuk.

7.8.10 Dopplerův jev v astronomii

Dopplerův jev umožňuje měřit podélnou složku rychlosti vzdálených objektů, například hvězd a galaxií. Metoda spočívá v poznatku, že všechny atomy stejného prvku vyzařují světlo o téže vlnové délce. Pokud najdeme ve spektru vzdálené hvězdy určitou spektrální čáru a zjistíme, že na spektrogramu je tato posunuta oproti očekávané poloze blíže k modrému konci spektra, pak se k nám hvězda přibližuje a pokud k červenému konci, hvězda se od nás vzdaluje.

Z naměřeného spektra se definuje bezrozměrný **rudý posuv**

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

jako poměr posunutí $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ na spektrogramu zaznamenané vlnové délky oproti očekávané poloze λ_0 . Pokud je tento posuv způsoben podélným Dopplerovým jevem, musí platit

$$1 + z = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}},$$

kde v je rychlost vzdalování hvězdy, neboť $1 + z = \lambda/\lambda_0 = f_0/f$. Odtud se spočte rychlost hvězdy podle vzorce

$$v = c \frac{(1 + z)^2 - 1}{(1 + z)^2 + 1}.$$

Obvykle je rudý posuv malý, můžeme proto použít nerelativistickou aproximaci

$$v \approx cz \approx c\Delta\lambda/\lambda_0.$$

Po důkladném prozkoumání svítivosti proměnných hvězd typu *Cefeid* roku 1927 zjistil EDWIN POWELL HUBBLE, že všechny vzdálené galaxie se od nás vzdalují, a to tím rychleji, čím jsou od nás dále. Prakticky tím dokázal, že se vesmír rozpíná. Roku 1929 pak dále objevil, že statisticky průměrná rychlost v vzdalování je přímo úměrná vzdálenosti d galaxie, takže platí jednoduchý **Hubblův zákon**

$$v \approx Hd,$$

kde H je **Hubblova konstanta**, která má zřejmě hodnotu (stav z roku 2012) z intervalu $67 - 74$ km / s na megaparsek. Čím starší a vzdálenější objekt ve vesmíru pozorujeme, tím větší rychlostí se od nás vzdaluje a tím větší rudý posuv v jeho spektru naměříme.

Hubblova konstanta má zásadní význam v kosmologii.⁸ Hubblův zákon umožňuje astronomům z naměřeného spektra pohodlně odhadnout vzdálenost nebeských objektů. Rudý posuv vzdálených galaxií a kvazarů však není způsoben pohybem těchto objektů, jak se domníval Hubble, ale rozpínáním vesmíru samotného. Galaxie a kvazary jsou ve vesmíru více méně nehybné, jejich relativní vzdálenosti se ale mění s tím, jak je unáší rozpínající se prostor, podobně jako puntíky na nafukovacím balónku. S nafukováním prostoru se úměrně zvětšují i geometrické rozměry (vlnová délka) světelných paprsků, platí tedy pro rudý posuv a vlnovou délku rovnice

$$1 + z = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{R}{R_0},$$

kde R a R_0 jsou rozměry vesmíru dnes a v okamžiku vyslání paprsku a podobně λ a λ_0 jsou vlnové délky světla dnes a v okamžiku vyslání paprsku. Čím je objekt

⁸ Rozbor výsledků úhlového spektra reliktního záření ze sondy **WMAP**, která zkoumá vzdálený vesmír od roku 2001, dává pro stáří vesmíru velmi přesnou hodnotu 13.7 ± 0.1 miliardy let, pro Hubbleovu konstantu 70.5 ± 1.3 km / s / Mpc, pro teplotu 2.725 ± 0.002 K. Vesmír se skládá především z temné energie 73 % a temné hmoty 23 %, obyčejná baryonová hmota v něm tvoří pouze 4%, z nichž pouze desetina je přístupná pozorování. Náš vesmír je nejspíše zcela plochý a bude se věčně rozpínat, jeho současný rozměr je asi 78 miliard světelných let.

vzdálenější, tím delší dobu se mohl vesmír rozpínat, a rudý posuv objektu proto bude větší. V prvním přiblížení roste náš vesmír lineárně $R \approx R_0 + \dot{R}_0 (t - t_0)$ a světlo se šíří rychlostí c , platí tedy

$$1 + z = \frac{R}{R_0} \approx 1 + \frac{\dot{R}_0}{R_0} (t - t_0) \approx 1 + \frac{\dot{R}_0}{cR_0} d,$$

kde $d \approx c(t - t_0)$ značí vzdálenost objektu, jehož světlo pozorujeme, v okamžiku vyslání paprsku. Protože přibližně platí $z \approx v/c$, máme odtud již Hubbleův zákon

$$v \approx \frac{\dot{R}_0}{R_0} d \approx Hd,$$

kde $H \approx \dot{R}_0/R_0$. Expanze vesmíru však neprobíhá rovnoměrně a v současnosti se opět zrychluje, tudíž i Hubbleova konstanta H musí být proměnnou veličinou v delších časových škálách. Ze stejného důvodu je zřejmé, že vztah mezi rudým posuvem z a vzdáleností d objektu nemůže být pro velká z lineární, jak to říká Hubbleův zákon. Největší zaznamenaný rudý posuv $z \approx 8.6$ byl pozorován u galaxie UDFy-38135539, jejíž paprsky k nám musely být vyslány v době, kdy byl vesmír 9.6 krát menší než dnes, tedy asi 600 miliónů let po Velkém třesku. Pro srovnání rudý posuv reliktního záření je $z \approx 1089$, jde tedy o záření, které vzniklo v době, kdy byl vesmír 1090 krát menší a 1090 krát teplejší než dnes, tedy asi 379 tisíc let po Velkém třesku.

Vedle tohoto kosmologického rudého posuvu pochopitelně existují i lokální rudé posuvy způsobené silnými gravitačními poli (černé díry, neutronové hvězdy apod.) nebo kinematické rudé a modré posuvy způsobené rychlými pohyby objektů, tedy vlastním Dopplerovým jevem. Všechny posuvy se obecně skládají do jediného posuvu spektra.

Příklad 7.14 Spočítejte rychlost vzdalování galaxie, u níž byl naměřen rudý posuv $z = 1$ a $z = 5$.

Řešení: Podle vzorce

$$v = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

dostaneme $v_1 = 3c/5 = 0.6c$ a $v_5 = 35c/37 \approx 0.95c$.

Příklad 7.15 Odhadněte vzdálenost galaxie, jejíž rudý posuv je $z = 0.1$.

Řešení: Rychlost galaxie je podle Dopplerova jevu $v \approx cz \approx 30\,000$ km/s. Podle Hubbleova zákona je pak vzdálenost galaxie $d = v/H \approx 430$ Mpc (tj. asi 1.4 miliardy světelných let). Při výpočtu jsme vzali střední hodnotu Hubbleovy konstanty $H \approx 70$ km/s/Mpc.

7.9 Z historie akustiky

Akustika je jedna z nejstarších fyzikálních disciplín, dnes bohužel trochu přehlíženou. Její význam spočíval od samého počátku ve spojení s naukou o slyšení a hudbou. Dlouhou dobu, tj. až do konce 19. století, se považovala akustika a optika

za velmi blízká odvětví fyziky, protože se soudilo, že světlo jsou pružné vlny hypotetického éteru. Zákony objevené v akustice se proto automaticky přenášely na optiku a naopak.

Nejstarší poznatky o výšce tónu ve vztahu k délce struny a jejímu napětí pocházejí z antiky od PYTHAGORA ZE SAMU. Pythagorás v 6. stol. př. n. l. věděl, že výška tónu je nepřímo úměrná délce struny. ARISTOTELÉS ZE STAGEIRY ve 4. stol. př. n. l. se správně domnívá, že zvuk se šíří pohybem vzduchu, ale mylně tvrdí, že vysoké tóny se šíří rychleji než tóny hluboké. V 1. stol. př. n. l. MARCUS VITRUVIUS POLLIO správně popsal mechanismus šíření zvuku a významně přispěl ke stavební akustice divadel.

Princip nezávislosti zvuků od jednotlivých zdrojů, jako součást principu superpozice, pochází od LEONARDA DA VINCIHO. Roku 1638 objevil GALILEO GALILEI, že výška tónu je dána jeho frekvencí a intenzita tónu jeho amplitudou. Roku 1636 objevil MARIN MERSENNE, že frekvence tónu struny je přímo úměrná odmocnině z napínací síly a nepřímo úměrná odmocnině z lineární hustoty struny. Objevil také existenci vyšších harmonických složek vydávaných současně se základním tónem struny a naměřil rychlost zvuku ve vzduchu 414 m/s.

První měření rychlosti zvuku provedl počátkem 17. století PIERRE GASSENDI s výsledkem 478 m/s. Přesnější výsledek 350 m/s obdrželi roku 1650 GIOVANNI ALFONSO BORELLI a VINCENZO VIVIANI. Roku 1740 ukázal GIOVANNI LUDOVICO BIANCONI, že rychlost zvuku roste s teplotou.

Roku 1660 dokázal ROBERT BOYLE a roku 1672 i OTTO VON GUERICKE, že zvuk se nešíří vzhodoprázdnem, jak tvrdil na základě svých nepřesných pokusů z roku 1650 ATHANASIUS KIRCHER.

Roku 1672 objevil ROBERT HOOKE difrakci světla a aby ji vysvětlil, navrhl vlnovou teorii světla. Roku 1678 objevil svůj princip popisující mechanismus šíření vln CHRISTIAAN HUYGENS.

Pro rychlost zvuku odvodil roku 1687 ISAAC NEWTON formuli $c = \sqrt{p_0/\rho_0}$, která však dávala pro rychlost zvuku menší předpověď než experiment. Teorie se dostala do souladu až roku 1816, kdy si PIERRE-SIMON LAPLACE uvědomil, že šíření zvuku je adiabatickým procesem a odvodil správnou formuli pro rychlost zvuku $c = \sqrt{\kappa p_0/\rho_0}$.

Roku 1701 provedl analýzu vzniku tónu u varhaních píšťal JOSEPH SAUVEUR. Objevil stojaté vlny i metodu, jak najít experimentálně, pomocí papírových jezdců, uzly a kmitny na struně. Začal používat pojem *akustika*. Roku 1715 odvodil vzorec $f = \sqrt{F/\rho S}/2L$ pro základní frekvenci struny BROOKE TAYLOR. Roku 1711 konstruuje JOHN SHORE první ladičku. Na počátku 19. stol. vyrobil první stetoskop RENÉ LAËNNEC.

JEAN LE ROND D'ALEMBERT odvodil roku 1746 jednorozměrnou vlnovou rovnici a našel také její obecné řešení. O matematickou teorii kmitání strun a tyčí se zasloužili především LEONHARD EULER, DANIEL BERNOULLI 1738, JOSEPH-LOUIS LAGRANGE, JEAN LE ROND D'ALEMBERT. Teorii chvění membrán a desek podali především SIMÉON-DENIS POISSON, RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH a GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF. Roku 1822 publikuje JOSEPH FOURIER metodu separace proměnných vhodnou i k řešení vlnové rovnice. Také jeho harmonická

analýza má pro studium zvuku velký význam.

Roku 1787 objevil ERNST FLORENZ FRIEDRICH CHLADNI způsob, jak zviditelnit zvuková chvění desek metodou po něm pojmenovaných obrazců. Objevil také, že vedle příčných vln se tyčemi šíří i podélné vlny. Roku 1802 zkonstruoval tónometr, přístroj k měření výšky tónu. Chladniho obrazce roku 1815 matematicky objasnila a cenu 3000 franků od Francouzské akademie dostala SOPHIE GERMAINOVÁ. Teprve později se ukázalo, že její řešení nebylo zcela v pořádku. Správné řešení podal až roku 1850 GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF.

Kapaliny byly dlouho považované za nestlačitelné a tudíž se soudilo, že zvuk se jimi nešíří. Teprve roku 1826 FÉLIX SAVART dokázal, že zvuk se kapalinami šíří stejně jako tuhými látkami. Roku 1827 změřili rychlost zvuku ve vodě Ženevského jezera DANIEL COLLADON a CHARLES-FRANÇOIS STURM. Jejich primárním cílem bylo změřit stlačitelnost vody. Naměřili přitom rychlost 1435 m/s při teplotě vody 8°C.

Roku 1800 zkoumá interferenci zvuku (a světla) THOMAS YOUNG, roku 1803 zavádí pojem *interference*. Roku 1816 objasnil difrakci zvuku (a světla) AUGUSTIN-JEAN FRESNEL, který tak zpřesnil Huygensův princip.

Roku 1830 FÉLIX SAVART určil rozsah slyšitelnosti lidského ucha od 14 – 16 Hz do 24 kHz, tj. asi 11 oktáv. Roku 1834 postuluje psychofyziologický zákon ERNST HEINRICH WEBER a roku 1858 jej experimentálně potvrzuje GUSTAV THEODOR FECHNER. Roku 1837 ukázal CHARLES WHEATSTONE, že barva tónu je dána jeho vyššími harmonickými složkami. Roku 1843 formuluje GEORG SIMON OHM hypotézu, podle níž naše ucho rozkládá zvuky na jednotlivé tóny a ty vnímá zcela nezávisle (Ohmův zákon akustiky).

Roku 1842 formuluje svůj princip CHRISTIAN DOPPLER. Jev experimentálně potvrdil pro zvuk roku 1845 CHRISTOPH BUYS-BALLOT a roku 1867 pro světlo WILLIAM HUGGINS.

Rychlost zvuku v ocelové rouři dlouhé kilometr změřil JEAN-BAPTISTE BIOT roku 1808. Přesnějšího výsledku dosáhl dříve Chladni metodou stojatých vln. Roku 1866 měří rychlost zvuku v různých plynech metodou stojatých vln AUGUST KUNDT. JOHN TYNDALL potvrdil existenci lomu zvuku. Konstruuje *zpívající plamen*, speciální plynový plamen až 60 cm dlouhý, který velmi citlivě reaguje na zvuk, takže je možno *zviditelnit* i tikot hodinek.

Roku 1869 zkonstruoval HERMANN VON HELMHOLTZ svůj rezonátor, provádí experimentálně rozklad zvuku v tóny a zpětně syntetizuje hlásky pomocí ladiček a rezonátorů. Helmholtz objasnil roku 1863 barvu zvuku jeho spektrálním složením. Roku 1877 vychází první moderní učebnice *Teorie zvuku* od lorda RAYLEIGHO (vlastním jménem JOHN WILLIAM STRUTT). Roku 1885 předpověděl zvláštní druh povrchové pružné vlny (Rayleighova vlna).

Roku 1839 definuje WILLIAM ROWAN HAMILTON grupovou rychlost. Roku 1883 zavedl WALTHER HARTLEY vlnové číslo.

Pro potřeby studia intenzivního zvuku jsou na počátku devatenáctého století konstruovány různé typy sirén, jejich autory jsou například CHARLES CAGNIARD DE LA TOUR 1819, FÉLIX SAVART 1830, THOMAS JOHANN SEEBECK 1840. Roku 1878 objasnil ČENĚK STROUHAL třetí tóny (Strouhalovy tóny) vznikající na ostrých

hranách třeba u píšťal. Stejný jev je zodpovědný za prásknutí biče nebo za hučení meluzíny v komíně. Pro výšku třetího tónu vznikajícího při obtékání drátu o průměru D tekutinou o rychlosti v určil Strouhal experimentálně vzorec $f \approx 0.185v/D$.

Roku 1876 vynalezl ALEXANDER GRAHAM BELL telefon, roku 1877 THOMAS ALVA EDISON fonograf a roku 1888 EMIL BERLINER gramofon. Roku 1878 vynalezl DAVID HUGHES uhlíkový mikrofon, roku 1917 EDWARD WENTE kondenzátorový a roku 1927 dynamický mikrofon. Roku 1964 vynalezl JAMES WEST elektretový mikrofon. Roku 1877 patentoval ERNST SIEMENS první reproduktor. Moderní reproduktor pochází z roku 1924, patentovali jej CHESTER W. RICE a EDWARD WASHBURN KELLOGG. První reprobedny vyrábí roku 1958 firma Cabesse.

Již roku 1794 předložil LAZZARO SPALLANZANI hypotézu, že netopýr se ve tmě orientuje sluchem. Protože však ultrazvuk žádnými smysly nevnímáme, byl objeven relativně pozdě. Ultrazvukové píšťaly konstruuje roku 1876 FRANCIS GALTON a ultrazvuk pomocí elektrických jisker generuje PJOTR NIKOJAJEVIČ LEBEDĚV. Roku 1916 využil PAUL LANGEVIN piezoelektrický jev u křemene ke konstrukci výkonných ultrazvukových zdrojů. Roku 1918 sestrojil první sonar pro detekci ponorek. První komerční sonografický skener pro využití v medicíně vyrobil roku 1962 JOSEPH HOLMES.

Kolem roku 1900 zakládá WALLACE SABINE moderní stavební prostorovou akustiku. Roku 1961 obdržel GEORG VON BÉKÉSY Nobelovu cenu za objasnění mechanismu vnitřního ucha zakladatel moderní fyziologické akustiky.