

Kapitola 5

Dynamika hmotného bodu

5.1 Newtonovy pohybové zákony

Nejdůležitější částí mechaniky je **dynamika**. Zatímco kinematika pohyb jen popisuje, dynamika zkoumá, jak pohyb souvisí se silami, které na těleso působí. Základními zákony dynamiky se rozumí **zákon setrvačnosti, zákon síly a zákon akce a reakce**. Tyto zákony tvoří páteř celé mechaniky.

Za zakladatele dynamiky se právem považuje ISAAC NEWTON, který roku 1687 publikoval snad nejdůležitější fyzikální spis dosavadní historie lidstva. Spis nesl název *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematické principy přírodní filozofie) a obsahoval základní pohybové zákony. Ve stejné práci Newton vysvětlil rovněž podstatu gravitace, příčinu zemské přitažlivosti a pohybů nebeských těles. Pro zajímavost uvedme doslovná znění Newtonových pohybových zákonů a jejich věrný překlad.

Zákon setrvačnosti:

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud a dokud není vtlačeno silami donuceno tento svůj stav změnit.

Zákon síly:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundam lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Změna pohybu je úměrná hybné vtlačené síle a nastává podél přímky, v níž síla působí.

Zákon akce a reakce:

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive: corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

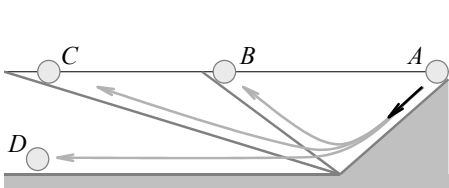
Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

Newtonovy pohybové zákony není možno odvodit, jsou zobecněním tisíce pečlivých pokusů a slouží jako základní postuláty, na nichž je deduktivně vybudována celá klasická mechanika. Přesto se v dalším pokusíme alespoň částečně osvětlit cesty, jimiž se zakladatelé moderní fyziky v sedmáctém století ubírali, než k těmto zákonům došli.

5.1.1 Zákon setrvačnosti

Až do sedmáctého století byl nejvyšší autoritou ve věcech přírodních věd největší starověký učenec ARISTOTELÉS ZE STAGEIRY. Jedno z jeho nejdůležitějších tvrzení říká, že rychlost tělesa je přímo úměrná síle, která na těleso působí a bez přítomnosti síly se každé těleso brzy zastaví. Každodenní zkušenost se zdá tento názor podporovat. Chceme-li například, aby loď plula rychleji, musíme spustit více plachet, chceme-li, aby kočár jel rychleji, musíme zapřáhnout další pár koní atd. Loď skutečně nepopluje bez plachet, stejně jako kočár nepojede bez koní. Přes tyto nepopíratelné skutečnosti nemá Aristotelés pravdu. Nedorozumění spočívá v tom, že vedle aktivní síly působí na pohybující se tělesa pasívní síly tření a odporu vzduchu, které jsme vůbec nezmnili.

Těleso, na které nepůsobí žádná síla, nazýváme **volným tělesem** a pohyb takového tělesa nazýváme **pohybem setrvačným**. V běžných pozemských podmínkách pasívní síly tření a odporu vzduchu nedokážeme odstranit, takže prakticky nemáme žádné volné těleso, na kterém bychom mohli zákon setrvačnosti demonstrovat. Skutečně dobrým přiblížením setrvačného pohybu může být pohyb kulečnickové koule po stole, neboť při valivém pohybu je tření již velmi malé.



Koule puštěná z bodu A vyběhne na nakloněné rovině do stejné výše B nebo C bez ohledu na sklon levé nakloněné roviny. Pokud však bude sklon levé nakloněné roviny nulový, bude se koule D pohybovat stálou rychlostí bez omezení.

Galileo zkoumal pohyb koule mezi dvěma nakloněnými rovinami. Vypořoval, že koule A vyběhne na levé straně nakloněné roviny do stejné výše B , z jaké byla na pravé nakloněné rovině vypuštěna. Pokud budeme zmenšovat sklon druhé nakloněné roviny, doběhne koule do stále větší a větší vzdálenosti C , než se začne vracet zpět. Bude-li tedy sklon druhé nakloněné roviny nulový D , nebude na kouli působit žádná síla, koule poběží po vodorovné rovině nekonečně dlouho a už

se nikdy nezastaví. Zhruba takovými úvahami dospěl Galileo ke svému **zákonu setrvačnosti**:

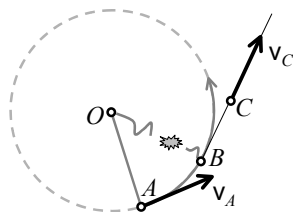
Těleso zůstává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není přinuceno působením vnějších sil svůj pohybový stav změnit. Nebo ještě stručněji:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \mathbf{v} = \text{konst.}$$

Jinak řečeno, jestliže na těleso nepůsobí žádná síla, směr ani velikost jeho rychlosti se nemění. Ze zákona setrvačnosti plyne, že volné těleso se vždy pohybuje rovnoměrně přímočaře a že setrvačným pohybem je rovnoměrný přímočarý pohyb.

Zákon setrvačnosti je historicky nejstarší z pohybových zákonů, objevil jej již padesát let před Newtonem GALILEO GALILEI a popsal ve své nejdůležitější práci *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica* (Dialogy týkající se dvou nových věd mechaniky), která vyšla roku 1638.

Kulečnicková koule se po horizontálním stole pohybuje setrvačným pohybem. Kulička na provázku, která se pohybuje rovnoměrně po kružnici, se však podle zákona setrvačnosti nepohybuje. Během pohybu totiž neustále mění směr svého pohybu, a proto neplatí podmínka setrvačného pohybu $\mathbf{v} = \text{konst.}$ Kdybychom přestřihli provázek OB , který udržuje roztočenou kuličku na kruhové dráze, zrušili bychom tím silové působení provázku na kuličku. Kulička by okamžitě opustila kruhovou dráhu a uletěla by pryč ve směru momentální tečny BC její trajektorie AB . Takový pokus názorně dokazuje existenci dostředivé síly, bez níž není pohyb tělesa po kružnici možný.



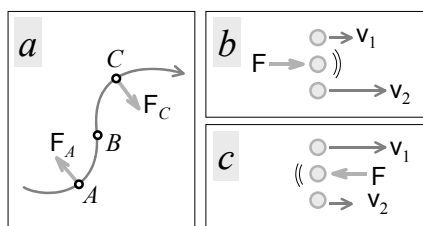
Kulička obíhá po kruhové dráze AB . Pokud dojde v místě B k přetržení provázku OB , odletí kulička vlastní setrvačností v tečném směru BC .

Mohlo by se zdát, že zákon setrvačnosti je přímým důsledkem zákona síly pro volné těleso. V tom případě by byl zákon setrvačnosti zbytečný. Tento zjednodušený výklad však předpokládá existenci absolutního pohybu. Ale protože žádný absolutní pohyb neexistuje, není zákon setrvačnosti jen elementárním důsledkem zákona síly, ale má v mechanice zásadní význam existenční. Definuje volný pohyb a inerciální vztažnou soustavu! Moderní znění zákona setrvačnosti je totiž následující:

Existuje vztažná soustava, v níž se volné těleso pohybuje beze změny rychlosti. Taková soustava se nazývá inerciální.

5.1.2 Zákon síly, pohybový zákon

Galileo svým zákonem setrvačnosti dokázal, že k pohybu tělesa není nezbytná síla a že těleso se může pohybovat stálou rychlostí i bez přítomnosti síly. Není tedy pravda, že rychlost tělesa je úměrná působící síle, jak se domníval Aristotelés. Newton šel dále a přemýšlel, jak se asi bude pohybovat těleso, na které působí stálá síla? Jeden příklad takového pohybu všichni známe, je jím volný pád. Na těleso působí stálá tíhová síla, jak je možno ověřit opakovaným vážením tělesa, a zároveň díky Galileovi víme, že padající těleso se pohybuje nerovnoměrným pohybem, kterým je rovnoměrně zrychlený pohyb se stálým zrychlením. Stálé síle tedy zřejmě odpovídá pohyb se stálým zrychlením. Takže ne rychlost, ale zřejmě zrychlení tělesa je úměrné působící síle.



Síla působící kolmo na pohyb tělesa zakřivuje jeho dráhu (a). Síla působící ve směru pohybu tělesa jej urychluje (b), zatímco síla působící proti směru pohybu jej zpomaluje (c).

Působí-li síla na těleso v klidu, dá se těleso do pohybu ve směru síly. Působí-li síla proti pohybu, těleso je zpomaleno nebo zastaveno. Působí-li síla kolmo na směr pohybu tělesa, těleso se začne odklánět od původního směru ve směru působící síly. Ve všech těchto případech má vektor zrychlení směr působící síly

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{F},$$

argumentuje Newton. Pokud jde o velikost zrychlení, pak to závisí nejen na velikosti síly, ale i na velikosti tělesa. Čím větší je těleso, tím těžší je uvést ho do pohybu, odklonit nebo zastavit. Mírou odporu tělesa vůči změně svého pohybového stavu je **hmotnost** tělesa. Hmotnost tělesa

$$m = \frac{F}{a}$$

tedy Newton definuje jako konstantu úměrnosti mezi silou a zrychlením. Říkáme také, že **hmotnost je mírou setrvačných účinků tělesa**. Jednotkou hmotnosti je **kilogram**, zkratkou kg. Těleso má hmotnost 1 kg, když mu síla 1 N uděljuje zrychlení 1 m/s^2 . Před Newtonem nebyl pojem hmotnosti znám, používal se jen pojem tíhy a váhy.

Newtonův pohybový zákon nazývaný také jako **zákon síly** zní:

Zrychlení tělesa je přímo úměrné působící síle, má směr působící síly a je nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

5.1.3 Princip superpozice

Jak víme ze statiky, na těleso může současně působit několik sil současně. Tyto síly umíme složit v jedinou výslednici $\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k$. Podle zákona síly pak platí

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \sum_k \frac{\mathbf{F}_k}{m} = \sum_k \mathbf{a}_k.$$

Výsledné zrychlení tělesa je tedy dáno součtem jednotlivých zrychlení $\mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k/m$ způsobených nezávisle jednotlivými silami. Klasická mechanika je tedy **lineární teorií** a tato skutečnost se nazývá **principem superpozice sil**.

5.1.4 Přímá úloha dynamiky

Známe-li sílu, spočteme podle zákona síly zrychlení, a odtud podle zákonů kinematiky i rychlost a polohu tělesa. To je úkolem tzv. **přímé (základní) úlohy dynamiky**.

Z matematického hlediska je zákon síly diferenciální rovnicí druhého řádu

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

pro vektorovou funkci polohy $\mathbf{r}(t)$. Tato úloha má jednoznačné řešení, pokud k zákonu síly připojíme **počáteční podmínky**, tj. polohu a rychlost na počátku pohybu $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ a $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Například, bude-li na těleso o hmotnosti m působit stálá síla \mathbf{F} , pak jeho zrychlení bude konstantní $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, a proto budou jeho rychlost a poloha rovny

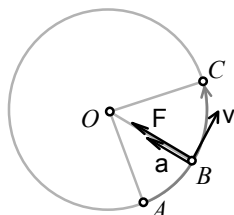
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}}{m}t \quad \text{a} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}}{m}t^2.$$

5.1.5 Obrácená úloha dynamiky

Někdy řešíme **obrácenou úlohu dynamiky**, kdy máme najít působící sílu \mathbf{F} , je-li znám pohyb tělesa $\mathbf{r}(t)$. Zákon síly pak zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (5.1)$$

ze kterého snadno najdeme působící sílu ze známé trajektorie tělesa. Probereme si tři jednoduché příklady obrácené úlohy dynamiky, z nichž nám vyplynou tři důležité síly.



Na těleso, které se pohybuje po kruhové dráze, působí dostředivá síla $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a uděluje mu dostředivé zrychlení $a = v^2/r$. Vlivem této síly se dráha tělesa \widehat{ABC} neustále zakřivuje ve směru působící síly.

Dostředivá síla

Uvažujme nejprve kruhový pohyb. Těleso se pohybuje rovnoměrně rychlostí v po kružnici o poloměru r . Přitom pochopitelně neustále mění směr své rychlosti, takže se pohybuje s nenulovým dostředivým zrychlením, které, jak již víme z kinematiky, je rovno $a = v^2/r$. Ze zákona síly nalezneme sílu, která musí na těleso působit, aby nadále setrvalo v rovnoměrném pohybu po kružnici. Podle (5.1) na těleso působí síla o velikosti

$$F_D = ma = \frac{mv^2}{r},$$

jejíž směr je totožný s dostředivým zrychlením, míří rovněž do středu otáčení, a nazývá se proto **dostředivou silou**.

Uvedený příklad ilustruje možnost rovnoměrného pohybu tělesa i za stálé přítomnosti síly. Nebýt tření, pohybovalo by se těleso po kružnici věčně. Trochu nepřesně se i pro tento druh pohybu používá označení **setrvačný pohyb**. Příkladem takového pohybu je oběžný pohyb Země kolem Slunce nebo rotační pohyb Země kolem vlastní osy.

Tíhová síla

Vezměme jiný důležitý příklad, případ volného pádu. Jak zjistil GALILEO GALILEI roku 1604, každé těleso padá k zemi zrychleným pohybem se zrychlením $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Podle pohybového zákona (5.1) je proto urychlováno silou $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{g}$. Tato síla se nazývá **tíhová síla** nebo jen **tíha** a značíme ji obvykle písmenem \mathbf{G} . Protože platí

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g}, \tag{5.2}$$

vidíme, že tíha tělesa závisí jen na jeho hmotnosti a tíhovém zrychlení. Stejná síla pochopitelně působí nejen na padající, ale i na nehybné těleso. V tom případě je však tíha kompenzována reakcí podložky nebo závěsu.

Harmonický pohyb

Zkoumejme ještě harmonický pohyb

$$x = A \sin \omega t$$

s amplitudou A kolem rovnovážné polohy $x = 0$. Zrychlení tohoto pohybu je rovno

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin \omega t \quad \text{neboli} \quad a = -\omega^2 x$$

a síla, která způsobuje harmonický pohyb, musí mít proto tvar

$$F = ma = -m\omega^2 x \quad \text{neboli} \quad F = -kx,$$

kde $k = m\omega^2$ je jistá konstanta pohybu. Síla způsobující harmonický pohyb je tedy přímo úměrná výchylce x tělesa z rovnovážné polohy, ale má opačný směr než samotná výchylka. Takovou silou je například vratná síla pružiny.

5.1.6 Setrvačná a gravitační hmotnost

Protože hmotnost se projevuje setrvačnými i gravitačními účinky, měl by se v principu rozlišovat pojem setrvačné hmotnosti m_S a gravitační hmotnosti m_G . **Gravitační hmotnost** vystupuje ve vzorci pro tíhu $G = m_G g$ a **setrvačná hmotnost** v pohybovém zákoně $F = m_S a$.

Z pohybového zákona platí pro padající těleso rovnice $m_G g = m_S a$, odtud je zrychlení tělesa

$$a = g \frac{m_G}{m_S} = g\alpha.$$

Protože všechna tělesa padají v tíhovém poli stejně rychle, to dokázal již roku 1590 GALILEO GALILEI, nezávisí poměr $\alpha = m_G/m_S$ na složení tělesa, na jeho velikosti, rychlosti a ani na jiných vlastnostech tělesa. Pokud budeme měřit obě hmotnosti ve stejných jednotkách, pak je $\alpha = 1$. V tom případě nemusíme setrvačnou a gravitační hmotnost rozlišovat vůbec, mluvíme pouze o **hmotnosti** a platí

$$m = m_S = m_G.$$

Tato významná vlastnost hmoty a gravitace se nazývá **principem ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti** a je základním postulátem, na kterém vybudoval ALBERT EINSTEIN roku 1916 teorii gravitace. Galileova pozorování byla od té doby mnohokrát ověřena a zpřesněna. První kritické ověření provedl již sám Newton. Pomocí kyvadel potvrdil ekvivalenci obou hmotností s relativní přesností 10^{-2} . Dnes víme, že princip ekvivalence platí s relativní přesností nejméně 10^{-12} , jak prokázali v šedesátých letech VLADIMIR BORISOVIČ BRAGINSKY a ROBERT H. DICKE.

Příklad 5.1 Těleso o hmotnosti m se pohybuje rychlostí v_0 . V okamžiku $t = 0$ na něj začne působit stálá síla F , která směřuje proti pohybu tělesa. Jak se bude těleso pod vlivem síly pohybovat?

Řešení: Podle pohybového zákona bude zrychlení tělesa rovno $a = F/m$ a bude mít směr brzděné síly. Půjde tedy o rovnoměrně zpomalený pohyb. Rychlost tělesa je proto rovna

$$v = v_0 - \frac{F}{m}t$$

a podobně najdeme i dráhu

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

Těleso se zastaví v čase t_0 , kdy bude $v(t_0) = 0$, odtud

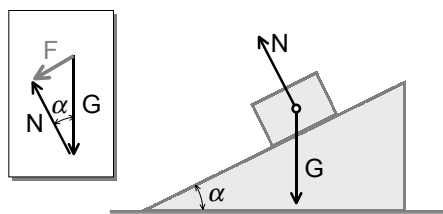
$$t_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{mv_0}{F}.$$

Do té doby urazí dráhu

$$s_0 = s(t_0) = \frac{mv_0^2}{2F}.$$

Pak bude síla F těleso znova urychlovat, jenže opačným směrem, než se pohybovalo předtím.

Příklad 5.2 Na nakloněné rovině se sklonem α leží kvádr. Jak se bude kvádr pohybovat? Tření zanedbejte.



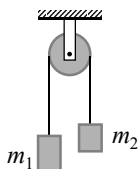
Určete pohyb kvádrů bez tření po nakloněné rovině se sklonem α . Na kvádr působí jen tíha \mathbf{G} a reakce nakloněné roviny \mathbf{N} .

Řešení: Na kvádr působí vedle tíhy \mathbf{G} reakce nakloněné roviny \mathbf{N} . Pokud zde není tření, musí být reakce kolmá k nakloněné rovině. Součtem obou sil je výsledná síla $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{N}$, která uvádí kvádr do pohybu dolů ve směru nakloněné roviny. Z obrázku je zřejmé, že její velikost je $F = G \sin \alpha$, takže zrychlení kvádrů je konstantní a rovno

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha.$$

Kvádr se bude pohybovat dolů po nakloněné rovině rovnoměrně zrychleným pohybem.

Příklad 5.3 Na obou koncích lana jsou přes kladku zavěšena dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 . Jak se bude soustava těles pohybovat?



Na pevné kladce jsou zavěšena dvě závaží o hmotnostech m_1 a m_2 . Máme určit pohyb soustavy.

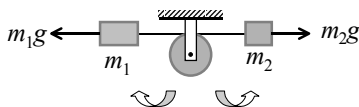
Řešení A: Na jednom konci lana působí tíha prvního závaží $G_1 = m_1 g$, na druhém konci tíha druhého závaží $G_2 = m_2 g$. Úlohu vyřešíme nejnázne tak, že si lano myšleně narovnáme, zrychlení obou těles pak bude stejné a můžeme použít pohybový zákon pro soustavu obou těles jako celek. Zanedbáme-li hmotnost lana i kladky, výsledná síla F , která uvádí soustavu o celkové hmotnosti $m = m_1 + m_2$ do pohybu, je rozdíl tíhových sil

$$F = G_1 - G_2 = g(m_1 - m_2),$$

takže zrychlení soustavy je rovno

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Soustava se bude pohybovat rovnoměrně zrychleně.



Soustavu závaží narovnáme do horizontální polohy.

Řešení B: Je možno postupovat i tak, že řešíme pohybovou rovnici každého tělesa samostatně s uvážením silové reakce R lana. Pro obě tělesa platí pohybový zákon, a proto

$$G_1 - R = m_1 a \quad \text{a} \quad R - G_2 = m_2 a.$$

Vzali jsme již v úvahu, že zrychlení obou těles musí být stejné $a = a_1 = a_2$ a že nehmotné lano je napjato na obou koncích stejnou silou $R = R_1 = R_2$. Z této soustavy rovnic máme

řešení

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{a} \quad R = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Příklad 5.4 Uvažujme těleso o hmotnosti m na počátku v klidu. Na těleso působí harmonická síla o amplitudě F_0 a frekvenci ω

$$F = F_0 \sin \omega t.$$

Jak se bude těleso pod vlivem této harmonické síly pohybovat?

Řešení: Podle pohybového zákona je

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t,$$

a tedy zrychlení je rovněž harmonickou funkcí. Rychlost tělesa najdeme integrací zrychlení

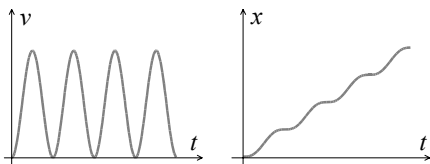
$$v = \int a dt = \int_0^t \frac{F_0}{m} \sin \omega t dt = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t).$$

Rychlost tělesa se harmonicky mění kolem střední hodnoty $F_0/m\omega$ a těleso se bude postupně a nerovnoměrně v jakýchsi přískocích vzdalovat od počátku. Okamžitou polohu tělesa najdeme integrací rychlosti, která náš odhad jen potvrzuje

$$x = \int v dt = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t) dt = \frac{F_0}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t).$$

Těleso se tedy neustále vzdaluje od počátku, i když se pravidelně na krátký okamžik, kdy platí podmínka $\cos \omega t = 1$, úplně zastaví. Průměrná rychlost vzdalování je přitom rovna

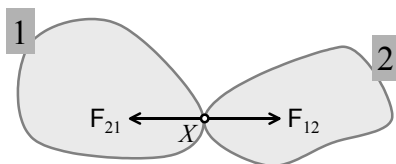
$$\bar{v} = \frac{F_0}{m\omega}.$$



Časová závislost rychlosti a polohy tělesa, na které působí harmonická síla.

5.1.7 Zákon akce a reakce

Pokud na sebe působí dvě tělesa dotykem, je možno pozorovat, že se vždy deformují obě tělesa současně, nezávisle od jejich pohybu. To svědčí o tom, že obě tělesa působí na sebe navzájem. Například oba automobily budou po srážce stejně poničené, bez ohledu na to, který z automobilů byl v okamžiku srážky v pohybu a který v klidu. Jiným příkladem dokazujícím platnost zákona akce a reakce je zpětný ráz při výstřelu náboje z pušky nebo z děla. Akce zde urychluje náboj, reakce působí na pušku a střelce.



Dvě tělesa při vzájemném kontaktu v bodě X na sebe působí stejně velkými opačně orientovanými silami \mathbf{F}_{12} a \mathbf{F}_{21} .

Zobecněním všech těchto skutečností dostaneme třetí, neméně důležitý, pohybový zákon, který uzavírá základní zákony dynamiky. Je to **zákon akce a reakce**:

Dvě tělesa na sebe vzájemně působí silami stejně velkými, ale opačně orientovanými, ležícími na společné silové přímce.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

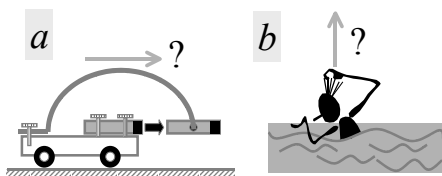
Obě síly akce a reakce jsou naprosto rovnocenné a je jen otázkou naší volby, kterou ze sil nazveme **akcí** a kterou **reakcí**. Součet obou sil je ale vždy roven nule

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}.$$

\mathbf{F}_{12} označuje sílu, kterou působí první těleso na druhé a \mathbf{F}_{21} je síla, kterou působí druhé těleso na první. Tyto síly mají nulový součet, to ale neznamená, že se obě síly vzájemně ruší a že s nimi není třeba počítat. Problém je totiž v tom, že jde o síly, které působí na dvě různá tělesa, a proto je nemůžeme sečíst. Skládat lze jen síly působící na stejné těleso.

Zákon akce a reakce je velmi významný pro řešení některých praktických úloh. Umožňuje například řešit srážku těles, aniž bychom znali detailně mechanismus jejich vzájemného silového působení nebo řešit pohyb tuhého tělesa, aniž bychom znali detailně velikosti všech vnitřních sil mezi jednotlivými atomy, z nichž se tuhé těleso skládá.

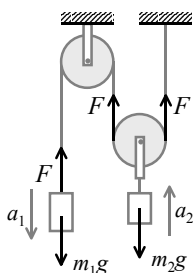
Zákon akce a reakce vysvětluje, proč vnitřní síly nemohou uvést těleso do pohybu jako celek. **Vnitřní síly** v soustavě těles existují v párech, které se navzájem dokonale kompenzují a jejichž součet je vždy přesně roven nule. Pouze **vnější síly** mohou způsobit změnu pohybového stavu tělesa. Proto je zřejmé, že důmyslné vozítko z obrázku (a) se působením magnetických sil nemůže dát samo od sebe do pohybu. Stejně tak je zřejmé, že *baron Prášil* (b) si vymýšlel, když svým naivním posluchačům vyprávěl, jak se zázračně na poslední chvíli zachránil tím, že se z močálu vytáhl za vlastní cop.



Žádná soustava se působením vnitřních sil nemůže dát sama do pohybu, nerozjede se ani magnetický vozíček (a) ani baron Prášil (b) se za vlasy sám nevytáhne z močálu ...

Platnost zákona akce a reakce plyne také z principu neexistence **perpetua mobile**. Tak se nazývá fiktivní věčně se pohybující stroj, který nepotřebuje žádný vnější pohon. Kdyby totiž obě síly, jimiž na sebe tělesa působí, dávaly nenulovou výslednici, pak by se dvojice těles musela dát sama od sebe do posuvného nebo rotačního pohybu. Tohoto jevu bychom mohli využít při konstrukci perpetua mobile. Protože se to však dosud nikomu nepovedlo, můžeme z toho naopak vyvodit, že síly akce a reakce se vzájemně vždy přesně ruší. Dále odtud můžeme také vyvodit, že obě síly akce a reakce vznikají a zanikají současně.

Příklad 5.5 Přes kladky jednoduchého kladkostroje jsou zavěšena dvě závaží o hmotnostech m_1 a m_2 . Najděte zrychlení obou závaží a sílu, jíž je napínán provázek spojující kladky. Tření a hmotnosti kladek zanedbejte.



Ilustrace k úloze. Máme určit pohyb a_1 a a_2 obou závaží na jednoduchém kladkostroji a napětí provázku F .

Řešení: Soustava se dá do pohybu vlivem tíže. Pohybové rovnice obou závaží jsou

$$m_1 a_1 = m_1 g - F \quad \text{a} \quad m_2 a_2 = 2F - m_2 g,$$

kde F je síla napnutí provázku. Třetí rovnice se dostane z geometrické podmínky $a_1 = 2a_2$ plynoucí ze skutečnosti, že pohyb závaží m_1 je dvakrát rychlejší než pohyb m_2 , které visí na dvou laních. Řešením soustavy tří rovnic dostaneme

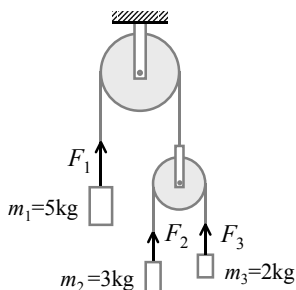
$$a_1 = 2a_2 = 2g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} \quad \text{a} \quad F = g \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2}.$$

Příklad 5.6 Přes velkou pevnou kladku visí závaží o hmotnosti 5 kg a menší kladka, přes kterou visí závaží o hmotnostech 3 kg a 2 kg. Určete zrychlení všech tří závaží za předpokladu, že vliv tření, hmotnost kladek a hmotnost lan jsou zanedbatelné.

Řešení: Soustava se dá do pohybu vlivem tíže. Naivní představa, že podmínka $m_1 = m_2 + m_3$ zaručí rovnováhu na první kladce a stačí počítat zrychlení na druhé kladce, není správná. Nicméně za uvedeného předpokladu bychom dostali výsledek

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -a_3 = g \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} = \frac{1}{5}g,$$

který se zase až tak mnoho neliší od přesného výsledku, který odvodíme za chvíli.



Ilustrace k úloze. Máme najít zrychlení všech tří závaží zavěšených na nehmotných kladkách pohybujících se bez tření.

Správně musíme počítat s pohybem obou kladek a všech tří závaží. Pohybové rovnice jednotlivých těles jsou

$$m_1 g - F_1 = m_1 a_1 \quad m_2 g - F_2 = m_2 a_2 \quad \text{a} \quad m_3 g - F_3 = m_3 a_3,$$

kde a_1, a_2 a a_3 jsou zrychlení jednotlivých těles, která měříme kladně ve směru tíhového pole, tj. ve směru dolů. Veličiny F_1, F_2 a F_3 představují síly, jimiž jsou napínána lana a budeme je naopak měřit kladně ve směru vzhůru. Z předpokladu nulové hmotnosti menší kladky musí platit podmínka rovnováhy sil $F_1 = F_2 + F_3$ i podmínka rovnováhy momentů sil $rF_2 = rF_3$. Odtud tedy hned vidíme, že $F_1 = 2F_2 = 2F_3$, neboli první lano je napínáno dvakrát větší silou než druhé. Z podmínky, že použitá lana jsou pevná a neroztažitelná, plyne dále geometrická

podmínka na zrychlení $a_2 + a_3 = -2a_1$. Nyní už máme potřebný počet šesti rovnic pro šest neznámých a můžeme je vyřešit. Dostaneme tak

$$a_1 = -g \frac{4m_3m_2 - m_2m_1 - m_3m_1}{4m_3m_2 + m_2m_1 + m_3m_1}, \quad a_2 = g \frac{4m_3m_2 + m_2m_1 - 3m_3m_1}{4m_3m_2 + m_2m_1 + m_3m_1},$$

$$a_3 = g \frac{4m_3m_2 - 3m_2m_1 + m_3m_1}{4m_3m_2 + m_2m_1 + m_3m_1} \quad \text{a} \quad F_2 = F_3 = \frac{1}{2}F_1 = \frac{4gm_1m_2m_3}{4m_3m_2 + m_2m_1 + m_3m_1}.$$

V případě splnění podmínky $m_1 = m_2 + m_3$ je možné tyto rovnice zjednodušit do tvaru

$$a_1 = g \frac{(m_2 - m_3)^2}{6m_3m_2 + m_2^2 + m_3^2}, \quad a_2 = g \frac{(m_2 - m_3)(m_2 + 3m_3)}{6m_3m_2 + m_2^2 + m_3^2},$$

$$a_3 = -g \frac{(m_2 - m_3)(3m_2 + m_3)}{6m_3m_2 + m_2^2 + m_3^2} \quad \text{a} \quad F_2 = F_3 = \frac{1}{2}F_1 = \frac{4gm_2m_3(m_2 + m_3)}{6m_3m_2 + m_2^2 + m_3^2}.$$

Všimněte si, že jen pokud bude $m_2 = m_3$, budou všechna závaží v rovnováze. Samotná podmínka $m_1 = m_2 + m_3$ tedy rovnováhu obou kladek ještě nezaručí. Konečně pro naše numerické hodnoty dostaneme jako výsledek

$$a_1 = \frac{1}{49}g, \quad a_2 = \frac{9}{49}g, \quad a_3 = -\frac{11}{49}g$$

a

$$F_2 = F_3 = \frac{1}{2}F_1 = \frac{120}{49}g,$$

který je relativně dost blízký naivnímu řešení uvedenému hned v úvodu řešení.

Příklad 5.7 Popište pohyb částice nesoucí náboj Q , která vletěla do homogenního magnetického pole o magnetické indukci \mathbf{B} rychlostí \mathbf{u} . Na částici působí magnetická Lorentzova síla $\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Řešení: Předpokládejme pro jednoduchost, že magnetická indukce má směr osy z , takže platí $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Z pohybové rovnice $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ pak dostaneme následující tři diferenciální rovnice

$$\ddot{x} = \omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega\dot{x} \quad \text{a} \quad \ddot{z} = 0,$$

kde $\omega = QB/m$ značí tzv. cyklotronovou frekvenci. Z poslední rovnice plyne, že ve směru osy z , tj. ve směru magnetické indukce, se částice bude pohybovat rovnoměrně stálou rychlostí $\dot{z} = u_z$, jak plyne z počáteční podmínky $\mathbf{v}(0) = \mathbf{u}$. Nyní vyřešíme pohyb v rovině xy . Zderivujeme nejprve první rovnici podle času a za \dot{y} dosadíme podle druhé rovnice, tak dostaneme harmonickou rovnici $\ddot{x} = -\omega^2x$ pro \dot{x} . Její obecné řešení má tvar $\dot{x} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Z druhé rovnice najdeme snadno i řešení pro \dot{y} , vyjde $\dot{y} = \dot{x}/\omega = -A \sin \omega t + B \cos \omega t$. Vzhledem k počáteční podmínce přitom bude $\dot{x}(0) = A = u_x$ a $\dot{y}(0) = B = u_y$, rychlost částice je tedy dána vzorcí

$$\dot{x} = u_x \cos \omega t + u_y \sin \omega t \quad \text{a} \quad \dot{y} = -u_x \sin \omega t + u_y \cos \omega t.$$

Snadno ověříme, že platí $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u_x^2 + u_y^2$, tj. rychlost částice je stálá a obíhá rovnoměrně osu z úhlovou rychlostí ω ve směru hodinových ručiček (pro $QB > 0$). Pro souřadnice polohy částice dostaneme integrací

$$x = x_0 + \frac{u_y}{\omega} + \frac{u_x}{\omega} \sin \omega t - \frac{u_y}{\omega} \cos \omega t, \quad y = y_0 - \frac{u_x}{\omega} + \frac{u_x}{\omega} \cos \omega t + \frac{u_y}{\omega} \sin \omega t,$$

a konečně $z = z_0 + u_z t$, kde x_0, y_0 a z_0 jsou počáteční souřadnice částice. Částice se tedy pohybuje po šroubovici o poloměru

$$R = \frac{1}{\omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{m}{QB} \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

osa šroubovice je rovnoběžná s osou z a prochází například bodem $[x_0 + u_y/\omega, y_0 - u_x/\omega, 0]$, je tedy posunuta od počátečního bodu $[x_0, y_0, z_0]$ o R kolmo na směr počáteční rychlosti \mathbf{u} i magnetické indukce \mathbf{B} .

5.2 Isaac Newton

ISAAC NEWTON je největší postavou počínající vědecké revoluce sedmnáctého století. Jeho kniha *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematické principy přírodní filozofie) z roku 1687 se stala nejdůležitější prací v celé historii moderní vědy. Připomeňme si Newtonovy největší objevy: V optice objevil, že světlo je složené a skládá se z barevného spektra, vysvětlil barvy tenkých vrstev, objevil zobrazovací rovnici, našel slitinu vhodnou ke konstrukci zrcadel a sestrojil první zrcadlový dalekohled. V matematice položil základy diferenciálního a integrálního počtu (tzv. kalkulus) a také základy teorie diferenciálních rovnic. Nalezl rovněž efektivní metodu pro numerické řešení transcendentních rovnic a zobecnil binomickou větu v binomickou řadu. V mechanice objevil pohybové zákony a zákon všeobecné gravitace. Ukázal, že fyzikální zákony platí nejen na zemi, ale i v kosmu. Klasická mechanika se dodnes opírá o jeho pojem hmotnosti, setrvačnosti, síly a interakce. Objevil dále mnoho zákonů speciální povahy týkajících se pohybu planet, pohybu v odporujícím prostředí, rotujících kapalin atd. Newton učinil z fyziky ucelenou, deduktivní vědu na úrovni, kterou dnes nazýváme **klasická fyzika**.

Isaac Newton 1643-1728

Pro kulturní historii je významné, že Newtonovo pojetí světa se stalo základem racionalismu, osvícenství i mechanického materialismu, ač sám byl velice zbožný. Stal se průkopníkem publikování ve vědeckých časopisech. Úspěšně vedl anglickou Royal Society, jež se stala nejprestižnější vědeckou institucí světa. Byl také poslancem anglického parlamentu a v zájmu Anglie dovedl odporovat i králi.

Vědě a poznání Newton obětoval celý svůj soukromý život. Nikdy neopustil Anglii, zůstal po celý život svobodný a prakticky bez přátel. O každém problému, který si předsevzal, přemýšlel s ohromnou intenzitou. Dokud problém nevyřešil, své potřeby ani okolí nevnímal.

Newton sám nerad cokoli uveřejňoval, jednak nebyl nikdy zcela spokojen se svou prací, jednak nesnášel kritiku. Proto všechny své objevy publikoval se značným zpožděním a až po několika urgencích. Nicméně o svých výsledcích a snahách zanechal nesmírně bohaté a rozsáhlé vlastní poznámky. Je jich tolik, že o ně do-

konce dlouho nebyl ani zájem. Navíc jsou prosáknuty mystikou a náboženskými prvky, takže jejich uveřejnění za Newtonova života bylo nebezpečné a po smrti zase mohlo ohrozit Newtonovu autoritu jako vědce nejvyšší, neomylné reputace. Není tedy divu, že jeho sebrané spisy dodnes nikdo nevydal.

5.2.1 Dětství

Newton se narodil ve Woolsthorpe 4. ledna roku 1643¹ předčasně jako malé neduživé dítě. Nikdo ze sloužících a ani jeho matka nevěřili, že se dožije večera. Pohrobek byl prý tak malý, že by se vešel do mázového džbánu. Přes tyto neradostné vyhlídky se Newton nakonec ve zdraví dožil 84 let.

Newtonovo dětství nebylo šťastné. Nikdy nepoznal svého otce, svobodného farmáře, který zemřel tři měsíce před tím, než se Isaak narodil. Jako dítě brzy ztratil i matku, která se podruhé vdala a odstěhovala do sousední vesnice, takže malého Isaaka do jeho deseti let vychovávala babička. Až do otčímovy smrti tak byl prakticky izolován od své matky. Jako každý malý chlapec nesmírně toužil po své matce a toto hluboké trauma jeho dětské duše se později projevuje jednak v Newtonových pocitech nejistoty a úzkosti spojených s publikací jeho prací, jednak v návalech iracionální zuřivosti, když je musel proti svým odpůrcům obhajovat.

Ve škole nijak ne vynikal, neměl ani žádné kamarády a bavil se zhotovováním hraček nebo modelů větrných a vodních mlýnků, slunečních hodin atd. Také maluje a sám si ke svým obrazům zhotovuje rámy. Roku 1654 přešel na střední školu v Granthamu. Bydlel zde v podnájmu u vzdělaného lékárníka Clarka, který se mu stal přítelem. Ten také zasvětil mladíka do farmacie, chemických a alchymistických pokusů, dovolil mu číst knihy ze své knihovny. Rovněž ředitel školy Stokes si jej oblíbil, když poznal jeho nadání.

Přes své hračky se chlapec vážně zajímá o mechaniku a postupně začíná chápat, že k tomu, aby do ní pronikl, potřebuje znát matematiku, ovšem ne tu, která se učí ve škole. Zjišťuje také, že kvalitní vědecké knihy jsou psány většinou v latině a že kniha knih - bible - byla napsána v hebrejštině, aramejštině a řečtině. Student Newton si tak před sebe klade kolosální cíl zvládnout potřebnou matematiku i zmíněné jazyky.

Ještě před dokončením střední školy matka podruhé ovdověla a chlapec byl povolán domů, aby se staral o hospodářství. K farmářskému povolání se však chlapec nehodí, jednak je fyzicky slabý, jednak je myšlenkami zcela mimo každodenní problémy farmy. Nejednou se stalo, že vyjel ráno s koňmi na pole, ale zde zapomněl na celý svět a místo práce strávil celý den s knihou pod stromem. Nebo se zcela ztratil z domu, a pak všichni věděli, že je zase v knihovně u Clarků.

Štěstím pro Newtona i pro hospodářství je, že po rodinné poradě jej posílá strýc Ayscough na další studia. Roku 1661 byl přijat do Trinity College v Cambridge jako subsizar. Rodina si zřejmě myslí, že jej tam z lásky ke vědě vyléčí. Postavení subsizara bylo totiž velmi ponižující, musel sloužit bohatším studentům při stolování, štípat dříví a dělat jiné pomocné práce. Na druhé straně, díky tomu

¹Podle tehdejšího kalendáře to bylo v neděli o hlavním svátku vánočním 25. prosince 1642 mezi druhou a třetí hodinou ranní.

bylo jeho studium o něco levnější. Newton zde tělesně i duševně dospívá a upevňuje se jeho zdraví. Je pozoruhodné, že i při ustavičné četbě si Newton uchovává výborný zrak a nikdy nebude potřebovat brýle.

Mladík nebyl ke studiu dostatečně připraven, a tak zpočátku nijak nevynikal. Vyznačoval se však manuální zručností, zálibou v experimentování a samostatným úsudkem. Začal studovat klasickou literaturu počínaje Aristotelem. Velice na něj zapůsobil racionalismus Descarta a atomismus Gassendiho. Roku 1664 si začal psát vlastní poznámky *Quaestiones Quaedam Philosophicae* (Jisté filozofické otázky), Newtonova vědecká kariéra začala. Současně začal studovat i geometrii a matematiku, především Descarta, Keplera a Wallise. Fascinují ho přednášky mladého profesora matematiky ISAACA BARROWA. První tři roky studia byla nezáviděníhodná, vše se rázem změnilo roku 1664, kdy vešlo ve známost jeho zobecnění binomické věty. Tím si získal vážnost, přátelství jen o dvanáct let staršího profesora Barrowa a ze subsizara se stal scholar, tj. stipendista. Současně se začíná vážně zajímat o astronomii, dalekohledem pozoruje Měsíc a komety.

Roku 1665 obdržel titul bakaláře, aniž bylo jeho nadání plně rozpoznáno. Téhož roku byla kvůli velkému moru univerzita uzavřena a Newton se vrací domů do Woolsthorpu. Zde hledá a objevuje novou filozofii a novou matematiku. Roku 1666 objevuje **fluxe**, tj. derivace **fluent**. Pochopil důležitost integrálů jako obrácených fluxů a pomocí těchto veličin umí analyticky zkoumat vlastnosti křivek. Během morových let tak Newton vytvořil základy kalkulu (infinitesimálního počtu).

Zájem o astronomii jej přiměl ke zkoumání toho, proč jeho dalekohled tak špatně zobrazuje. Prostudoval si Descartův spis a zjistil, že příčinou je otvorová a barevná vada. Experimenty Newton poznal, že otvorovou vadu může zmenšit vhodným tvarem čoček, ale barevnou vadu, která je právě u dalekohledu nejvýznamnější, tu snížit nedokázal. Na trhu si koupil skleněný hranol, aby blíže prozkoumal barevnou vadu. Tak objevil, že když nechá na hranol dopadat úzký pruh slunečního světla, bílé světlo se na něm rozloží do vějíře duhových barev. Jev nazval **spektr**em. Ukázal také, že barevné světlo ze spektra už dále rozložit nelze a že bílé světlo je možno získat zpětně složením celého barevného spektra. Své názory rozšířil do eseje *O barvách*, která obsahovala podstatnou část jeho pozdější slavné práce *Opticks* (Optika).

Prozkoumal také základy kruhového pohybu, aplikoval jej na Měsíc a planety a objevil, že síla působící na planetu klesá se čtvercem její vzdálenosti od Slunce. To byl později důležitý krok pro objev zákona všeobecné gravitace. Protože své objevy nadále svěruje jen svým poznámkám, svět o jeho objevech zatím nic neví.

5.2.2 Plodné období

Roku 1667, když byla univerzita znova otevřena, se Newton vrací do Cambridge, je zvolen členem Trinity College a stává se asistentem profesora Barrowa. Se svými objevy v optice a matematice se svěruje Barrowovi. Ten připojuje Newtonovy výsledky ke své učebnici optiky. Roku 1668 se Newton stává starším členem Trinity College a na návrh Barrowa profesorem matematiky. Současně získal titul magistra společenských věd. Roku 1669 sumarizuje své objevy a jeho rukopis *De Analysi*

per Aequationes Numeri Terminorum Infinitas (O analýze nekonečných řad) koluje mezi známými. Během dvou let rukopis reviduje jako *De methodis serierum et fluxionum* (O metodách řad a fluxí). Slovo fluxe v titulu dokazuje, že kalkulus, tj. infinitezimální počet, je již na světě. Bez ohledu na skutečnost, že zatím pouze malý okruh učenců věděl o Newtonově existenci, stává se Newton největším matematikem na světě.

Roku 1669 rezignoval ISAAC BARROW na své místo lucasiánského profesora ve prospěch mladého Newtona. Místo lucasiánského profesora osvobodilo od vedení běžných přednášek, zůstala jen povinnost pronést jednou ročně kurz přednášek dle vlastního výběru. Za téma prvních přednášek si Newton zvolil optiku. Zde přednášel své výsledky, ke kterým dospěl postupně v letech 1670 - 1672. Protože se domníval, že barevná vada způsobená rozkladem světla při lomu je neodstranitelná, sestrojil první zrcadlový dalekohled. K myšlence zrcadlového dalekohledu dospěli již dříve jiní učenci, především roku 1663 JAMES GREGORY, který uveřejnil i náčrt takového dalekohledu. Ovšem teprve Newton vymýšlí novou konstrukci dalekohledu a také ji úspěšně realizuje. Objektívem jeho reflektoru je sférické zrcadlo. Nejtěžším problémem bylo najít vhodnou slitinu, která by měla dobrou odrazivost, byla dobře lešitelná a odolávala korozi. Tu se uplatnily Newtonovy bohaté metalurgické a alchymistické zkušenosti a po asi osmdesáti tavných konečně zhotovil požadovaná zrcadla ze slitiny mědi, arzenu a cínu. Zanedlouho tu byl také první dalekohled, jehož objektiv měřil pouhý jeden palec a který zvětšoval 38krát. Přesto se kvalitou vyrovnal mnohem větším astronomickým dalekohledům. Newton dalekohled dále zdokonaloval a roku 1671 mnohem dokonalejší přístroj věnuje Královské společnosti.

Přednášky o optice neměly nijak mimořádný ohlas, ale roku 1671 se doslechla o zrcadlovém teleskopu Královská společnost a chtěla jej vidět. Dalekohled byl nadšeně přijat a roku 1672 byl Newton zvolen za člena společnosti. Newton potěšen zájmem o dalekohled nabídl roku 1672 do *Philosophical Transactions* článek o světle a barvách. Článek byl celkem dobře přijat, i když se objevily jisté námitky, především od experta na optiku ROBERTA HOOKA, který byl stoupencem vlnové povahy světla. Roku 1675 Newton doplnil svou práci o popis a vysvětlení periodických optických jevů, jako jsou například dnes dobře známé Newtonovy kroužky. Hooke však Newtona obvinil z toho, že mu ukradl jeho myšlenky. Hooke postrádal Newtonovo matematické vzdělání i soustavnost v práci, zato překypoval mnoha nápady, a proto se považoval nejednou za autora některých Newtonových výsledků, jakož i výsledků jiných učenců. Newton nebyl schopen přijmout nespravedlivé Hookeovo obvinění a znechucen vzniklou diskuzí se v ní přestal angažovat. Na šest let se odmlčel a prakticky izoloval od světa. V tu dobu se také plně ponořil do hermeneutických studií a alchymie.

Polemika s Hookem znechutila Newtona natolik, že si umínil nepublikovat už nic z optiky, alespoň do té doby, dokud bude Hooke naživu. Jeho kniha *Optical Lectures* byla roku 1671 hotová, publikována však byla až roku 1704. Podobně to dopadlo i s knihou *Arithmetica universalis*, která byla hotová roku 1674, ale publikovaná až roku 1707 proti vůli autora. Do nedohledna byly odkládány i Newtonovy práce o infinitezimálním počtu, což pak vedlo k dlouholetým sporům o prioritu mezi

stoupenci Newtona a Leibnize.

Ještě roku 1679 poslal Hooke Newtonovi dopis, ten však korespondenci již nepětuje a přerušuje ji. Později však Newton přiznal, že jej Hookův dopis vyprovokoval znova k přemýšlení nad planetárními pohyby. Přemýšlí mimo jiné o tom, po jaké dráze se bude pohybovat těleso vystřelené z věže, matematicky si ověřuje, že eliptický pohyb planety vede nutně k závěru, že planeta je přitahována ke Slunci podle zákona obrácených čtverců. Ačkoliv se Newton intenzívně zabýval planetární dynamikou, k objevu zákona všeobecné gravitace ještě nedošel.

Roku 1684 navštívil Newtona s problémem pohybu planet EDMOND HALLEY. Dozvěděl se, že Newton řešení problému již dávno zná, a proto přesvědčil Newtona, aby své výsledky publikoval. Newton své řešení rozšířil a roku 1685 poslal Halleymu krátké pojednání *De Motu* (O pohybu). Během dalších dvou let usilovné práce se dílko rozrostlo do knihy *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, která se stala nejen Newtonovým největším dílem, ale stěžejní prací celé moderní vědy vůbec. Zásluhou Halleyho roku 1687 dílo ve třech svazcích vychází nákladem 300 kusů.

Před vydáním Principií dynamika prakticky neexistovala, byla tu jen kinematika a statika. Newtonova kniha podává soustavný a na svou dobu úplný systém dynamiky hmotných bodů, tuhých těles a tekutin. Zavádí nové pojmy jako **hmotnost**, **setrvačnost** nebo **síla**. Přináší shrnující a zobecňující pohled na celou mechaniku a rovněž ohromné množství výsledků zcela nových. Pro přitažlivost těles zavádí pojem **gravitace** z latinského *gravitaes* (tíha, váha) a dokazuje, že gravitační zákon platí nejen pro planety, ale i pro měsíce Jupitera, Měsíc a také pro tělesa na Zemi. Roku 1685 formuluje **zákon všeobecné gravitace**. Newtonova kniha je velmi obtížná i pro současného čtenáře, protože v ní Newton ještě nepoužívá metodu fluxí, ale vše dokazuje zastaralými metodami geometrickými, o nichž se Newton domníval, že budou přijatelnější pro jeho současníky.

Newtonův spis obsahuje v prvním svazku mechaniku bodů a tuhého tělesa, ve druhém hydromechaniku a ve třetím mechanický a astronomický obraz kosmu, bez vzorců, určený širším vrstvám. Právě ten sehrál rozhodující roli při formování mechanického obrazu přírody, mechanické a materialistické filozofie, ač sám Newton byl jejím odpůrcem.

Když Královská společnost přijala kompletní rukopis první knihy roku 1686, Hooke opět obvinil Newtona z plagiátorství. Obvinění bylo naprosto neopodstatněné. Možná mohl být Newton vstřícnější a zmínit Hookův přínos k objevu gravitace někde v předmluvě. Místo toho však Newton vzal svůj rukopis a vymazal z něj veškeré zbylé odkazy na Hooke. Jeho posedlost byla až taková, že odmítl publikovat svou knihu *Opticks* nebo přijmout předsednictví v Královské společnosti, dokud bude Hooke naživu.²

Profesor Newton byl štíhlý muž mírně vyšší postavy s dlouhými prosedivělými

²ROBERT HOOKE patří mezi nejvýznamnější postavy vědy sedmnáctého století. Objevil například zákon pružnosti 1662, rotaci Jupitera, roku 1665 ve své slavné *Micrographia* popsal strukturu sněhové vločky, objevil a pojmenoval buňku, jako jeden z prvních také studoval fosilie. Roku 1672 objevil difrakci světla, kterou vysvětloval vlnovou povahou světla a již roku 1678 tvrdí, že zákon obrácených čtverců popisuje pohyb planet.

vlasý. V jídle byl velmi skromný, nebýval téměř nemocen, nikdy nenesl brýle. Málo spal, zato hodně pracoval, přitom pak často zapomínal na elementární potřeby a obyčeje. Ke studentům býval vlídný, ale náročný. Přednášel většinou to, na čem zrovna pracoval, takže jeho lekce byly obtížné a posluchárny poloprázdné. Společenský život a plané řeči nenáviděl, rozhovory s ním o běžných věcech prý byly nezajímavé, jednoduché a z jeho strany až úsečné, takže málokdo mohl z rozhovoru vytušit, že rozmlouvá s géniem. To se až v pozdějším věku trochu zmírilo.

Zmíňme se ještě o Newtonových náboženských studiích, kterými se rovněž celý život velmi intenzivně zabýval. Pro představu, všechny náboženské texty, které Newton během svého života sepsal, čítají dohromady kolem čtyř miliónů slov! Jeho teologické dílo je tedy přinejmenším svým objemem srovnatelné s Newtonovým dílem fyzikálním. Dopad jeho teologických studií je však minimální, což je pochopitelné vzhledem ke skutečnosti, že dosud ještě z valné části nebylo ani publikováno.

Newton vyrůstal ve zbožném prostředí a jeho otčím byl dokonce pastorem anglikánské církve. Když se stal roku 1667 členem Trinity College, považoval za svou povinnost dosáhnout vysvěcení na kněze. Ponořil se proto do hlubokého studia křesťanské teologie, aby brzy zjistil, že se nemůže stát knězem. Studium starých biblických textů totiž došel k přesvědčení, že hlavní křesťanské dogma o Trojici boží bylo zkomoleno a církvi chybně vnuceno SV. ATHANASIEM během teologických sporů církve s Ariány ve čtvrtém století. Postavení Krista není podle Newtona rovnocenné postavení a podstatě Boha otce. Newtonovy názory na Trojici boží se zcela neshodují ani s pohledem Ariánů a jsou spíše blízké názorům tehdejší sekty Sociánů. Zde však Newtonova hereze ještě nekončí, během dalších studií klíčových biblických textů došel v osmdesátých letech také k odmítnutí nesmrtnosti duše a existence démonů. Odmítá i existenci Satana jako padlého anděla a ďábla chápe jen jako symbol chtíče a lidské zloby. Newtonovo pojetí jediného, věčného a všudypřítomného Boha je blízké pojetí starozákonního Boha a odráží se i na Newtonově pojetí absolutního prostoru a času. Od sedmdesátých let věnoval Newton velkou pozornost také interpretaci Danielova proroctví a Zjevení sv. Jana a s tím spojeným problémům starověké chronologie. Byl fascinován symboly biblických proroctví a vytvořil slovník prorockých znamení. Studoval také architekturu Jeruzalémského chrámu. Obě hlavní práce na tato témata byly publikovány až po Newtonově smrti.

Jak vidíme, Newtonova důkladnost ve všem co dělal, jej dovedla až k silně neortodoxním závěrům, které musel skrývat před světem. Roku 1690 poslal svému příteli filozofu JOHNŮ LOCKŮVI spis, v němž dokazuje, že učení o Trojici boží se do bible dostalo až ve čtvrtém století a není tedy součástí originálního textu bible. Locke jej chtěl publikovat, ale Newton odmítl, zalekl se, že by tím vešly ve známost jeho neortodoxní názory, a to by poškodilo jeho pověst v anglikánské společnosti.

5.2.3 Pozdní období

Díky Principiím se stal Newton mezinárodně proslulým, je volen do nejrůznějších akademií věd, navštěvován slavnými učenými, šlechtici a dokonce králi. Místo vědě se věnuje více organizačním a politickým záležitostem. Svým přátelům a žákům

dovoluje konečně vydávat jeho spisy, dokonce je nechává za sebe odpovídat a polemizovat s odpůrci.

Newtonovy pracovní výsledky však už nejsou příliš významné. Proto se zmíníme o tomto období jen stručně. Roku 1689 je Newton poprvé zvolen do parlamentu a pozván na večeri ke králi. Roku 1690 vycházejí ve Francii Newtonovy náboženské spisy. Roku 1691 propuká u Newtona vážná nemoc, jejíž pravděpodobnou příčinou je otrava parami rtuť. Ve snaze vylepšit astronomický dalekohled dělá pokusy se rtuť v otevřené nádobě. Parabolický povrch má minimální otvorovou vadu a dosáhne se jednoduše rotací nádoby se rtuť. S chorobou spojená zapomnětlivost vede k požáru pracovny, při kterém bylo zničeno mnoho cenných rukopisů. Roku 1693 se zázračně uzdravuje. Od té doby se Newton věnuje svému zdraví mnohem více a chodí častěji ven i do společnosti.

Roku 1696 se Newton stává inspektorem mincovny a odjíždí do Londýna. O domácnost se mu zde stará krásná a inteligentní neteř Kateřina. Jejím mužem se stal Newtonův žák a později velice vlivný muž CHARLES MONTAGUE. Ten se stává prezidentem londýnské Královské společnosti a později předsedou nejvyššího soudu. Roku 1700 byl povýšen dokonce do hodnosti Earl of Halifax. Právě Montagueovou zásluhou byl Newton povýšen na inspektora mincovny. Stalo se tak nejen ze známosti, ale i proto, že dobře znal Newtonovu důkladnost, poctivost a jeho zkušenosti z metalurgie. Roku 1699 je Newton jmenován velmistrem mincovny (mincmistrem), tedy prakticky ministrem financí. Roku 1701 je znovu zvolen poslancem, rezignuje na funkci lucasiánského profesora a roku 1703 je zvolen prezidentem Royal Society. Roku 1705 byl Newton povýšen královnou Annou do šlechtického stavu.

Roku 1706 propukají spory o prioritu s Leibnizem, který publikoval své první práce o infinitezimálním počtu roku 1684. Jak jsme již uvedli, Newton vynalezl metodu fluxí, což byl prakticky infinitezimální počet, již kolem roku 1666. Metodu však nepublikoval, takže jej předběhl Leibniz, který objevil infinitezimální počet nezávisle na Newtonovi. Tím vznikl dlouhý spor o prvenství mezi Newtonem a Leibnizem. Dnes je zcela nepochybné, že Newton objevil infinitezimální počet jako první. Leibnizův přístup je však obecnější a pro běžné použití vhodnější, proto se i jeho symbolika nakonec ujala a dodnes používá.

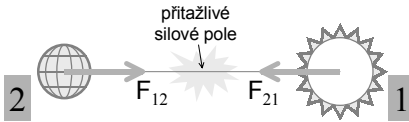
Roku 1722 se u Newtona objevují první příznaky nemoci, pravděpodobně trpěl dnou a ledvinovými kameny. S tím spojené několik let trvající nepravidelné bolesti překonává silou vůle. Ještě v březnu 1728 předsedá Royal Society a teprve tři dny před svou smrtí ulehá na postel. Ta přišla 31. března 1728, kdy Newton umírá. Poprvé v dějinách bylo tělo vědce uloženo vedle králů v katedrále Westminsterského opatství. Na jeho náhrobku je vytesán nápis *His jacet quod fuit mortalis Isaaci Newtonis* (Zde odpočívá to, co bylo v Isaacu Newtonovi smrtelné).

5.3 Síla v klasické mechanice

5.3.1 Silové působení na dálku

Striktně vzato, klasická mechanika zná jen silová působení těles přímým kontaktem. Působíště takových sil leží v bodě dotyku obou těles. Obě síly tedy automaticky

leží na společné silové přímce. Nicméně je známo, že existují síly, jimiž na sebe působí některá tělesa i na dálku. Příkladem takové síly je síla gravitační. V tom případě na sebe tělesa působí bez vzájemného bezprostředního kontaktu. Vzájemné silové působení těles na dálku je pro klasickou mechaniku záhadou. Bezradnost nad takovými silami odráží i slavný Newtonův výrok *Hypotheses non fingo* (hypotézy nevyumýšlím), který pronesl v reakci na otázku, jaká je podstata jeho gravitačních sil?

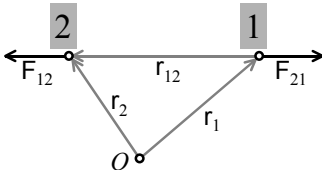


Silové působení na dálku je zprostředkováno silovým polem. Dvě tělesa na sebe působí podle zákona akce a reakce stejně velkými opačně orientovanými silami \mathbf{F}_{12} a \mathbf{F}_{21} ležícími na společné silové přímce.

Protože se soustava dvou těles nemůže uvést sama do rotačního pohybu, musí obě síly akce a reakce ležet na společné silové přímce. Jedině pak dávají dohromady nulový otáčivý moment. Obě síly nemusí mít společné působiště, jako tomu bylo u přímého kontaktu, ale postačí, když budou mít společnou silovou přímku. Pro bodové částice to samozřejmě znamená, že tato silová přímka leží na spojnici obou těles, a mluvíme pak o **centrálním silovém působení**. Označíme-li polohu první a druhé částice průvodičem \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 , pak centrální síly \mathbf{F}_{12} a \mathbf{F}_{21} musí mít směr spojnice obou částic $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Z izotropnosti prostoru dále plyne, že velikost obou sil \mathbf{F}_{12} a \mathbf{F}_{21} nemůže záviset na prostorové orientaci směru \mathbf{r}_{12} spojnice obou částic, ale jen na jejich vzdálenosti $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Pro **centrální síly** tedy platí

$$\mathbf{F}_{12} = f(r) \mathbf{r}_{12}^0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}_{21} = -f(r) \mathbf{r}_{12}^0,$$

kde $f(r)$ je jen funkcí vzdálenosti r a $\mathbf{r}_{12}^0 = \mathbf{r}_{12}/r$ je jednotkový vektor spojnice obou těles. Pro $f(r) < 0$ jde zřejmě o **sílu přitažlivou**, naopak pro $f(r) > 0$ jde o **sílu odpudivou**. Nejběžnější centrální silou je nepochybně coulombovská síla, pro kterou platí $f(r) = k/r^2$, tato síla popisuje například gravitační nebo elektrické přitahování těles.



Zavedení centrálních sil působících mezi dvěma hmotnými body.

Mechaniku, pro níž platí Newtonovy zákony a pro síly předpoklad o centrálním izotropním silovém působení, nazýváme obvykle **klasickou** nebo **newtonovskou mechanikou**. Mechanismus působení na dálku nedokáže klasická mechanika vysvětlit, snahy o pochopení takových sil vyústily v 19. století v představu **silového pole**.

V souladu se zákonem akce a reakce předpokládá klasická mechanika, že i silové působení na dálku vzniká vždy okamžitě. Podle současných představ však žádná

síla nepůsobí okamžitě, ale šíří se konečnou rychlostí, kterou je rychlost světla. Tím se zároveň narušuje obecně centrální charakter silového působení. Silové působení se proto musí počítat složitěji pomocí retardovaných (časově zpožděných) veličin. Zákon akce a reakce je možno zachovat, ovšem matematicky v mnohem složitější formě. Moderní teorie fyzikálních polí proto s pojmem síly raději vůbec nepracují.

5.3.2 Tíhová síla, tíha

Tíha je síla, kterou je přitahováno k povrchu Země každé hmotné těleso. Z obrácené úlohy dynamiky (5.2) a zákonů volného pádu jsme odvodili, že pro tíhu platí

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g},$$

tedy tíha je úměrná hmotnosti tělesa a tíhovému zrychlení. Ve statice jsme také ukázali, že tíha působí v těžišti tělesa. Tíha je tvořena především přitažlivou **gravitační silou** veškeré hmoty Země, a proto směřuje přibližně do jejího středu. Tíha je dále částečně zmenšená o odstředivou sílu, způsobenou rotací Země. Země má proto přibližně tvar rotačního elipsoidu zploštělého na pólech. Největší tíhu a tíhové zrychlení naměříme u zemských pólů, nejmenší na rovníku. Tíha klesá také s nadmořskou výškou, největší tíhu naměříme při hladině moře a nejmenší na horách.

Směr tíhy a tíhového zrychlení je totožný se směrem volně visící olovnice. Tíha proto fyzikálně definuje vertikální a horizontální směr kdekoliv na zemi. Protože mezi molekulami kapalin je malé tření, je jejich volná hladina vždy kolmá k tíhovému zrychlení. Také pomocí volné hladiny kapalin je proto možno definovat horizontální (vodorovný) směr. Klidná hladina oceánů tvoří jedinou ekvipotenciální plochu, od níž se měří **nadmořská výška**. Hladina oceánů tak fyzikálně definuje skutečný tvar Země, ten nazýváme **geoidem**. V důsledku nehomogenity vnitřního složení je Země nepravidelným tělesem, které se liší od rotačního elipsoidu o stovky metrů. Podrobněji o tíze a tíhovém zrychlení v kapitole věnované gravitaci.

5.3.3 Síla pružnosti

V praxi se často setkáváme s pružnými tělesy jako jsou péra, luky, pružiny, struny, tětivy, gumové kroužky atd. Pružná tělesa se brání proti stlačení nebo protažení, případně proti zkroucení a ohnutí. K deformaci tělesa potřebujeme vždy určitou deformační sílu. Pro malé deformace platí dostatečně přesně **Hookův zákon**, podle něhož je síla potřebná k deformaci tělesa přímo úměrná velikosti deformace. Platí tedy

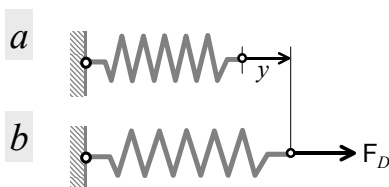
$$F_D = ky,$$

kde F_D představuje **deformační sílu** a y velikost deformace. Konstanta úměrnosti k závisí obecně na geometrických rozměrech deformovaného tělesa a na materiálu, ze kterého je vyrobeno. Při nulové deformaci je deformační síla rovna nule.

Podle zákona akce a reakce je **síla pružnosti** F_P opačná k síle deformační, a platí proto

$$F_P = -F_D = -ky.$$

Síla pružnosti se snaží deformované těleso uvést zpět do původního tvaru. V teorii kmitů a teorii mechanických oscilátorů je tato síla zároveň **silou vratnou**, protože vrací oscilátor do rovnovážné polohy. Speciálně pro pružinu se konstanta k nazývá **tuhost pružiny**. V teorii pružnosti se dokazuje, že tuhost je nepřímo úměrná délce pružiny.

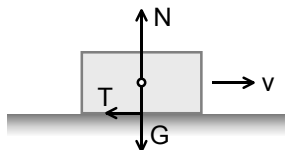


(a) volná a (b) natažená pružina. Deformační síla F_D způsobuje prodloužení pružiny o výchylku y .

5.4 Tření a odpor prostředí

5.4.1 Tření smykové (kluzné, dynamické, vlečné)

Dotýkají-li se dvě tělesa, která se vůči sobě navzájem pohybují, působí na sebe **třecí silou**. Chceme-li například pohybovat knihou ležící na stole, musíme na ni působit silou F , která bude aspoň tak veliká, jako je síla tření T , jinak s knihou nepohneme. Tření vzniká mezi plochami, jimiž se obě tělesa dotýkají a vždy brzdí relativní pohyb obou těles. Příčinu tření spatřujeme v nerovnosti a drsnosti povrchů přiléhajících styčných ploch.



Na kvádr, který se pohybuje po drsné podložce, působí proti směru pohybu síla smykového tření T , která závisí na přítláčné síle N .

Popsané tření nazýváme **třením smykovým** nebo **třením dynamickým**. Pokusy vedou k poznatku, že smyková třecí síla směřuje vždy proti pohybu, její velikost je úměrná přítláčné síle N a závisí na typu a drsnosti styčných ploch. Třecí síla naopak nezávisí na velikosti styčných ploch (GUILLAUME AMONTONS 1699) ani na rychlosti pohybu (CHARLES-AUGUSTIN DE COULOMB 1779) a spočte se podle **Amontons-Coulombova zákona**

$$T = fN, \quad (5.3)$$

kde N je velikost normálové, přítláčné síly, která obě tělesa při pohybu tlačí k sobě. V případě knihy ležící na horizontálním stole je normálová síla rovna tíze knihy, a proto je

$$T = fgm.$$

Součinitel tření f najdeme v tabulkách, obvykle je menší než jedna. Například pro styčné povrchy ocel – ocel je $f \approx 0.1$ a pro styk guma – asfalt je $f \approx 0.3$.

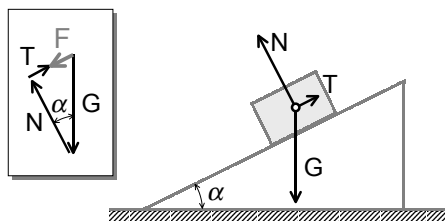
součinitel tření	dynamického	statického
	f	f_0
ocel - led	0.01	0.03
ocel - teflon	0.04	0.09
ocel - ocel	0.10	0.15 - 0.60
ocel - dřevo	0.25 - 0.50	0.2 - 0.6
ocel - guma	0.5 - 1.0	1 - 4
lyže - sníh	0.04 - 0.20	
dřevo - dřevo	0.3 - 0.5	0.6
cihla - cihla		0.6

Tabulka vybraných součinitelů tření

Smykové tření si přejeme prakticky jen tehdy, když chceme pohybující se těleso zpomalit nebo zastavit. V ostatních případech je většinou nežádoucím jevem, který se snažíme maximálně potlačit tím, že kluzné plochy mažeme motorovými oleji a vazelínami, nebo kluzné plochy nahrazujeme valivými ložisky. Aby omezily tření, využívají některé dopravní prostředky pohybu po vodě, ve vzduchu nebo se vznášejí na vzduchovém, případně magnetickém polštáři.

Smykové tření je hlavní příčinou toho, proč se dosud nikomu nepodařilo sestrojít **perpetuum mobile**, stroj, který by se pohyboval věčně bez dodávky energie zvnějšku. Tření totiž po jistém čase bezpečně každý pohyb zastaví. To ovšem neplatí v mikrosvětě. Molekuly, atomy a elektrony jsou v neustálém a věčném chaotickém tepelném pohybu a podle kvantové teorie se jejich pohyb nezastaví ani při ochlazení na teplotu absolutní nuly. Minimální tření se vyskytuje také v kosmu. Planety mohou obíhat kolem Slunce a umělé satelity kolem Země miliardy let, aniž by to způsobilo podstatnější úbytek jejich energie nebo orbitální rychlosti.

Příklad 5.8 Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α leží těleso tvaru kvádru o hmotnosti m . S jakým zrychlením se bude kvádr pohybovat?



Kvádr na nakloněné rovině. Na těleso působí jen síly \mathbf{G} , \mathbf{N} a \mathbf{T} . Síla $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{T}$ je jejich výslednicí.

Řešení: Na těleso působí tíhová síla G , její normálová složka $G \cos \alpha$ je kompenzována reakcí podložky N a tvoří **přítlakovou sílu** pro sílu tření. Zbývající nekompenzovaná tečná složka tíhy $G \sin \alpha$ se snaží uvést těleso do pohybu ve směru sklonu nakloněné roviny. Proti ní působí síla smykového tření

$$T = fN = fG \cos \alpha = fmg \cos \alpha,$$

takže výsledná síla působící na kvádr je rovna

$$F = G \sin \alpha - T = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha.$$

Pohybový zákon dává pro zrychlení kvádrů výsledný vzorec

$$a = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Příklad 5.9 Sjezdař na lyžích dosáhl pod kopcem rychlosti $v = 20 \text{ m/s}$. Je-li koeficient smykového tření lyží na sněhu $f = 0.1$, určete dráhu, kterou lyžař pod kopcem urazí, než se zastaví.

Řešení: Na lyžaře působí na rovině třecí síla $T = fG$, která mu uděluje zpomalení $a = fg$. Lyžař se zastaví za čas

$$t = \frac{v}{a} = \frac{v}{fg} = 20 \text{ s}$$

a urazí přitom dráhu

$$s = \frac{v^2}{2a} = 200 \text{ m}.$$

5.4.2 Tření přilnavé, klidové, statické

Tření přilnavé neboli **tření klidové, statické**, na rozdíl od tření kluzného, vzniká mezi plochami těles, které se ještě navzájem nepohybují. Velikost přilnavého tření se nedá spočítat tak jednoduše jako tření smykové, protože závisí na dalších faktorech a počítá se obvykle pomocí podmínek statické rovnováhy těles. Statické tření hledáme prakticky stejně jako silové reakce. O velikosti přilnavého tření je možno říci pouze to, že jeho maximální hodnota je rovna

$$T_{\max} = f_0 N,$$

kde f_0 je **součinitel přilnavého tření** a obvykle platí $f_0 \geq f$.

Koeficient přilnavého tření měříme na nakloněné rovině. Kvádr a povrch nakloněné roviny vyrobíme z látek, jejichž koeficient tření hledáme, a pak zvyšujeme sklon α nakloněné roviny, dokud se kvádr nedá do pohybu. K tomu dojde v okamžiku, když bude $G \sin \alpha = T_{\max}$, viz také následující úloha. Protože zároveň platí $T_{\max} = f_0 G \cos \alpha$, dostaneme odtud koeficient statického tření

$$f_0 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Změříme-li úhel, kdy kvádr *ujede*, pak tangenta tohoto úhlu udává součinitel přilnavého tření.

Přilnavé tření hraje skoro vždy roli pozitivní a je vítáno. Bez přilnavého tření bychom nemohli chodit ani jezdit, žádný předmět bychom nenašli tam, kde bychom ho předtím zanechali. Nemohli bychom uchopit do ruky sklenici, pero, či křídlo. Přibližnou představu o tom, jak by to mohlo vypadat nebýt tření, si můžete udělat při chůzi po hladkém ledě. Ovšem i pro hladký led je malé tření $f_0 \approx 0.03$ stále přítomno. Také pohyb kosmonautů v lodi na oběžné dráze je příkladem pohybu bez tření, neboť zde není tíže ani přítlačná síla.

Příklad 5.10 Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α leží těleso tvaru kvádrů o hmotnosti m . Těleso je v klidu, jak velká třecí síla na něj působí?

Řešení: Na těleso působí tíhová síla G , její normálová složka $G \cos \alpha$ je kompenzována reakcí podložky N a tvoří přítlačnou sílu pro sílu tření. Zbývající nekompenzovaná tečná složka tíhy $G \sin \alpha$ se snaží uvést těleso do pohybu, proti ní působí třecí síla T . Je-li těleso v klidu, musí být obě síly v rovnováze, tedy

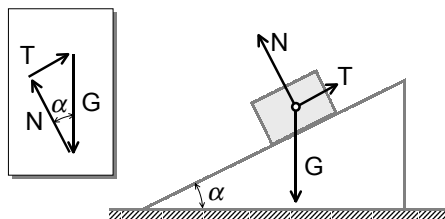
$$T = G \sin \alpha.$$

Statická třecí síla nezávisí na koeficientu f_0 , ale plyne z podmínky rovnováhy tělesa na nakloněné rovině. Těleso by se ovšem dalo do pohybu, pokud by úhel α příliš vzrostl a třecí síla by překročila maximální hodnotu pro přílnavé tření, tj. za podmínky

$$G \sin \alpha > T_{\max} = f_0 G \cos \alpha,$$

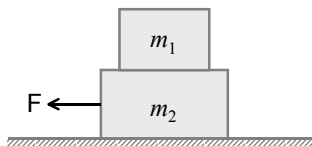
odtud po úpravě

$$\operatorname{tg} \alpha > f_0.$$



Rovnováha kvádrů na nakloněné rovině. Velikost třecí síly musí být $T = G \sin \alpha$.

Příklad 5.11 Na kvádrů o hmotnosti m_2 leží kvádr o hmotnosti m_1 . Součinitel tření mezi kvádry je f . Určete a popište pohyb obou kvádrů, pokud na spodní kvádr m_2 působí horizontální síla F . Tření mezi podložkou a kvádrem m_2 zanedbejte.



Ilustrace k úloze. Máme popsat pohyb soustavy dvou kvádrů, mezi nimiž je tření.

Řešení: Těleso m_1 se bude pohybovat jen díky síle tření T mezi kvádry. Obecně musíme rozlišit dva případy:

(a) Tření je dostatečně veliké a oba kvádry se budou pohybovat jako jeden celek se stejným zrychlením

$$a = a_1 = a_2 = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

V tomto případě jde o statické tření a platí

$$T = m_1 a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F.$$

(b) Tření je malé a horní kvádr bude klouzat. V tom případě platí

$$T = m_1 a_1 \quad \text{a} \quad F - T = m_2 a_2,$$

kde $T = f g m_1$. Odtud dostaneme

$$a_1 = f g \quad \text{a} \quad a_2 = \frac{F - f g m_1}{m_2}.$$

Případ (b) přechází v případ (a), pokud horizontální síla klesne pod hodnotu $F = f g (m_1 + m_2)$.

Příklad 5.12 Určete maximální možný sklon γ tyče AB opřené o stěnu. Součinitel tření tyče na podlaze v bodě A je roven f_A a součinitel tření tyče o stěnu v bodě B je roven f_B .

Řešení: Kdyby nebylo tření, tyč by ušla a spadla by na podlahu. Síly statického tření mohou udržet tyč v rovnováze jen tehdy, když bude těžnice tyče procházet čtyřúhelníkem $CDEF$, který vznikne průnikem kuželů silových reakcí $\angle DAE$ a $\angle CBC$. Úhel jednotlivých kuželů je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T_A}{N_A} = f_A \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{T_B}{N_B} = f_B.$$

Rozhodující pro stabilitu tyče je zřejmě bod C , jeho vzdálenost od stěny spočteme jako $x_C = |BC| \cos \beta$, kde

$$|BC| = l \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha - \beta)} = l \frac{\sin \gamma - \cos \gamma \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta + \sin \beta \operatorname{tg} \alpha}$$

a kde $l = |AB|$ je délka tyče AB . Odtud po dosazení máme

$$x_C = l \frac{\sin \gamma - \cos \gamma \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = l \frac{\sin \gamma - f_A \cos \gamma}{1 + f_A f_B}.$$

Tyč bude stabilní, pokud bude platit

$$x_C < x_T,$$

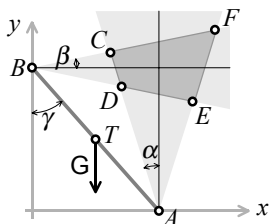
kde pro homogenní tyč je $x_T = \frac{1}{2}l \sin \gamma$. Odtud dostaneme podmínku

$$\operatorname{tg} \gamma < \frac{2f_A}{1 - f_A f_B}.$$

Pro $f_A = 0$ (hladká podlaha) žádná rovnováha nenastane. Pro $f_B = 0$ (hladká stěna) je $\operatorname{tg} \gamma < 2f_A$. Pro $f_B = f_A = f$ dostaneme

$$\operatorname{tg} \gamma < \frac{2f}{1 - f^2} = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

tedy $\gamma < 2\alpha$. Konečně pro $f_A f_B > 1$ bude tyč v rovnováze při jakémkoliv poloze.



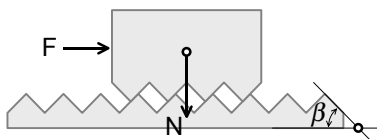
Tyč AB opřená o stěnu. Máme najít největší možný úhel γ , kdy bude tyč ještě stát.

5.4.3 Jednoduchý model a podstata tření

Podstatu a základní vlastnosti smykového tření lze názorně pochopit na následujícím jednoduchém modelu. Tření je podle modelu důsledkem nerovného pilovitého profilu obou styčných ploch, které jsou jinak bez tření. Označíme-li úhel stoupání zubů pilovitého profilu jako β , pak třecí síla vzniká jako horizontální reakce na přítláčnou sílu N . Z podmínky rovnováhy sil snadno najdeme, že síla potřebná k posunování kvádru proti zubům je rovna

$$F = N \operatorname{tg} \beta.$$

To je zároveň velikost třecí síly, která vzniká v důsledku nerovnosti povrchu. Jediným parametrem rozhodujícím o velikosti tření je tedy strmost zubů β .



Model vysvětlující vlastnosti tření. Síla potřebná k posunování kvádru je rovna $F = N \operatorname{tg} \beta$, kde β je úhel stoupání zubů.

Budeme-li chtít uvést těleso do pohybu, musíme překonat sílu odporu F . Součinitel statického tření je tudíž roven

$$f_0 = \frac{F}{N} = \operatorname{tg} \beta.$$

Totéž dostaneme z podmínky, kdy těleso sklouzne z nakloněné roviny. Dojde k tomu zřejmě v okamžiku, kdy sklon α nakloněné roviny dosáhne právě úhlu β stoupání zubů. Vzhledem k definici statického součinitele tření platí

$$f_0 = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

Při pohybu tělesa klade síla F odpor pouze při stoupání po přední straně zubů, zatímco při klesání po zadní straně zubů klouže těleso hladce bez odporu. Při rovnoměrném pohybu trvají obě fáze pohybu stejně dlouho, takže průměrná třecí síla je rovna právě polovině odporové síly

$$T = \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}N \operatorname{tg} \beta.$$

Tomu odpovídá součinitel smykového tření

$$f = \frac{T}{N} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}f_0.$$

Z navrženého modelu správně vychází, že třecí síla nezávisí na velikosti styčných ploch, ani na rychlosti a ani na výšce zubů. Závisí jen na velikosti přítláčné síly a na stoupání zubů β . Drsnější povrchy tedy mají větší stoupání, zatímco hladší povrchy mají menší stoupání zubů. Z modelu dále vychází, že součinitel dynamického tření je právě dvakrát menší než součinitel statického tření, což je rovněž kvalitativně správný výsledek.

Pravidelné poskakování tělesa nahoru a dolů je i příčinou tepla, které při vzájemném pohybu drsných těles vzniká. Práce, kterou vykonáme při zvednutí tělesa po přední straně zubů, se nenávratně mění na teplo po sklouznutí tělesa na zadní straně zubů. Množství uvolněného tepla je zřejmě úměrné počtu překonaných zubů, a tedy i dráze, po níž jsme těleso posunovali.

Uvedený model je jen velmi primitivním pokusem o vysvětlení základních vlastností smykového a statického tření. Není bez zajímavosti, že to, co se děje uvnitř atomu nebo co se odehrálo ve vesmíru před 14 miliardami let, dokážeme popsat neuvěřitelně přesně, zatímco uspokojuje teorie tření dosud neexistuje. Ekonomický přínos takové teorie pro praxi by byl nedožrnný a nepochybně by si zasloužil Nobelovu cenu.

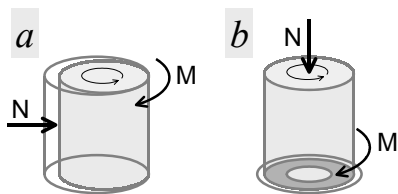
5.4.4 Tření čepové

Tření čepové je tření, které se objevuje při otáčení čepu v ložisku. Pokud je čep zatížen boční přítláčnou silou, hovoříme o **radiálním čepovém tření**, pokud je zatížen podélnou přítláčnou silou, pak hovořím o **axiálním čepovém tření**.

Působí-li na válcový čep boční síla N , pak při otáčení čepu vzniká třecí silový moment

$$M = \mu NR,$$

působící proti otáčení. Zde R značí poloměr čepu a μ součinitel čepového tření, pro který se dá odvodit vzorec $\mu = f/\sqrt{1+f^2}$, kde f je součinitel smykového tření mezi povrchem čepu a povrchem ložiska. V praxi se však místo tohoto vzorce používají tabelované hodnoty součinitelů smykového tření.



(a) Radiální čepové tření a (b) axiální čepové tření. Vlivem přítláčné síly \mathbf{N} vzniká v ložisku třecí otáčivý moment \mathbf{M} .

Působí-li na válcový čep přítláčná síla N ve směru osy, pak se tato síla rozkládá rovnoměrně na podstavu čepu a v důsledku smykového tření vzniká při otáčení čepu v ložisku třecí moment

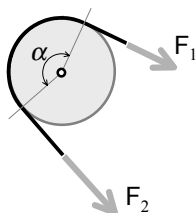
$$M = \frac{2}{3}fNR,$$

kde R značí opět poloměr čepu. Je-li ložisko již notně vyběhané, nese přítláčnou sílu jen vnější prstencová část podstavy čepu o poloměrech R_1 a R_2 , takže třecí moment pak je roven

$$M = \frac{2}{3}fN \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5.4.5 Lanové tření (řemenové)

Ze zkušenosti víme, že pokud máme udržet na laně velkou sílu holýma rukama, snažíme se lano rychle omotat okolo nějakého kůlu nebo stromu. Pak udržíme na laně téměř cokoli a spíše hrozí, že se přetrhne lano, než že bychom lano v ruce neudrželi. Takto jediný námořník uváže a udrží u přístavního kůlu i zaoceánský parník o hmotnosti několika tisíců tun. Rovněž pevnost všech možných typů uzlů je založena na **lanovém tření** a vlastně i soudržnost dílů šitých kalhot. Praktický význam lanového tření je tedy obrovský.



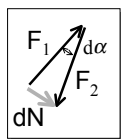
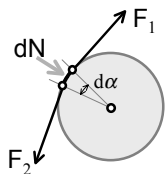
Ilustrace k výkladu lanového tření. Na konce lana působí síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 , jejichž rozdíl je způsoben smykovým třením lana o povrch kůlu.

Proč je převod síly tak značný a na čem závisí? Je to proto, že převod síly roste exponenciálně s úhlem opásání (obtočení) lana kolem kúlu. Původ lanového tření je přitom ve smykovém, případně klidovém tření, tedy nic záhadného. Vezměme si element lana odpovídající oblouku $d\alpha$. Na něj působí z obou stran síly napětí lana \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 , které dohromady vytvářejí přítláčnou normálovou sílu

$$d\mathbf{N} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Pokud je element dostatečně krátký, platí pro velikosti sil napětí $F_1 \approx F_2 \approx F$. Vektory \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 přitom svírají úhel $180^\circ - d\alpha$, takže velikost jimi vytvořené přítláčné síly je rovna $dN \approx Fd\alpha$. Tím vzniká třecí síla $dT = fdN \approx fFd\alpha$, která vytváří rozdíl v napětích na koncích elementu lana. Pro rozdíl napětí tedy platí

$$dF = F_2 - F_1 = dT \approx fFd\alpha.$$



Ilustrace k výkladu lanového tření. Na element lana působí síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 napětí lana, jejichž výslednicí je přítláčná síla $d\mathbf{N}$. Ta vytváří mezi lanem a kúlem třecí sílu $dT \approx fdN$.

To je jednoduchá diferenciální rovnice pro $F(\alpha)$, separací proměnných dostaneme

$$\int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = \int_0^\alpha f d\alpha \quad \text{a odtud integrací} \quad \ln \frac{F_2}{F_1} = f\alpha.$$

Třecí síla tedy narůstá exponenciálně s úhlem opásání lana kolem kúlu podle vzorce

$$F_2 = F_1 e^{f\alpha}.$$

Obtočíme-li lano kolem kúlu jen jednou dokola, bude $\alpha = 2\pi$ rad a pro součinitel tření $f = 1$ máme ihned silový převod $F_2/F_1 \approx 500$. Po dvojitým obtočení lana už je poměr sil $F_2/F_1 \approx 300\,000$ a po třetím obtočení lana je $F_2/F_1 \approx 150\,000\,000$!

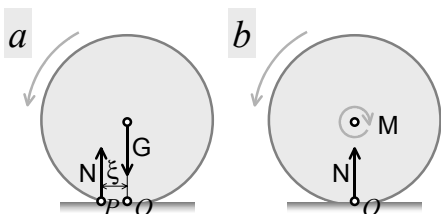
Pokud však lano na kúlu neprokluzuje, musíme nahradit smykový součinitel f statickým f_0 a vypočtený poměr sil F_2/F_1 chápat jako maximálně možný silový zisk.

5.4.6 Tření valivé

Jiný druh tření vzniká mezi povrchem a tělesem, které se po něm odvaluje či kotálí. Týká se to pochopitelně především válce a koule. **Valivé tření** opět závisí na přítláčné síle \mathbf{N} , ale vzhledem ke skutečnosti, že reakce \mathbf{N} deformované podložky neprochází ideálním bodem dotyku O , ale bodem P , který předbíhá bod O o jistou vzdálenost $\xi = |OP|$, vytváří reakce \mathbf{N} podložky spolu s přítláčnou silou brzdný silový **moment valivého tření**

$$M = \xi N$$

působící vždy proti pohybu.



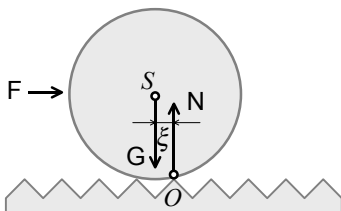
Dva ekvivalentní popisy valivého odporu: (a) Reakce \mathbf{N} deformující se podložky působí v předsunutém bodě P . (b) Reakce \mathbf{N} působí v bodě O , ale současně působí v ose válce brzdňný moment valivého tření $M = \xi N$.

Vzdálenost ξ se obvykle nazývá **rameno valivého tření** a vzhledem ke skutečnosti, že nezávisí na rozměrech tělesa ani na přítláčné síle, ale pouze na typu povrchu válce a podložky, představuje tabelovaný koeficient valivého tření. Například pro styk ocel – ocel je $\xi \approx 0.002$ cm a pro guma – asfalt je $\xi \approx 0.04$ cm. V úlohách nahrazujeme obvykle reakci \mathbf{N} stejnou silou působící v ideálním bodě dotyku O , ale k působícím silám přidáváme ještě moment valivého tření \mathbf{M} .

rameno valivého tření	
	ξ [mm]
ocelové ložisko	0.01
železnice	0.05
pneumatika - asfalt	2.4
pneumatika - tráva	6.0
dřevo - dřevo	0.8

Tabulka vybraných ramen valivého tření

Při obvyklých rozměrech kol je valivé tření stokrát až tisíckrát menší než tření smykové, a proto se snažíme smykové tření všude nahradit třením valivým. Když bylo před třemi tisíci lety objeveno kolo, okamžitě nahradilo smykové tření saní, a tak vznikl vůz s koly. Významně menší čepové tření nápravy vozu se dále snižovalo kolomazí, dnes se snižuje spíše valivým ložiskem.



Jednoduchý model pro valivé tření. Abychom válec posunuli přes nerovnost povrchu, musí překonat síla F vratný moment přítláčné síly G vzhledem k bodu O .

Jednoduchý model valivého tření

Podobně můžeme zkonstruovat jednoduchý model pro valivé tření. Síla, nezbytná k tomu, abychom překulili válec o poloměru R přes nerovnosti šířky 2ξ , je dána z podmínky rovnováhy momentů sil vzhledem k bodu otáčení O . Platí tedy $FR = N\xi$, a proto dostaneme $F = N\xi/R$, což je zároveň vzorec pro třecí sílu. Síla odporu

při odvalování závisí na přitlačné síle a nepřímo úměrně na poloměru válce. Kvalita povrchu je obsažena v jediném parametru ξ , který charakterizuje velikost nerovností povrchu. Valivé tření tedy nezávisí ani na hloubce, ani na strmosti nerovností.

5.4.7 Odpor prostředí

Také těleso, které se pohybuje v tekutém prostředí, musí překonávat odpor prostředí vůči pohybu. Například automobil nebo míč musí překonávat odpor vzduchu a ponorka nebo loď odpor vody. Přesná velikost odporové síly se studuje v hydrodynamice. Pro běžné potřeby vystačíme s přibližným výsledkem, že velikost síly odporu prostředí závisí na čtverci rychlosti v tělesa vzhledem k danému prostředí a spočte se podle **Newtonova vzorce**

$$F_x = \frac{1}{2} c_x \rho v^2 S,$$

kde c_x je součinitel odporu tělesa, ρ hustota odporujícího prostředí a S je velikost čelní plochy tělesa.



Tabulka součinitelů aerodynamického odporu c_x některých vybraných profilů

Součinitel odporu závisí na tvaru a natočení tělesa vzhledem ke směru pohybu. Pro sférický tvar je $c_x \approx 0.5$, pro padák, příp. kolmou desku je $c_x \approx 1.0$, zatímco pro aerodynamický kapkový tvar tělesa je jen $c_x \approx 0.03$. Odporová síla působí vždy proti směru pohybu. Při velkých rychlostech se stává nejdůležitější silou odporu vůči pohybu. V meziplanetárním prostoru, tj. mimo atmosféru Země, je odpor prostředí zanedbatelný.

Příklad 5.13 Parašutista o hmotnosti $m = 80$ kg vyskočí z letadla ve výšce 2 km. Prvních dvacet sekund padá bez padáku, pak se mu otevře padák. Popište jeho pád, je-li odporová brzdná síla daná vzorcem $F_x = kv^2$, kde $k = k_1 \approx 0.5$ kg/m pro pád bez padáku a $k = k_2 \approx 50$ kg/m pro pád s otevřeným padákem (to odpovídá ploše padáku 50 m^2).

Řešení: Pohybová rovnice pádu parašutisty má tvar

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$v = w \operatorname{tgh} \left(\frac{gt}{w} + \operatorname{argtgh} \frac{v_0}{w} \right) \quad \text{pro } v_0 < w,$$

nebo

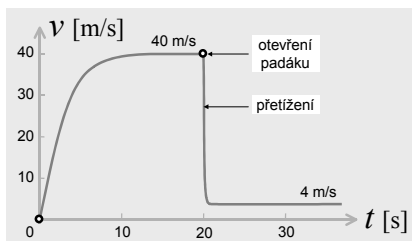
$$v = w \operatorname{cotgh} \left(\frac{gt}{w} + \operatorname{argcotgh} \frac{v_0}{w} \right) \quad \text{pro } v_0 > w,$$

kde $w = \sqrt{mg/k}$ značí asymptotickou rychlost a v_0 je počáteční rychlost pádu. Integrací rychlosti podle času dostaneme závislost dráhy parašutisty na čase. Speciálně pro pád z klidu

$v_0 = 0$ tedy vyjde

$$v = w_1 \operatorname{tgh} \frac{gt}{w_1} \quad \text{a} \quad s = \frac{w_1^2}{g} \ln \cosh \sqrt{\frac{k_1 g}{m}} t,$$

kde $w_1 = \sqrt{mg/k_1} \approx 40 \text{ m/s}$. Během prvních dvaceti sekund dosáhne parašutista rychlosti $v_1 \approx 40 \text{ m/s}$ a urazí dráhu $s_1 \approx 690 \text{ m}$. Prakticky stejnou rychlost s přesností na procento parašutista dosáhne již za čas $\tau_1 = 3w_1/g \approx 12 \text{ s}$, zbytek pádu je tedy rovnoměrným pohybem o rychlosti w_1 .



Graf závislosti rychlosti pádu parašutisty na čase.

Nyní se otevře padák, tím vzroste odporová síla stokrát, takže pro rychlost pádu s padákem platí

$$v = w_2 \operatorname{cotgh} \left(\frac{gt}{w_2} + \arg \operatorname{cotgh} \frac{v_1}{w_2} \right),$$

kde $w_2 = \sqrt{mg/k_2} \approx 4 \text{ m/s}$. Během krátké doby $\tau_2 = 3w_2/g \approx 1.2 \text{ s}$ opět prudce poklesne rychlost na konečnou rychlost $v_2 \approx w_2 \approx 4 \text{ m/s}$, takže zbytek pádu až na zem odpovídá rovnoměrnému pohybu o rychlosti w_2 . Protože k zemi zbývá ještě 1300 m, potrvá poslední fáze pádu asi 5.5 minuty. Při otevření padáku vzniká velké přetížení, naštěstí padák se otevírá postupně několik sekund, takže krátkodobé přetížení parašutisty nakonec není tak značné.

Příklad 5.14 Jakou rychlostí dopadne na zem ocelová koule o hmotnosti $m = 1 \text{ kg}$ z výšky 100 m, 1 km a 10 km. Uvažujte odporující prostředí a nulovou počáteční rychlost.

Řešení: Pohybová rovnice dolů padající koule je $m dv/dt = mg - kv^2$, odtud vypočteme element času $dt = m dv / (mg - kv^2)$. Dráha koule je pak rovna

$$ds = v dt = \frac{m v dv}{mg - kv^2}.$$

Integrací této rovnice dostaneme vztah mezi rychlostí a dráhou parašutisty

$$s = \int_0^v \frac{m v dv}{mg - kv^2} = \frac{w^2}{2g} \ln \frac{w^2}{w^2 - v^2},$$

kde $w = \sqrt{mg/k}$. Odtud se vypočte rychlost parašutisty při dopadu na zem z výšky $s = H$ jako

$$v = w \sqrt{1 - e^{-\frac{2gH}{w^2}}}. \quad (5.4)$$

Kilogramová ocelová koule má zhruba poloměr 3 cm, součinitel odporu $k \approx 9 \times 10^{-4} \text{ N s}^2/\text{m}^2$ a asymptotickou rychlost $w \approx 105 \text{ m/s}$. Rychlost koule při dopadu na zem z výšky 100 m je tedy podle (5.4) rovna 43 m/s, z výšky 1 km je 96 m/s a z výšky 10 km je 105 m/s. Rychlost pádu z výše několika kilometrů se tedy již asymptoticky blíží hodnotě w . Pro srovnání, kdyby nebylo odporu vzduchu $k = 0$, dostali bychom rychlosti 45 m/s, 141 m/s a 447 m/s. Při pádu koule z výšky 100 m se tedy odpor vzduchu ještě příliš neprojevuje.

Příklad 5.15 Do jaké výšky H doletí koule vržená svisle vzhůru rychlostí v_0 v odporujícím prostředí?

Řešení: Pohybová rovnice vzhůru letící koule je $mdv/dt = -mg - kv^2$, odtud vypočteme element času $dt = -mdv / (mg + kv^2)$. Dráha koule je pak rovna

$$H = \int v dt = - \int_{v_0}^0 \frac{mvdv}{mg + kv^2}.$$

Odtud již integrací dostaneme hledaný výsledek

$$H = \frac{w^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{v_0^2}{w^2} \right), \quad (5.5)$$

z něhož je patrné, že výška letu H koule roste s počáteční rychlostí v_0 jen logaritmičticky. Zde $w = \sqrt{mg/k}$ opět značí asymptotickou rychlost. Je-li odpor vzduchu malý $v_0 \ll w$, vyjde z (5.5) pochopitelně známý vzorec $H \approx v_0^2/2g$.

Příklad 5.16 Jakou rychlostí dopadne zpět na zem koule vržená svisle vzhůru rychlostí v_1 v odporujícím prostředí?

Řešení: Podle vzorce (5.5) doletí koule až do výše $H = (w^2/2g) \ln(1 + v_1^2/w^2)$, kde $w = \sqrt{mg/k}$, zde se zastaví a začne padat dolů. Podle vzorce (5.4) tedy dopadne na zem rychlostí

$$v_2 = w \sqrt{1 - e^{-\frac{2gH}{w^2}}} = \frac{v_1 w}{\sqrt{w^2 + v_1^2}}.$$

Pro malé rychlosti $v_1 \ll w$ odtud vyjde pochopitelně $v_2 \approx v_1$ a pro velké rychlosti $v_1 \gg w$ zase vyjde $v_2 \approx w$.

5.5 Zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti

5.5.1 Impulz a hybnost

Působí-li na hmotný bod síla \mathbf{F} po dobu Δt , obdrží **silový impulz**

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t.$$

Silový impulz vyjadřuje **časový účinek síly**. Silový impulz je stejně jako síla vektorovou veličinou, jednotkou impulzu je kg m/s .

Jestliže vynásobíme zákon síly (5.1) časovým intervalem Δt , dostaneme

$$\mathbf{F}\Delta t = m\mathbf{a}\Delta t = m\Delta\mathbf{v} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1,$$

což lze psát jako

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p}, \quad (5.6)$$

kde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se nazývá **hybnost** tělesa. Hybnost tělesa \mathbf{p} je rovněž vektorová veličina a má stejnou jednotku jako silový impulz. Pomocí hybnosti se často zapisuje druhý Newtonův zákon ve tvaru

$$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \mathbf{F}. \quad (5.7)$$

Tak jej ostatně uváděl i sám ISAAC NEWTON ve svých *Principiích*, viz originální znění druhého pohybového zákona na počátku kapitoly, kde mírou pohybu je myšlena pochopitelně hybnost. Za předpokladu, že hmotnost tělesa m je neměnná,

je tento vzorec ekvivalentní vzorci (5.1). Pokud se ovšem hmotnost tělesa mění, je vzorec (5.7) dokonce obecnější, než původní vzorec (5.1). Tělesem s proměnnou hmotností je například raketa, která spaluje palivo a snižuje během letu svoji hmotnost o vyhořelé palivo nebo relativistická částice, jejíž hmotnost se mění podle okamžité rychlosti.

Vzorec (5.6) lze zobecnit na časově proměnnou sílu $\mathbf{F}(t)$, celkový impulz dostaneme integrací a platí

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta \mathbf{p}.$$

Platí tedy obecně **první věta impulzová**:

Změna hybnosti je rovna silovému impulzu.

Nepůsobí-li na těleso žádná síla, tj. $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, zůstává hybnost tělesa neměnná, tj.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \text{konst.}$$

Toto tvrzení je vlastně obecnějším vyjádřením **zákonu setrvačnosti**. Později ukážeme, že zákon setrvačnosti platí i pro izolovanou soustavu mnoha těles, platí i pro těleso s proměnnou hmotou a platí dokonce i v teorii relativity, kde hmotnost roste s rychlostí tělesa.

Impulz a hybnost zavedl do mechaniky RENÉ DESCARTES v 17. století při studiu srážek kulečnickových koulí. Hybnost se původně nazývala *množstvím pohybu*.

5.5.2 Zákon zachování hybnosti

Uvažujme nyní dvě tělesa, která na sebe mohou silově působit. Jiné vnější síly neuvažujeme. Taková soustava těles se nazývá **izolovanou soustavou těles**. Pro každé z těles platí pohybová rovnice

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_{21} \quad \text{a} \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_{12}.$$

Tyto rovnice můžeme sečíst. Podle zákona akce a reakce je součet obou sil roven nule $\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}$, a proto musí také platit

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ je celková hybnost soustavy těles. Integrací dostaneme **zákon zachování hybnosti** pro dvě tělesa:

Celková hybnost izolované soustavy dvou těles se nemění.

$$\mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{konst.}$$

Pojem **těžiště** je definován ve statice tuhého tělesa jako bod, ve kterém se protínají všechny těžnice. Těžiště je proto působistěm tíhy tělesa. Pro polohu těžiště dvou hmotných bodů jsme odvodili vzorec

$$\mathbf{r}_T = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.8)$$

Tento vzorec je nezávislý od existence tíhového pole a z logiky věci definuje bod, který je možno nazvat **hmotným středem**. Budeme jej značit stejně jako těžiště písmenem T . V případě homogenního tíhového pole oba pojmy, tj. těžiště a hmotný střed, splývají. V nehomogenním poli nebo v beztížném stavu však pojem těžiště ztrácí smysl. Naopak pojem hmotný střed definovaný vzorcem (5.8) si smysl podrží. Pojem hmotného středu je tedy obecnější než pojem těžiště. Hned uvidíme, že hmotný střed má i další fyzikální významy.

Zderivujeme-li vztah (5.8) podle času, dostaneme

$$\mathbf{v}_T = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

kde \mathbf{v}_T je rychlost hmotného středu, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ je celková hybnost a $m = m_1 + m_2$ je celková hmotnost soustavy. Bude-li soustava těles izolovaná, můžeme použít zákon zachování hybnosti a dostaneme

$$\mathbf{v}_T = \frac{\mathbf{p}}{m} = \text{konst.}$$

Dokázali jsme tak, že hmotný střed izolované soustavy se pohybuje rovnoměrně přímočaře stálou rychlostí. Pro těžiště soustavy izolovaných těles tedy platí **zákon setrvačnosti** ve znění:

Hmotný střed izolované soustavy se pohybuje stálou rychlostí $\mathbf{v}_T =$
konst.

Pokud jsou obě tělesa na počátku v klidu, je i celková hybnost soustavy na počátku rovna nule $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Působením vnitřních sil se však mohou dát obě tělesa do pohybu. Podle zákona zachování hybnosti platí

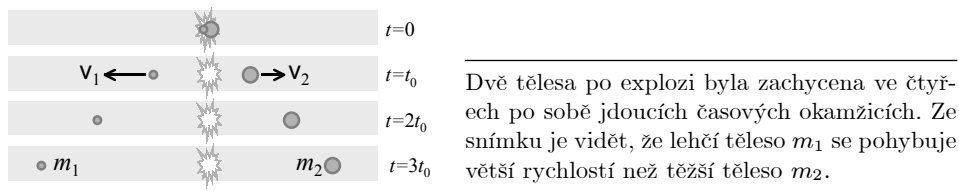
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

takže odtud

$$\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}_1.$$

Tělesa budou mít stejně veliké, ale opačně orientované hybnosti. Také rychlosti obou těles budou mít opačný směr. Velikosti rychlostí obou těles budou v obráceném poměru jejich hmotností. Těžší těleso získá menší rychlost a lehčí těleso větší rychlost. Zákon zachování hybnosti vysvětluje, proč pocítíme při výstřelu z pušky do ramene **zpětný ráz**, proč jde dělo při výstřelu zpátky do závěsu, proč nám

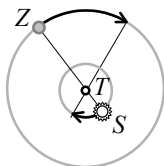
ujíždí lodička pod nohama, když se z ní pokoušíme vystoupit na břeh atd. Pokud je jedno z těles mnohem těžší, bude jeho změna rychlosti téměř nulová. Na principu zpětného rázu pracuje i reaktivní pohon. Blíže o něm v další kapitole.



Bude-li těžiště soustavy v klidu, pak platí

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}, \quad \text{neboli} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}_1.$$

Z toho plyne, že Země nemůže obíhat kolem nehybného Slunce, ale Země i Slunce obíhají kolem společného těžiště (pokud si odmyslíme zbývající planety). Protože je Slunce 330 000 krát těžší než Země, bude jeho dráha a rychlost také tolikrát menší než oběžná dráha Země. Podobně, protože je Země mnohem těžší (6×10^{24} kg) než všechna běžná tělesa, nemusíme k pohybu Země přihlížet při pohybech běžných těles jako jsou auta, letadla atd.



Současný pohyb Země Z a Slunce S kolem společného nehybného těžiště T . Obě tělesa obíhají přibližně po kruhových drahách a jsou vůči sobě vždy v opozici.

Příklad 5.17 Dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 se nacházejí ve vzájemné vzdálenosti l , jsou na počátku v klidu a přitahují se stálou silou F . Za jak dlouho se obě tělesa srazí?

Řešení: Podle zákona akce a reakce působí na sebe obě tělesa stejnými silami F , proto budou zrychlení obou těles nepřímo úměrná hmotnostem těles. Obě tělesa se přitom budou pohybovat rovnoměrně zrychleně a urazí vzájemnou vzdálenost za čas t , pro který platí rovnice

$$\frac{F}{2m_1} t^2 + \frac{F}{2m_2} t^2 = l.$$

Odtud máme hledanou dobu do srážky

$$t = \sqrt{\frac{2l}{F} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Příklad 5.18 Pramice se přiblížila ke břehu a vy z ní chcete přeskočit na břeh. Jak daleko doskočíte, když na pevné zemi doskočíte do vzdálenosti $d_0 = 2$ m? Předpokládejte, že vaše hmotnost je $m_1 \approx 75$ kg a hmotnost pramice $m_2 \approx 25$ kg.

Řešení: Práce vašich svalů bude stejná v obou případech, tj. při skoku z pevného břehu i při skoku z pramice. V prvním případě je $A = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$, kde A je práce vašich svalů. Protože doskok je $d_0 = v_0^2/g$ pro $\alpha \approx 45^\circ$, tak $A = \frac{1}{2} m_1 g d_0$. Ve druhém případě se práce vašich svalů

rozdělí mezi vás a pramici a doskok bude výrazně menší. Podle zákona akce a reakce platí $m_1 v_1 = m_2 v_2$. Zároveň je práce vašich svalů rovna kinetické energii vašeho těla a pramice

$$A = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{m_1 + m_2}{m_2}.$$

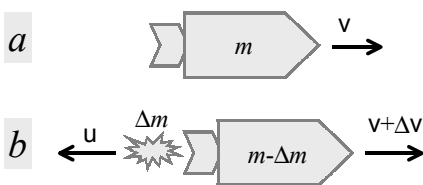
Odtud je doskok z pramice roven

$$d = \frac{v_1^2}{g} = \frac{2A}{m_1} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = d_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \approx 50 \text{ cm}.$$

Protože je pramice třikrát lehčí než vy, bude mít třikrát větší rychlost než vy a odnese třikrát více energie než vaše tělo. Doskočíte proto jen do čtvrtiny vzdálenosti, kam byste doskočili při odrazu z pevné země.

5.5.3 Reaktivní pohon

Nyní si vysvětlíme, jak fungují reaktivní raketové motory a odvodíme pohybovou rovnici pro **tělesa s proměnnou hmotou**. Princip **reaktivního pohonu** se dá vyvodit ze zákona zachování hybnosti. Z trysek raketového motoru unikají žhavé spaliny a ty odnášejí určitou hybnost. Soustava raketa + zplodiny hoření tvoří dohromady izolovanou soustavu, jejíž celková hybnost se musí zachovávat. Raketa proto získává opačný impuls, než je hybnost plynů opouštějících trysku a raketa se dává do pohybu.



Ilustrace k odvození Meščerského rovnice. Horní obrázek (a) představuje raketu o hmotnosti m a rychlosti \mathbf{v} . Dolní obrázek (b) zachycuje stav po uplynutí času Δt , kdy raketa spálí palivo o hmotnosti Δm . Tím vzniknou zplodiny o hmotnosti Δm a rychlosti \mathbf{u} . Raketa se tím urychlí o $\Delta \mathbf{v}$.

Uvažujme raketu o hmotnosti m a rychlosti \mathbf{v} v okamžiku t , která za čas Δt spálí Δm kilogramů paliva a zplodiny opustí raketu rychlostí \mathbf{u} . Hmotnost rakety tím klesne na hodnotu $m - \Delta m$ a její rychlost se zvětší o $\Delta \mathbf{v}$. Pro soustavu platí zákon zachování hybnosti

$$m\mathbf{v} = (m - \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m\mathbf{u}.$$

Po roznásobení a zanedbání malého členu $\Delta m\Delta \mathbf{v}$ dostaneme

$$m\Delta \mathbf{v} = \Delta m\mathbf{v} - \Delta m\mathbf{u} = -\Delta m\mathbf{U}.$$

Zde $\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ je relativní rychlost plynů opouštějících trysku rakety počítáno vzhledem k raketě. Je to velmi důležitý technický parametr raketového motoru. Jeho hodnota se pohybuje kolem $U \approx 2 \text{ km/s}$ pro pevná paliva a $U \approx 3 \text{ km/s}$ pro kapalná paliva.

Pohybová rovnice rakety se tak dá přepsat do tvaru

$$m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = - \frac{\Delta m}{\Delta t} \mathbf{U},$$

neboli

$$m\mathbf{a} = \dot{m}\mathbf{U}, \quad \text{kde} \quad \dot{m} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} < 0$$

značí rychlost narůstání hmotnosti rakety, která je pochopitelně záporná. Takže zrychlení rakety směřuje opačným směrem než plameny z trysek motoru. Pokud zahrneme do úvah i vnější síly působící na raketu, například gravitaci, odpor prostředí atd., dostaneme **Meščerského rovnici** (IVAN VSEVOLODOVIČ MEŠČERSKIJ 1897)

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \dot{m}\mathbf{U}, \quad (5.9)$$

zde \mathbf{F} je výslednice vnějších sil působících na raketu. Meščerského rovnice umožňuje řešit nejrůznější dynamické problémy těles, jejichž hmotnost se mění, především pohyb raket a proudových letadel.

5.5.4 První Ciolkovského úloha

Nyní najdeme nejdůležitější řešení Meščerského rovnice, a to pro případ pohybu rakety v beztížném prostoru, kde na raketu nepůsobí jiné síly než reaktivní pohon vlastních motorů. Předpokládejme, že na počátku má raketa s palivem hmotnost m_0 a rychlost \mathbf{v}_0 , a že raketa má zorientovány trysky po celou dobu manévru stejným směrem, tj. platí $\mathbf{U} = \text{konst.}$ Z Meščerského rovnice máme diferenciální rovnici

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{U},$$

její řešení najdeme metodou separace proměnných po vyloučení času

$$\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} = \mathbf{U} \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}.$$

Integrací dostáváme **Ciolkovského rovnici** (KONSTANTIN EDUARDOVIČ CIOLKOVSKIJ 1898)

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = -\mathbf{U} \ln \frac{m_0}{m}.$$

Jasnější představu si uděláme, bude-li na počátku raketa v klidu, pak je $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ a velikost dosažené rychlosti je $\mathbf{v} = -\mathbf{U} \ln(m_0/m)$. Raketa získá rychlost opačného směru, než má proud plynů z trysky. Pokud to zapíšeme skalárně a bez ohledu na znaménka, pak platí

$$v = U \ln \frac{m_0}{m}.$$

Pro opuštění zemského tíhového pole potřebujeme rychlost 8 až 12 km / s, což při $U \approx 3 \text{ km / s}$ (tj. kapalné palivo vodík a kyslík) vyžaduje poměr hmotností $m_0/m \approx$

14 až 55. Tedy konstrukční a užitečná hmotnost rakety m tvoří jen nepatrnou část ze startovací hmotnosti rakety m_0 , obvykle to je jen kolem 2 – 5 %. Většinu hmoty rakety $m_0 - m$ tvoří palivo, tj. kolem 95 – 98 %. To je také hlavní důvod, proč je kosmonautika stále tak drahá a také, proč je tak nebezpečná. V podstatě je totiž raketa při startu jen velmi křehká nádrž plná toho nejhořlavějšího známého paliva, které shoří během několika málo minut po startu.

Konstrukční poměr hmotnosti paliva a hmotnosti konstrukce je víceméně určen mechanickou pevností a bezpečností rakety a pohybuje se v hodnotách 1/10 až 1/20. Proto se dá požadované rychlosti dosáhnout jen pomocí **několikastupňových raket**. Nosné rakety, které vynášejí kosmické lodě na oběžnou dráhu kolem Země jsou obvykle dvoustupňové. Rakety, které vynášejí kosmické lodi k Měsíci, případně sondy ke vzdáleným planetám, jsou zpravidla třístupňové.

Doba, po kterou běží raketové motory a během níž se palivo spotřebuje, je relativně krátká. Můžeme ji odhadnout z jednoduchého předpokladu, že během startu se loď pohybuje se zrychlením $a \approx g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Přetížení kosmonautů je pak asi $2g$. Konečné kosmické rychlosti raketa dosáhne za $t \approx v/g \approx 15 \text{ min}$ a urazí přitom dráhu $s \approx v^2/2g \approx 5000 \text{ km}$. Raketa nejprve stoupá svisle vzhůru a již po dvou minutách se dostává z dosahu atmosféry. Teprve pak zaujme horizontální směr a dokončí manévry, při němž dosáhne první kosmické rychlosti a plánované orbity.

5.5.5 Druhá Ciolkovského úloha

Druhá Ciolkovského úloha se zabývá startem rakety v homogenním tíhovém poli. Uvažujme svislý start rakety o hmotnosti m_0 v tíhovém poli se zrychlením g . Pohybová rovnice rakety je tedy rovna

$$a = -g - U \frac{\dot{m}}{m}.$$

Rovnici můžeme zintegrovat s výsledkem

$$v = -gt + U \ln \frac{m_0}{m}.$$

Rychlost rakety v tíhovém poli je nižší než v beztížném stavu o rychlost gt , kde t je doba, po níž start trvá. Abychom zbytečně neplýtvali palivem, musí trvat celý start co nejkratší dobu. Už za pět minut je totiž $gt \approx 3 \text{ km/s}$. Na druhou stranu není možno palivo spálit příliš rychle, protože jinak by kosmonauti přetížení nepřežili. Za předpokladu rovnoměrného tahu je $m = m_0 - \alpha t$, a pak platí

$$a = -g + \frac{\alpha U}{m}.$$

Přetížení, kterému jsou vystaveni kosmonauti, je rovno $a + g = \alpha U/m$. Přetížení vyjadřuje nejlépe bezrozměrné číslo $n = (a + g)/g$. Na konci startu je tedy přetížení rovno $n = n_0 m_0/m$, kde n_0 je přetížení při startu. Přetížení roste s klesající hmotností rakety, protože i při startu musí být $n_0 > 1$, jinak by raketa nestoupala,

a protože Ciolkovského poměr u jednostupňové rakety je $m_0/m \approx 10$ až 20, bylo by přetížení na konci startu až $n \approx 20$. To by pochopitelně kosmonauti nepřežili. Optimální startovní režim rakety se proto volí tak, aby bylo po celou dobu stále přetížení $n = \text{konst.}$ Rychlost rakety se pak mění podle lineárního zákona

$$v = at = (n - 1)gt.$$

Pro $n \approx 5$ je první kosmické rychlosti dosaženo už za $t \approx 200$ s. Tomuto režimu odpovídá exponenciální pokles hmotnosti rakety $m = m_0 e^{-ngt/U}$ a Ciolkovského poměr

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{n}{n-1} \frac{v}{g}} \approx 30 \text{ až } 150 \quad \text{pro} \quad v \approx 8 \text{ až } 12 \text{ km/s.}$$

Odtud je opět zřejmé, že reálná konstrukce nosných raket musí využívat princip několikastupňových nosičů.

Konstantin Eduardovič Ciolkovskij 1857 - 1935

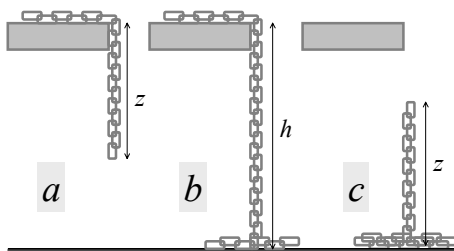
5.5.6 Konstantin Eduardovič Ciolkovskij

Z trojice průkopníků raketové techniky a kosmonautiky (Ciolkovskij, Goddard a Oberth) byl teoretický přínos KONSTANTINA EDUARDOVIČE CIOLKOVSKÉHO největší. Jako dítě přišel následkem spály v devíti letech o sluch a později i o matku. Stal se samotářem a vyrůstá pouze mezi knihami, bez kamarádů. S jejich pomocí sní o cestách do kosmu. V 16 letech odchází do Moskvy a pomocí naslouchátek zde studuje chemii, matematiku, fyziku a mechaniku. Později, na přání otce, skládá učitelské zkoušky a živí se na venkově jako učitel. Zde, v Kaluze, zcela izolován od světa, vědeckých institucí a kolegů, se zabývá aerodynamikou a objevuje rovnice kinetické teorie plynů. Od slavného chemika DMITRIJE IVANOVIČE MENDELEJEVA se však bohužel dozvídá, že jeho rovnice nejsou nové, ale že už jsou čtvrt století světu dobře známy. Mendělejev však rozpoznává Ciolkovského mimořádné nadání a schopnosti, a doporučuje proto jeho přijetí do Ruské fyzikálně-chemické společnosti. Ze skromého platu si Ciolkovskij staví prakticky na koleně aerodynamický tunel, první v Rusku, a experimentuje s různými tvary vzducholodí a letadel. Prozkoumal kolem sta modelů. Zde získává zkušenosti, které se mu pak výborně hodí

při studiu raket. Později dostává menší finanční příspěvek na další pokusy a staví si větší tunel. V té době se začíná již naplno věnovat kosmonautice. Roku 1895 vydává knihu *Sny o zemi a nebi* a roku 1896 článek o komunikaci s obyvateli jiných planet. Stejněho roku začíná psát svou největší práci o kosmonautice *Výzkum světových prostorů reaktivními přístroji*, ve které se zabývá teoretickými i technickými problémy raketové techniky a jejím využitím pro cesty do kosmu. Zkoumá zde mimo jiné přenos tepla v motoru, regulaci dodávky paliva, navigační mechanismy, ohřev raket vlivem tření v atmosféře, přetížení při startu atd. Práce vyšla roku 1903.

5.5.7 Cayleyho úloha

Konec těžkého řetězu délky l padá s okraje stolu, jehož deska je ve výšce h nad podlahou. Zbytek řetězu tvoří na přešlapové straně stolu klubko, které se odvíjí bez tření. Určete pohyb řetězu. Úlohu vyřešil roku 1857 ARTHUR CAYLEY.



Cayleyho úloha, tři režimy (a), (b) a (c) pádu volně se odvíjejícího řetězu se stolu.

Odvíjení řetězu je typická úloha na pohybový problém s proměnnou hmotností. Řešení je nutno rozdělit do tří částí: (a) volný konec řetězu padá dolů, (b) volný konec řetězu dosáhl podlahy a dále se odvíjí, (c) odvíjení řetězu je ukončeno a druhý konec řetězu padá dolů. Triviální případ, kdy je řetěz kratší než výška stolu a kdy padá volným pádem, tedy vyšetřovat nebudeme.

(a) Hmotnost padající části řetězu je $m = \gamma z$, kde z je odvinutá délka řetězu a γ hmotnost jednotky délky řetězu. Řetěz urychluje tíha $G = \gamma g z$ jeho přes stůl přecházející části. Hmotnost padajícího řetězu narůstá $\dot{m} = \gamma \dot{z}$ a relativní rychlost připojujících se článků je $U = -\dot{z}$. Pohybová rovnice má tedy podle (5.9) tvar

$$z\ddot{z} = gz - \dot{z}^2.$$

Protože platí

$$\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz} v = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dz},$$

lze pohybovou rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{dv^2}{dz} + 2 \frac{v^2}{z} = 2g.$$

Rovnice má řešení $v^2 = \frac{2}{3}gz + \frac{C}{z^2}$, kde C značí integrační konstantu. Začíná-li pohyb řetězu z klidu, vyjde $C = 0$ a pro rychlost řetězu tedy platí $v = \sqrt{\frac{2}{3}gz}$. Odtud je

již zřejmé, že se jedná o pád se třetinovým tíhovým zrychlením, platí tedy

$$v = \frac{1}{3}gt.$$

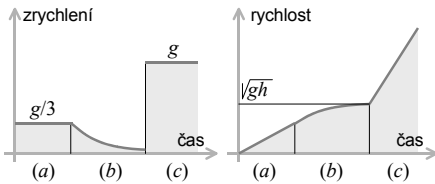
(b) Začátek řetězu dopadl na podlahu, zatímco konec řetězu se ještě stále odvíjí. Hmotnost pohybující se části řetězu $m = \gamma h$ je nyní stálá, takže pohybová rovnice zní

$$h\ddot{z} = gh - \dot{z}^2.$$

Řešení pro počáteční podmínku $v(0) = \sqrt{\frac{2}{3}gh}$, která navazuje na část (a), má tvar

$$v = \sqrt{gh} \operatorname{tgh} \left(\sqrt{\frac{g}{h}}t + \arg \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

Rychlost řetězu tedy dále roste a pro dostatečně dlouhý řetěz může dosáhnout až hodnoty $v \approx \sqrt{gh}$.



Závislost zrychlení a rychlosti padajícího řetězu v jednotlivých fázích pohybu (a), (b) a (c).

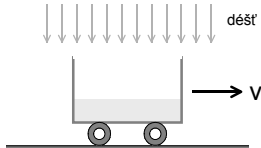
(c) V poslední fázi je řetěz odvinut se stolu a jeho konec padá k zemi. Hmotnost řetězu je $m = \gamma z$ a pohybová rovnice je

$$z\ddot{z} = gz.$$

Odtud je pohybem řetězu volný pád $\ddot{z} = g$, s navazující počáteční podmínkou (b) bude rychlost řetězu daná předpisem

$$v = \sqrt{gh} + gt.$$

Příklad 5.19 Po přímé koleji se pohybuje bez tření prázdný vagón. Popište jeho pohyb za předpokladu, že do vagónu prší rovnoměrně voda, a ta v něm zůstává.



Ilustrace k úloze. Otevřený vagón se pohybuje setrvačností a shora do něj rovnoměrně prší.

Řešení: Jde o úlohu na pohyb tělesa s proměnnou hmotností. Podle Mešcherského rovnice platí

$$m\dot{a} = U\dot{m},$$

kde $m = m_0 + \alpha t$, $\dot{m} = \alpha$ a $U = -v$. Odtud

$$m\dot{v} + v\dot{m} = (mv)' = 0.$$

Jak vidíme, zachovává se při tomto pohybu okamžitá hybnost vagónu i s vodou $mv = \text{konst}$, a protože hmotnost roste, klesá rychlost vagónu postupně podle rovnice

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \alpha t}.$$

Dojde-li k naplnění vagónu, bude z něj voda muset současně odtékat. Hmotnost vagónu se přestane měnit a bude rovna m_1 . V tom okamžiku bude rychlost vagónu rovna $v_1 = m_0 v_0 / m_1$. Pohybová rovnice se změní, protože odtékající voda nepřispívá k reaktivní síle a platí

$$m_1 a = U \dot{m} = -\alpha v,$$

odtud

$$v = v_1 e^{-\alpha t / m_1}.$$

V této fázi bude rychlost vagónu klesat mnohem rychleji podle exponenciálního zákona.

Příklad 5.20 Určete pohyb vozu trousícího náklad. Předpokládejte, že na vůz působí stálá síla F a síla tření T a že hmotnost vozu je možno popsat rovnicí $m = m_0 - \alpha t$.

Řešení: Jde sice rovněž o úlohu na pohyb tělesa s proměnnou hmotností, ale k jejímu řešení nemusíme znát Meščerského rovnici, protože reaktivní síla je rovna nule. Oddělující se náklad se totiž pohybuje relativně nulovou rychlostí $U = 0$. Stačí tedy započíst změnu setrvačné hmotnosti, z pohybové rovnice

$$ma = F - T,$$

kde $T = fgm$, máme

$$a = \frac{F - T}{m} = \frac{F}{m_0 - \alpha t} - fg.$$

Integrací pak dostaneme pro rychlost

$$v = v_0 + \frac{F}{\alpha} \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} - fgt.$$

Příklad 5.21 Umožňuje současná raketová technika mezihvězdné lety?

Řešení: Uvažujme hvězdu vzdálenou 4 světelné roky. Má-li se na ni dostat pilotovaná loď za 20 let, musí mít průměrnou rychlost

$$v \approx 0.2c \approx 60\,000 \text{ km/s}.$$

Abychom urychlili loď s užitečnou hmotností $m \approx 10^3 \text{ kg}$, což je opravdu velmi skromný odhad, spotřebujeme k tomu podle Ciolkovského rovnice palivo o hmotnosti

$$m_0 \approx m e^{v/U} \approx 10^{8688} \text{ kg},$$

přičemž samotný vesmír váží dohromady jen 10^{53} kg ! Za rychlost plynů jsme zde dosadili $U \approx 3 \text{ km/s}$. Kdybychom se omezili na mnohagenerační výpravu, případně využili hypotetickou hybernaci, mohli bychom dobu letu prodloužit na řekněme 2000 let. Průměrná rychlost lodi by pak byla jen

$$v \approx 0.002c \approx 600 \text{ km/s}.$$

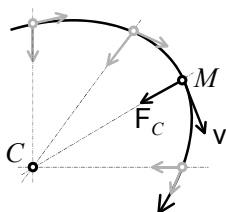
Abychom urychlili loď se stejnou užitečnou hmotností $m \approx 10^3 \text{ kg}$ na tuto rychlost, spotřebujeme k tomu stále ještě neuvěřitelné množství paliva o hmotnosti

$$m_0 \approx 10^{90} \text{ kg}.$$

Současná raketová technika tedy mezihvězdné lety neumožňuje. Všimněte si, že jsme zcela pominuli skutečnost, že na konci cesty budeme muset loď zabrzdit a k tomu spotřebujeme stejné množství paliva jako k urychlení lodi a že by se loď po návštěvě hvězdy měla zase vrátit zpátky na Zem.

5.5.8 Zákon zachování momentu hybnosti

Mnohé síly ve fyzice směřují do stále stejného bodu, který nazýváme **silovým centrem**. Příkladem takové síly může být dostředivá síla napnutého provázku, kde silovým centrem je střed otáčení nebo gravitační síla, která stále směřuje do zemského středu.



Hmotný bod M v poli centrální síly. V každém bodě dráhy působí na hmotný bod síla \mathbf{F}_C směřující do silového centra C .

Prozkoumejme nyní pohyb hmotného bodu M v poli centrální síly \mathbf{F}_C . Pohybová rovnice tělesa je dána zákonem síly $\mathbf{F}_C = m\mathbf{a}$, a protože centrální síla je podle předpokladu rovnoběžná s průvodičem $\mathbf{r} = \overline{CM}$ hmotného bodu, má smysl pohybovou rovnici vektorově vynásobit zleva vektorem \mathbf{r} . Tím dostaneme rovnici

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_C = \mathbf{r} \times m\mathbf{a},$$

na jejíž levé straně máme automaticky nulu, neboť $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_C = \mathbf{0}$. Na pravé straně rovnice dostaneme výraz

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\mathbf{L}, \quad (5.10)$$

kde veličinu

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.11)$$

nazýváme **moment hybnosti**. V literatuře je možno najít i jiné termíny pro moment hybnosti jako **orbitální moment**, **impulzmoment** nebo **točivost**, všechny však znamenají totéž. Při úpravě výrazu (5.10) jsme využili skutečnosti, že $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, a proto platí

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}.$$

Vzhledem k centrálnímu charakteru síly je levá strana rovnice (5.10) rovna nule, a proto platí

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{0}, \quad \text{a odtud je} \quad \mathbf{L} = \text{konst.}$$

Právě jsem odvodili **zákon zachování momentu hybnosti** v centrálním poli:

Těleso, na které působí jen centrální síla, si zachovává moment hybnosti vzhledem k centru.

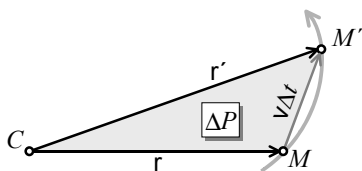
Vzhledem k jinému bodu se moment hybnosti samozřejmě nezachovává.

Moment hybnosti je vektor, takže ze zákona zachování momentu hybnosti plyne, že se zachovává kromě velikosti i směr vektoru \mathbf{L} . A protože směr momentu hybnosti (5.11) je dán kolmicí k rovině určené vektory \mathbf{r} a \mathbf{p} , znamená to, že trajektorii tělesa v centrálním poli musí být rovinná křivka. Rovina, v níž se těleso pohybuje, je kolmá na moment hybnosti a ten je jednoznačně určen počátečními podmínkami

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}_0.$$

Protože i na planety působí Slunce centrální silou, je jasné, proč jsou roviny oběžných drah jednotlivých planet stálé. Například rovina zemské oběžné dráhy se nazývá **rovinou ekliptiky** a prochází na obloze zvířetníkovými souhvězdími.

Zákon zachování momentu hybnosti hraje významnou roli v mechanice soustavy hmotných bodů, v nebeské mechanice a mechanice tuhých těles. Je druhým zákonem zachování, se kterým se v mechanice setkáváme. V teoretické mechanice se dokazuje, že jeho platnost je přímým důsledkem dokonalé **izotropnosti prostoru**.



Ilustrace k odvození plošné rychlosti. Pro krátké časy Δt se dá opsaná plocha ΔP přibližně nahradit trojúhelníkem $\triangle CMM'$.

Při studiu pohybu planet na počátku 17. století zjistil JOHANNES KEPLER, že průvodič planety vyplňuje za stejné časy stejně velké plochy. Toto tvrzení je obsahem druhého Keplerova zákona o stálých plošných rychlostech. Ukážeme nyní, že existuje přímá souvislost mezi plošnou rychlostí a momentem hybnosti. Uvažujme planetu M , která se za krátký čas Δt posune z místa \mathbf{r} do místa $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t$. Velikost plochy ΔP , kterou průvodič $\mathbf{r} = \overline{CM}$ za tuto dobu opíše, je z definice vektorového součinu rovna výrazu

$$\Delta P = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{r}'| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}\Delta t|.$$

Plošná rychlost je pak z definice rovna podílu této plochy ΔP a příslušného časového intervalu Δt

$$w = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|.$$

Vzhledem k definici momentu hybnosti (5.11) odtud již vidíme, že pro plošnou rychlost platí $w = L/2m$. Moment hybnosti a plošnou rychlost můžeme pochopitelně vyjádřit i v polárních souřadnicích, a pak platí

$$L = 2mw = mr^2\dot{\phi}.$$

Jak jsme ukázali výše, moment hybnosti tělesa se v centrálním silovém poli zachovává, takže se nemění ani jeho plošná rychlost. Naopak, Keplerem objevený empirický zákon o stálé plošné rychlosti zase dokazuje, že na planety působí centrální síla, jejímž centrem je nepochybně Slunce. To byl v 17. století hodně důležitý argument pro konečné vítězství heliocentrismu nad geocentrismem.

5.6 Pohyb v poli centrální síly

V případě centrální síly je přirozené vyšetřovat pohyb tělesa v polárních souřadnicích. Pól volíme pochopitelně v silovém centru, pak bude azimutální složka síly rovna nule $F_\phi = 0$ a radiální složka síly je rovna působící síle $F_r = F(r)$. Z kinematiky víme, že složky rychlosti jsou dány vzorci

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\phi = r\dot{\phi}$$

a složky zrychlení jsou dány vzorci

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2, \quad a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\phi}).$$

Pohybové rovnice v polárních souřadnicích tedy jsou

$$ma_r = F_r \quad \text{a} \quad ma_\phi = 0.$$

Z azimutální složky pohybové rovnice dostaneme

$$r^2\dot{\phi} = \frac{L}{m} = \text{konst}, \quad (5.12)$$

Pro pohyb hmotného bodu v centrálním poli tedy platí zákon stálé plošné rychlosti, a to zcela nezávisle od konkrétního tvaru centrální síly $F(r)$.

Z radiální části pohybové rovnice dále máme

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F(r). \quad (5.13)$$

Jestliže odtud vyloučíme azimut ϕ pomocí rovnice (5.12), dostaneme pro $r(t)$ diferenciální rovnici

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = \frac{F(r)}{m}, \quad (5.14)$$

kterou už můžeme v principu vyřešit, pokud budeme znát sílu $F(r)$.

Z rovnic (5.13) a (5.12) však můžeme vyloučit také čas a získat rovnou rovnici trajektorie $r(\phi)$. Z rovnice (5.12) plyne, že

$$\frac{1}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{1}{d\phi},$$

a proto

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} \quad \text{a} \quad \ddot{r} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} \right) \quad (5.15)$$

Substitucí $r = 1/u$ se oba výrazy dále zjednoduší a dostaneme

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\phi} \quad \text{a} \quad \ddot{r} = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\phi^2}.$$

Pro rychlost tělesa v polárních souřadnicích platí $v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$. Když vyloučíme časové derivace tak, že nahradíme $\dot{r} = -Lu'/m$ podle (5.15) a $\dot{\phi} = Lu^2/m$ podle (5.12), dostaneme **první Binetův vzorec** (JAQUES PHILIPPE MARIE BINET 1816)

$$v^2 = \frac{L^2}{m^2} \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right].$$

Podobně upravíme i rovnici (5.14) a dostaneme **druhý Binetův vzorec**

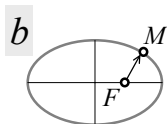
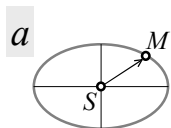
$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{F(u)}{u^2}.$$

5.6.1 Bertrandův teorém

Bertrandův teorém říká, že trajektorie částice v centrálním silovém poli bude uzavřenou křivkou pouze ve dvou případech přitažlivých centrálních sil, konkrétně jde o síly

$$F_1(r) = -kr \quad \text{a} \quad F_2(r) = -k/r^2.$$

První případ odpovídá dvourozměrnému lineárnímu oscilátoru a druhý pohybu částice v gravitačním nebo přitažlivém elektrickém poli. V obou případech vychází eliptická dráha. V prvním případě leží centrum ve středu elipsy a ve druhém případě leží centrum v jednom z ohnisek elipsy. Teorém dokázal roku 1873 JOSEPH BERTRAND.



Uzavřené trajektorie pro lineární oscilátor (a) a pro coulombovské přitažlivé pole (b).

Informace, že dráhy planet jsou uzavřené a že přitažlivost Slunce klesá se vzdáleností, jsou tedy postačující k závěru, že přitažlivost Slunce klesá přesně se čtvercem vzdálenosti.

5.6.2 Pohyb v poli coulombovské přitažlivé síly

Binetovy vzorce je mimořádně vhodné pro **coulombovskou sílu**, jakou je například síla gravitační

$$F(r) = -\varkappa \frac{mM}{r^2}.$$

V tom případě vede druhý Binetův vzorec na jednoduchou diferenciální rovnici

$$u'' + u = \frac{1}{p}, \quad \text{kde} \quad \frac{1}{p} = \varkappa \frac{m^2 M}{L^2}.$$

Její řešení je funkce

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \phi), \quad (5.16)$$

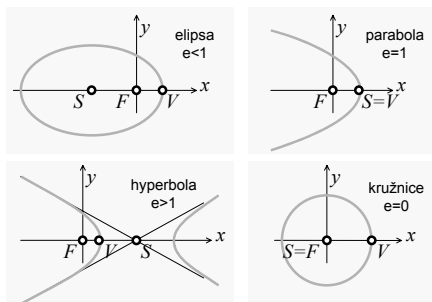
což je **polární rovnice kuželosečky**. Zde p představuje parametr a e numerickou excentricitu kuželosečky. Trajektorií částice v centrálním tíhovém poli je proto vždy kuželosečka. Pro $e = 0$ máme kružnici, pro $e < 1$ máme elipsu, pro $e = 1$ máme parabolu a pro $e > 1$ máme hyperbolu.

Podle prvního Binetova vzorce snadno spočteme i rychlost částice v coulombovském poli, dostaneme

$$v^2 = \frac{\kappa M}{p} (1 + 2e \cos \phi + e^2) = \kappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Při poslední úpravě jsme využili skutečnosti, že pro velkou poloosu kuželosečky platí vzorec $a = p / (1 - e^2)$.

Příklad 5.22 Převedením do kartézských souřadnic ukažte, že rovnice (5.16) je skutečně rovnicí kuželosečky.



Všechny čtyři kuželosečky pro různé hodnoty excentricity e . Počátek souřadnic leží vždy v ohnisku F . Poznamenejme, že rovnice kuželosečky v polárních souřadnicích definuje pouze levé rameno hyperboly.

Řešení: Transformací souřadnic $x = r \cos \phi$ a $y = r \sin \phi$ je možno rovnici (5.16) upravit do tvaru $(p - ex)^2 = x^2 + y^2$. Další úpravou dostaneme

$$\left(x + \frac{ep}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \left(\frac{p}{1 - e^2} \right)^2,$$

což vede pro $e < 1$ na kanonický tvar elipsy

$$\frac{(x - x_S)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad \text{a} \quad x_S = -\frac{ep}{1 - e^2} = -ea,$$

a pro $e > 1$ na kanonický tvar hyperboly

$$\frac{(x - x_S)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad \text{a} \quad x_S = \frac{ep}{e^2 - 1} = ea.$$

Bod $S = [x_S, 0]$ představuje střed vždy kuželosečky a bod $V = [p/(1+e), 0]$ vrchol kuželosečky s azimutem $\phi = 0$. Pro $e = 0$ dostaneme pochopitelně rovnici kružnice $p^2 = x^2 + y^2$ o poloměru p a pro $e = 1$ dostaneme rovnici paraboly $p^2 - 2px = y^2$ s parametrem p .

5.6.3 Pohyb volné částice

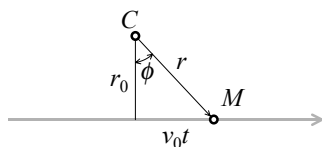
Speciálně pro volnou částici $F = 0$ dává Binetův vzorec rovnici $u'' + u = 0$, jejíž řešení $r(\phi) = r_0 \sec \phi$ je polární rovnicí přímky. Dále platí

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{mr_0^2} \cos^2 \phi,$$

takže odtud integrací dostaneme

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{Lt}{mr_0^2} = \frac{v_0 t}{r_0},$$

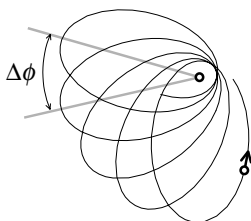
kde jsme dosadili za moment hybnosti $L = mr_0 v_0$. Vyloučením azimutu ϕ z obou rovnic dále dostaneme $r(t) = \sqrt{r_0^2 + v_0^2 t^2}$. Odtud již snadno nahlédneme, že volná částice se pohybuje rovnoměrně stálou rychlostí v_0 po přímce vzdálené od centra C o hodnotu r_0 .



Pohyb volné částice v polárních souřadnicích.

5.6.4 Necoulombovské pole, porucha

Pro jiné než coulombovské pole vede Binetův vzorec na příliš komplikované diferenciální rovnice, které jen málokdy dokážeme analyticky vyřešit. Pro praktické účely se často stačí omezit na malé poruchy od keplerovských eliptických drah. Důsledkem poruchy je skutečnost, že trajektorie tělesa není uzavřenou křivkou. Pro malé odchylky od coulombovské síly vychází kvazieliptická dráha s pomalu se stáčející **přímku apsid**. Přímku apsid se rozumí spojnice pericentra a apocentra tělesa, tj. spojnice bodů trajektorie, které jsou nejbližší a nejdále od silového centra. O stáčení přímky apsid v necoulombovském poli věděl ISAAC NEWTON již roku 1687.



Stáčení přímky apsid pro necoulombovskou centrální sílu $F \sim 1/r^{2.1}$.

Například pro sílu

$$F = -\frac{k}{r^{2+\varepsilon}}$$

vede Binetův vzorec na rovnici

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mk}{L^2}u^\varepsilon,$$

kterou řeší pro malé excentricity $e \approx 0$ kvazieliptická trajektorie

$$u = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\omega\phi)],$$

kde $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon}$. Následujícího pericentra se tedy dosáhne pro azimut

$$\phi = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \neq 2\pi.$$

Trajektorii částice tedy bude ruzicová dráha, pro $\varepsilon > 0$ s dopředným (prográdním) pohybem pericentra a pro $\varepsilon < 0$ se zpětným (retrográdním) pohybem pericentra. Pouze pro $\phi = 2\pi p/q$, kde p a q jsou celá čísla, bude trajektorie částice uzavřená. To nastane například pro $\varepsilon = 0$ ($\phi = 2\pi$, coulombovské pole) nebo pro $\varepsilon = -3$ ($\phi = \pi$, harmonický oscilátor), což je v souladu s Bertrandovým teorémem, ale také pro $\varepsilon = -8, -15, \dots$, zde však již pouze pro malá e . Speciálně pro malou poruchu $\varepsilon \approx 0$ je možno vyjádřit posun pericentra během jedné periody vzorcem

$$\Delta\phi = \phi - 2\pi \approx \pi\varepsilon.$$

Stáčením perihélia planet se projevují odchylky od Newtonova gravitačního zákona. Slunce působí na planetu coulombovskou silou, ale gravitační působení dalších planet, nehomogenní rozložení hmoty ve Slunci a relativistické korekce gravitačního zákona se projeví jako malé poruchy od coulombovské síly. Astronomové například pozorují stáčení perihelu planety Merkur o rychlosti $527''$ za sto let. Převážná část z toho je tvořena newtonovskými poruchami ostatních planet, zde se uplatní především blízká Venuše a velký Jupiter. Konečně menší část o rychlosti $43''$ za sto let má původ v čistě relativistické korekci gravitačního zákona a potvrzuje správnost Einsteinovy teorie.

Příklad 5.23 Najděte velikost stáčení perihelu planety, na kterou působí vedle přitažlivé coulombovské síly $F_2 = -\alpha/r^2$ ještě malá porucha $F_3 = -\beta/r^3$.

Řešení: Na planetu tedy působí síla

$$F = F_2 + F_3 = -\frac{\alpha}{r^2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha r}\right) = \alpha u^2 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} u\right).$$

Binetův vzorec pak dává lineární diferenciální rovnici

$$u'' + u = \frac{1}{p_0} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} u\right),$$

kde

$$\frac{1}{p_0} = \frac{m\alpha}{L^2}.$$

Přesným řešením je pak kvazieliptická trajektorie

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\omega\phi)],$$

kde

$$\omega^2 = 1 - \frac{\beta}{\alpha p_0} \quad \text{a} \quad p = \omega^2 p_0 = p_0 - \frac{\beta}{\alpha}.$$

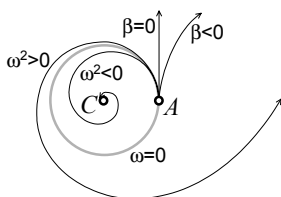
Vzhledem k předpokladu malé poruchy, bude $0 < \omega < 1$, trajektorie planety tedy nebude uzavřená, ale do perihelu se opět dostane, když bude azimut $\phi = 2\pi/\omega$. Stočení perihelu planety za jednu periodu je tedy rovno

$$\Delta\phi = \phi - 2\pi = 2\pi \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \approx \frac{\pi\beta}{\alpha p_0},$$

přitom poslední aproximace už platí jen pro malé poruchy. Z tohoto výsledku je možno správně soudit, že stáčení perihelu planety bude tím větší, čím silnější bude porucha a čím blíže bude planeta ke Slunci. To zároveň vysvětluje, proč je největší stáčení pozorováno právě u Merkuru.

Příklad 5.24 Popište pohyb tělesa v centrálním silovém poli popsaném přitažlivou silou

$$F = -\frac{\beta}{r^3}.$$



Různé trajektorie tělesa v poli $F = -\beta/r^3$.

Řešení: Binetův vzorec dává lineární diferenciální rovnici

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad \text{kde} \quad \omega^2 = 1 - \frac{m\beta}{L^2}$$

a $L = mr_0 v_0$ je moment hybnosti tělesa. Pro $\omega^2 > 0$ bude řešením harmonická funkce

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \omega\phi,$$

kde parametr r_0 představuje vzdálenost tělesa od centra pro nulový azimut. Na obrázku jde o vzdálenost $|AC|$. Těleso se tedy pohybuje po hyperbole podobné trajektorii, do nekonečna se vzdaluje pro azimut $\phi = \pm\pi/2\omega$, takže úhel mezi oběma asymptotami je $\theta = \pi/\omega$. Pro přitažlivé pole je $\omega < 1$ a tedy úhel $\theta > \pi$, zatímco pro odpudivé pole bude $\omega > 1$ a tedy úhel $\theta < \pi$. Pro $\omega^2 < 0$ však bude řešením hyperbolická funkce

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cosh \Omega\phi, \quad \text{kde} \quad \Omega^2 = \frac{m\beta}{L^2} - 1.$$

Trajektorií tělesa tedy v tomto případě bude spirála, která se rychle blíží centru C . Doba pádu na centrum bude konečná a bude rovna

$$T = \int_0^\infty \frac{mr^2}{L} d\phi = \frac{mr_0^2}{L} \int_0^\infty \frac{d\phi}{\cosh^2 \Omega\phi} = \frac{mr_0^2}{L\Omega}.$$

Speciálně pro případ $\omega = 0$, kdy nastává rovnováha mezi odstředivými a přitažlivými silami, bude trajektorií tělesa kružnice $r = r_0$. Pro nulovou sílu $\beta = 0$ bude $\omega = 1$, takže trajektorií tělesa bude v tom případě přímka $r = r_0 / \cos \phi$.

5.6.5 Pohyb v poli odpudivé coulombovské síly

V případě, že se těleso pohybuje v poli odpudivé coulombovské síly, nebude trajektorie částice nikdy uzavřená. Dráhou částice bude jedno rameno hyperboly, jak za chvíli ukážeme. Předpokládejme částici s nábojem q , která nalétává z velké vzdálenosti na částici se souhlasným nábojem Q tak, že její záměrná vzdálenost je b . Záměrnou vzdáleností se rozumí vzdálenost, ve které by se částice minuly, kdyby nebylo elektrického odpuzování. Předpokládejme dále odpudivou coulombovskou sílu

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2},$$

která působí na pohyblivý náboj q . Binetův vzorec dává

$$u'' + u = -\frac{1}{p}, \quad \text{kde} \quad \frac{1}{p} = \frac{m}{L^2} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}.$$

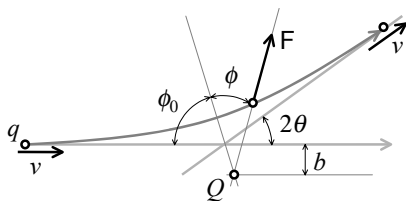
Moment hybnosti částice se zachovává a pro jeho velikost platí

$$L = mvr_{\perp} = mvb,$$

kde v je rychlost částice v nekonečnu před rozptylem. Řešením diferenciální rovnice dostaneme

$$\frac{1}{r} = u = \frac{1}{p} (e \cos \phi - 1),$$

což je pro $e > 1$ rovnice hyperboly.



Ilustrace k odvození rozptylového úhlu 2θ při rozptylu částice q v odpudivém Coulombovském poli náboje Q . Záměrnou vzdálenost označuje písmeno b .

Z řešení plyne, že náboj q je nejbližší náboji Q v místě o souřadnicích $\phi = 0$, $r = r_0 = p / (e - 1)$. Naopak nejdále bude v nekonečnu, pak je $r \rightarrow \infty$ a $\phi \rightarrow \pm\phi_0$, kde

$$\cos \phi_0 = 1/e.$$

Úhel $2\phi_0$ určuje úhel mezi asymptotami hyperboly. Částice se tedy nejprve přibližuje a pak zase vzdaluje po jednom rameni hyperboly. Výsledný odklon částice po rozptylu je dán úhlem

$$2\theta = \pi - 2\phi_0.$$

Pro další potřeby musíme ještě najít vztah mezi středovou vzdáleností b a parametry hyperboly p, ϕ_0 . Tu najdeme nejnadhěji analýzou asymptoty. Asymptota je přímka, která aproximuje hyperbolu pro velká r , tedy pro $\phi \approx \phi_0$. Nahradíme $\phi = \phi_0 - \delta$, kde δ je malé. Z rovnice hyperboly dostaneme rovnici asymptoty

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} [(e \cos(\phi_0 - \delta) - 1)] \approx \frac{1}{p} e \sin \phi_0 \sin \delta,$$

když zanedbáme člen $\cos \delta - 1 \approx -\frac{1}{2}\delta^2$, který je mnohem menší než ponechaný člen $\sin \delta$. Rovnice asymptoty, kterou jsme obdrželi, je skutečně rovnicí přímky, pokud necháme běžet úhel δ od 0 do π . Nejmenší vzdálenost $r = b$ přímky od počátku souřadnic Q dostaneme pro $\delta = \frac{1}{2}\pi$, takže záměrná vzdálenost je rovna

$$b = \frac{p}{e \sin \phi_0} = p \frac{\cos \phi_0}{\sin \phi_0} = p \cotg \phi_0.$$

Nyní už snadno najdeme rozptylový úhel

$$\operatorname{tg} \theta = \cotg \phi_0 = \frac{b}{p} = \frac{1}{mv^2 b} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}. \quad (5.17)$$

Vzorec (5.17) sehrál velmi důležitou roli v historii fyziky. Popisuje totiž správně rozptyl kladně nabitých částic alfa na jádrech atomů. Tento pokus provedl roku 1911 ERNEST RUTHERFORD, zlatou fólii ostřeloval částicemi alfa a pozoroval nečekaně velké rozptylové úhly. Protože úhel θ je nepřímě úměrný záměrné vzdálenosti b , dal se experiment vysvětlit jen předpokladem, že atomy obsahují malé a těžké kladné jádro. Velikost tohoto jádra přitom musí být asi 10^5 krát menší než samotný atom!

Velikost rozptylového úhlu 2θ je možno odvodit i jiným způsobem bez použití Binetova vzorce. Tento postup se objevuje v učebnicích také častěji. Především si musíme uvědomit, že rychlost v částice bude v nekonečnu před nebo po rozptylu stejná. Plyne to přirozeně ze zákona zachování energie. Působením odpudivé síly se pouze změní směr pohybu a celková hybnost částice o

$$\Delta p = 2mv \sin \theta, \quad (5.18)$$

kde 2θ je rozptylový úhel. Zároveň je změna hybnosti rovna celkovému silovému impulzu

$$\Delta \mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt.$$

Síla \mathbf{F} směřuje od náboje Q a svírá tedy se směrem vektoru $\Delta \mathbf{p}$ úhel ϕ , takže

$$\Delta p = |\Delta \mathbf{p}| = \int F \cos \phi dt.$$

S využitím zákona zachování momentu hybnosti $L = mr^2 d\phi/dt$ je možno integraci přes čas nahradit integrací přes azimut ϕ , platí tedy

$$\Delta p = \int F \cos \phi \frac{mr^2}{L} d\phi.$$

Po dosažení za coulombovskou sílu máme

$$\Delta p = \frac{m}{L} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta} \cos \phi d\phi = 2 \frac{m}{L} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta. \quad (5.19)$$

Porovnáním vzorců (5.18) a (5.19) dostaneme hledanou rovnici pro velikost rozptylu

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{vL} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{mv^2 b} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}.$$

Z něj plyne, že rozptyl je nepřímo úměrný jak záměrné vzdálenosti b , tak energii částice mv^2 .

5.7 Práce, energie, zákon zachování energie

5.7.1 Zlaté pravidlo mechaniky

Tisícileté zkušenosti mechaniků s jednoduchými stavebními stroji a válečnými mechanismy vedly k poznatku, že součin síly a dráhy, po níž síla působí, je na obou koncích mechanismu stejný. Důmyslný mechanismus může sílu mnohokrát znásobit, ale vždy jen za cenu zpomalení pohybu. Tento poznatek, jak již víme, antičtí učenci zobecnili ve **zlaté pravidlo mechaniky**: *Co se ušetří na síle, musí se přidat na dráze*. V moderním označení můžeme toto pravidlo vyjádřit jako rovnost dvou veličin

$$F_1 s_1 = F_2 s_2,$$

kde součin $F_1 s_1$ představuje míru úsilí, které jsme na jednom konci mechanismu vynaložili, abychom ji na druhém konci jako $F_2 s_2$ obdrželi nazpět. Mechanismus tedy přenesl veličinu $A = Fs$ beze změny, a proto má smysl ji blíže studovat.

5.7.2 Mechanická práce

Dráhový účinek síly, tj. součin síly a dráhy, po níž síla působila, představuje fyzikální veličinu, která se nazývá **mechanická práce** nebo jen **práce**. Značíme ji nejčastěji symbolem A (z německého *Arbeit*) nebo W (z anglického *work*). Práci tedy spočteme podle vzorce

$$A = Fs.$$

Základní jednotkou mechanické práce je **joule**, značíme jej zkratkou J . Dalšími používanými jednotkami práce (a energie) jsou v atomové fyzice elektronvolt eV a v silnoproudé elektrotechnice kilowatthodina kWh . Občas se můžeme setkat se starými jednotkami energie jako jsou **erg**, což je jednotka energie v CGS soustavě, takže platí

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ g cm}^2 / \text{s}^2 = 10^{-7} \text{ J},$$

nebo kalorie pro teplo nebo kilogram trinitrotoluenu pro energii uvolněnou při výbuchu trhavin. **Elektronvolt** je energie, kterou má elektron urychlený potenciálem 1 V. **Kilowatthodina** je energie, kterou spálí elektrospotřebič při odběru 1 kW za jednu hodinu. **Kalorie** je množství tepla nutné k ohřevu 1 g vody o 1 °C.

Jednotky práce a energie

$$1 \text{ eV} \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ kWh} = 3.6 \text{ MJ}$$

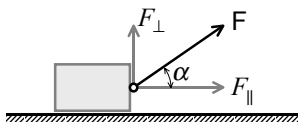
$$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4.1868 \text{ J}$$

$$1 \text{ kg TNT} \approx 4.2 \text{ MJ}$$

$$1 \text{ lb ft} \approx 1.356 \text{ J}$$

Rozměr jednotky momentu síly Nm je stejný jako rozměr jednotky joule J. Přesto jednotku joule používáme jen pro práci a energii, zatímco pro moment síly se užívá Nm.



Práci koná jen podélná složka síly $F_{\parallel} = F \cos \alpha$.

V případě, že směr síly nesouhlasí se směrem pohybu a síla F s ním svírá úhel α , koná práci jen složka síly ve směru pohybu $F_{\parallel} = F \cos \alpha$, takže

$$A = F_{\parallel} s = F s \cos \alpha.$$

Složka síly kolmá k pohybu $F_{\perp} = F \sin \alpha$ mění pouze směr pohybu tělesa, ale práci nekoná. Vykonaná práce je tedy obecně menší než součin Fs , může být někdy nulová nebo dokonce i záporná. To nastává tehdy, když se těleso pohybuje proti působící síle. Práci je pak možno stručně zapsat pomocí skalárního součinu

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}.$$

Pokud se síla či její směr vůči rychlosti pohybu mění, dostaneme celkovou práci A jako součet příspěvků elementárních prací

$$\Delta A_k = \mathbf{F}_k \cdot \Delta \mathbf{s}_k$$

na úsecích $\Delta \mathbf{s}_k$, kde se síla \mathbf{F}_k nemění. Platí tedy

$$A = \mathbf{F}_1 \cdot \Delta \mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \Delta \mathbf{s}_2 + \mathbf{F}_3 \cdot \Delta \mathbf{s}_3 + \dots = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \Delta \mathbf{s}_k.$$

V případě spojité změny síly musíme integrovat po celé dráze. Tak dospějeme k nejobecnějšímu vyjádření práce, kterou vykoná síla \mathbf{F} při přemístování tělesa po křivce \mathcal{K} :

$$A = \lim_{\Delta s_k \rightarrow 0} \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \Delta \mathbf{s}_k = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int F \cos \alpha ds.$$

Definice mechanické práce tedy zní:

Práce je integrál síly podél dráhy.

5.7.3 Práce v každodenním životě

Všimněte si, že pokud síla tělesem nepohybuje nebo jím síla pohybuje jen ve směru kolmém na své působení, pak taková síla žádnou mechanickou práci nekoná. Například horizontální přemístění hromady písku nebo hromady cihel nepředstavuje žádnou mechanickou práci. Podobně, když podržíte stokilovou činku půl hodiny nad hlavou, pak mechanická práce, kterou tím vykonáte, je rovněž rovna nule. Přesto nikdo nepochybuje, že se vaše tělo rádně zapotí a že přitom spálíte mnoho energie, kterou pak musíte kaloricky vydatnou stravou doplnit. Mechanická práce je tedy jen velmi hrubým přiblížením pojmu práce, jak mu rozumíme z každodenního života, proto musíme být při užívání exaktně definovaného fyzikálního pojmu mechanická práce velmi opatrní.

Příklad 5.25 Spočítejte práci, kterou musí vykonat dělník při zvedání nákladu o hmotnosti m do výše h za pomoci pevné kladky.

Řešení: Dělník musí působit stálou silou $F = mg$, takže vykoná práci $A = Fh = mgh$.

Příklad 5.26 Těleso na provázku krouží kolem pevného bodu. Spočítejte práci přitažlivé síly provázku.

Řešení: Provázek působí na těleso silou, která je stále kolmá na směr pohybu, takže práce síly je rovna nule.

Příklad 5.27 Spočítejte práci, kterou je nutno vykonat při přemístění tělesa o hmotnosti m po nakloněné rovině délky l a sklonu α , když součinitel tření je f . Uvažujte pohyb nahoru i dolů.

Řešení: Při pohybu nahoru musíme působit silou $F_1 = mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ ve směru pohybu, takže práce je rovna

$$A_1 = mgl(f \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Podobně při pohybu dolů musíme vykonat práci

$$A_2 = mgl(f \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Součet obou prací je v důsledku tření nenulový a platí $A = A_1 + A_2 = 2mgfl \cos \alpha$.

Příklad 5.28 Spočítejte práci stálé síly \mathbf{F} , která změnila rychlost tělesa z \mathbf{v}_1 na \mathbf{v}_2 .

Řešení: Těleso se pohybuje rovnoměrně zrychleně, takže za dobu t se těleso přemístí o

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)t.$$

Stálá síla tudíž vykoná práci

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2}\mathbf{F}t \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

Současně z první věty impulzové platí

$$\mathbf{F}t = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1),$$

a tedy hledaná práce je rovna

$$A = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (5.20)$$

Práce tedy nezávisí ani na velikosti síly, ani na směrech rychlostí, ale pouze na rozdílu konečné a počáteční kinetické energie tělesa. Speciálně také pro $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$ vyjde práce brzdící síly rovna nule, protože dráha tělesa je v tomto případě rovna nule. Nejprve totiž síla \mathbf{F} těleso brzdí, tj. odebírá práci, a pak těleso urychluje, takže stejně velkou práci odevzdá tělesu zpět.

POZNÁMKA: Stejný výsledek (5.20) platí i pro sílu, která mění svoji velikost nebo směr. Pokud by se totiž síla během konání práce měnila, mohli bychom její působení rozdělit na příslušné menší úseky, v nichž se síla nemění. Pro každý elementární úsek by pro vykonanou

práci platilo (5.20) a sečtením všech elementárních prací bychom dostali skutečně výsledek, že celková práce je dána pouze rozdílem konečné a počáteční kinetické energie, neboť všechny přechodné hodnoty kinetické energie by se při skládání vzájemně odečetly.

5.7.4 Výkon

Větší dopravník přemístí hromadu uhlí za kratší dobu než menší dopravník. Říkáme, že je výkonnější nebo že má větší výkon. Vykona totíž stejnou práci za kratší čas nebo více práce za stejný čas. Podíl práce ΔA vykonané strojem za dobu Δt definuje **průměrný výkon**

$$\bar{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Podobně definujeme i **okamžitý výkon** stroje

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt},$$

který je dán derivací práce podle času. Okamžitý výkon udává rychlost, s jakou přibývá vykonané práce.

Výkon síly závisí na rychlosti, se kterou síla \mathbf{F} přemísťuje objekt, neboť platí

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_{\parallel} v = F v \cos \alpha.$$

Normálová síla F_{\perp} , tj. síla kolmá ke směru pohybu a směru rychlosti, nekoná práci a má tedy nulový výkon. Práci koná jen tečná složka síly F_{\parallel} .

Vedle **potenciálových sil**, u nichž práce nezávisí na volbě dráhy, ale jen na poloze počátečního a konečného bodu, definujeme dále **gyroskopické síly**, což jsou síly kolmé k rychlosti tělesa, a mají proto nulový výkon $P = 0$. **Disipativní síly** jsou pak síly, které jsou stále orientované opačně vzhledem k rychlosti tělesa, a mají proto vždy záporný výkon $P \leq 0$.

Známe-li výkon síly, spočteme práci ΔA , kterou síla vykoná, jako součin výkonu a času

$$\Delta A = P \Delta t.$$

Jestliže se výkon průběžně mění, musíme výkon integrovat, a pak dostaneme

$$A = \int_0^t P(t) dt.$$

Výkon měříme v jednotkách zvaných **watt**, zkratkou W. Nejstarší jednotkou výkonu je anglický kůň (**horse power**) 1 hp ≈ 745.7 W, který definoval už JAMES PRESCOTT JOULE podle průměrného výkonu svých pivovarských koní a který činil 550 lb ft / s. U nás se dlouho používala příbuzná jednotka výkonu **kůň**, definovaná

jako $75 \text{ kp m/s} \approx 735.498 \text{ W}$ a později byla z praktických důvodů zaokrouhlena na přesnou hodnotu $1 \text{ k} = 735.5 \text{ W}$.

Běžná elektrická žárovka má příkon 100 W , dnes ji stále častěji nahrazuje zářivka o stejné svítivosti, ale pětinném elektrickém příkonu 20 W . Výkon spalovacího motoru automobilu je 50 až 150 kW . Výkon lokomotivy je 1 až 4 MW , nadzvukového letadla 5 MW a ledoborce je 60 MW . Výkon velké elektrárny se pohybuje v intervalu 1 až 4 GW . Výkon raketového nosiče Saturn V byl asi 100 GW , výkon blesku 10^{15} W , výkon pulzního laseru 10^{16} W a výkon Slunce 10^{37} W .

Průměrný mechanický výkon člověka je kolem 50 W , krátkodobě však může stoupnout až na 1000 W ! Energetická spotřeba lidského těla v klidu (tzv. bazální spotřeba) je asi 75 W a jen samotná spotřeba mozku je 10 W ! Výkon letící mouchy je 0.3 mW , zato výkon plovoucí velryby je kolem 400 kW .

Jednotky výkonu

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ lb ft/s} \approx 745.7 \text{ W} \quad 1 \text{ k} = 735.5 \text{ W}.$$

Příklad 5.29 Určete práci a výkon prachové nálože v patroně pistole, která vystřelí projektil o hmotnosti $m \approx 50 \text{ g}$ rychlostí $v \approx 200 \text{ m/s}$ během doby $\Delta t \approx 1 \text{ ms}$.

Řešení: Práce nálože je přibližně rovna kinetické energii střely

$$A = E = \frac{1}{2}mv^2 \approx 2000 \text{ J}$$

a výkon

$$P = \frac{A}{\Delta t} \approx 2 \text{ MW}.$$

Výkon při výstřelu pistole je tedy srovnatelný s výkonem menší elektrárny!

Příklad 5.30 Určete výkon motoru automobilu, který musí překonávat odpor vzduchu.

Řešení: Výkon motoru je dán silou odporu odporu vzduchu, která závisí na rychlosti automobilu, takže platí

$$P = F_x v = \frac{1}{2}c_x \rho S v^3.$$

Pro typický automobil je $c_x \approx 0.5$, $S \approx 2 \text{ m}^2$, $\rho \approx 1.3 \text{ kg/m}^3$ a pro rychlost $v = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}$, dostaneme $P \approx 81 \text{ kW}$. Pro třetinovou rychlost $v = 60 \text{ km/h}$ by byl potřebný výkon motoru jen 3 kW , tj. $27\times$ menší.

Příklad 5.31 Odhadněte výkon cyklisty z odporu vzduchu.

Řešení: Při jízdě na kole je hlavní část výkonu cyklisty spotřebována k překonání odporu vzduchu. Výkon cyklisty závisí silně na jeho rychlosti v a platí

$$P = F_x v = \frac{1}{2}c_x \rho S v^3,$$

kde $c_x \approx 1$, $S \approx 0.5 \text{ m}^2$ a $\rho \approx 1.3 \text{ kg/m}^3$. Pro střední rychlost $v = 18 \text{ km/h}$, tj. 5 m/s , dostaneme výkon $P \approx 40 \text{ W}$. Pro dvojnásobnou rychlost $v = 36 \text{ km/h}$, tj. 10 m/s je už potřebný výkon 300 W !

Příklad 5.32 Odhadněte průměrnou rychlost stoupaní člověka do táhlého kopce.

Řešení: Výkon potřebný ke stoupaní do kopce je zřejmě $P = Gv_y = mgv_y$, kde v_y je vertikální složka rychlosti. Odtud dostaneme $v_y = P/mg$. Pro průměrný výkon turisty $P \approx 50 \text{ W}$ a hmotnost 70 kg dostaneme rychlost stoupaní $v_y \approx 7 \text{ cm/s}$, tj. 252 m/h . Při větší rychlosti se turista rychle unaví a musí často dělat přestávky.

5.7.5 Kinetická energie

Zkoumejme práci, kterou musí vykonat stálá síla \mathbf{F} při urychlení tělesa z rychlosti \mathbf{v}_1 na rychlost \mathbf{v}_2 . Jednoduchý výpočet (viz řešená úloha 5.28 v kapitole věnované práci) vede k výsledku

$$A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Práce tedy závisí jen na počátečním a konečném pohybovém stavu tělesa. To lze interpretovat i tak, že práce A vykonaná na tělese zvětšuje jeho energii T_1 na T_2 , kde veličina

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

se nazývá **pohybová** nebo **kinetická energie**. Název této energie je zřejmý ze skutečnosti, že kinetická energie tělesa v klidu je nulová. Čím větší je rychlost tělesa, tím větší má kinetickou energii. **Kinetická energie je mírou pohybu tělesa.**

Stejný výsledek bychom dostali i pro obecnou, tj. proměnlivou sílu. Uvažujme těleso o hmotnosti m a vykonáme na něm pomocí síly \mathbf{F} práci

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Když sílu nahradíme zrychlením podle pohybového zákona $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, dostaneme

$$A = \int_1^2 m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{v_1}^{v_2} m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \int_{v_1}^{v_2} mv dv.$$

Poslední výraz už závisí jen na velikosti rychlosti, takže jej můžeme elementárně zintegrovat a dostaneme

$$A = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1,$$

kde T představuje opět **kinetickou energii** tělesa o hmotnosti m a rychlosti v .

Vnější síla \mathbf{F} tedy může vykonat práci A a urychlit těleso z rychlosti v_1 na v_2 , takže platí $T_2 = T_1 + A$. Platí ale také opak, těleso může být zbrzděno z rychlosti v_2 na v_3 a odevzdat část své energie jako práci A' jinému tělesu. V tom případě působí těleso m podle zákona akce a reakce silou $\mathbf{F}' = -\mathbf{F} = -m\mathbf{a}$, takže tělesem vykonaná práce je

$$A' = \int_2^3 \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{s} = -(T_3 - T_2).$$

Platí tedy $T_3 = T_2 - A'$. Srovnáme-li počáteční a konečnou energii, dostaneme

$$T_3 = T_1 + A - A'.$$

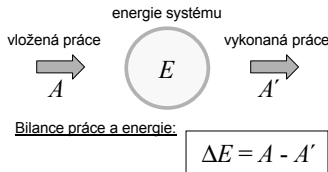
Obecně platí, že práce A vykonaná na tělese zvětšuje jeho energii a přivádí ho do stavu, ve kterém může konat práci A' . Totéž platí pro všechny druhy energie, nejen pro energii kinetickou. Stručně pak říkáme, že

energie je práce vložená do tělesa

nebo že

energie je schopnost tělesa konat práci.

Prakticky jde o ty nejobecnější možné **definice energie**. Energii obecně značíme obvykle písmenem E a měříme ji ve stejných jednotkách jako práci, tedy v **joulech J**. V mechanice rozlišujeme **energie kinetickou**, tj. pohybovou, tu značíme písmenem T nebo E_k a **energie potenciální**, tj. polohovou, která se značí U nebo E_p . Kinetickou energii se rozumí ta část energie tělesa, která závisí jen na rychlosti tělesa a přitom nezávisí na poloze tělesa. Podobně potenciální energií se rozumí ta část energie tělesa, která nezávisí na rychlosti tělesa, ale závisí na poloze tělesa. Obvykle je možno rozdělit celkovou energii tělesa na obě tyto části, ale obecně to vždy jít nemusí.



Názorný diagram znázorňující bilanci práce a energie v obecném fyzikálním systému.

5.7.6 Konzervativní silové pole

V okolí některých těles pozorujeme **silová pole**. Tak nazýváme prostor, kde na částici působí v každém bodě síla, která je funkcí souřadnic a času. Názorným příkladem může být zemské tíhové pole, kde síla $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ působící na částici o hmotnosti m je v čase i prostoru stálá. Silové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z),$$

keré nezávisí na čase, nazýváme **statickým polem**. Každému poli je možno přiřadit silokřivky, tj. orientované čáry, které mají v každém bodě X tečnu ve směru síly $\mathbf{F}(X)$. Protože takto má silokřivka v každém bodě jedinou tečnu, je zřejmé, že silokřivky se nemohou navzájem protínat. Rovnice definující soustavu silokřivek příslušného pole má z definice tvar $d\mathbf{r}/d\lambda = \mathbf{F}$, kde λ je parametr silokřivky. Vyloučením parametru λ dostaneme jiný často používaný tvar rovnic silokřivek

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}.$$

Podle tvaru silokřivek rozlišujeme například silové pole homogenní nebo radiální (centrální).

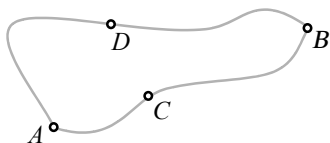
Obecně je práce silového pole při přemístění tělesa po křivce \widetilde{AB} rovna integrálu

$$W = \int_{\widetilde{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (5.21)$$

který závisí nejen na koncových bodech A a B , ale i na celém průběhu křivky \widetilde{AB} . V takovém poli proto není možno definovat potenciální energii. Pokud je však práce silového pole při přemístění tělesa po libovolné uzavřené křivce rovná nule, tj. platí pro všechny integrační cesty

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (5.22)$$

pak práce W pole závisí pouze na krajních bodech A a B integrační cesty \widetilde{AB} . V takovém poli pak lze nadefinovat potenciální energii a zkonstruovat zákon zachování energie. Proto se pole splňující podmínku (5.22) nazývá **konzervativní pole** nebo **potenciálové pole**. Někdy se konzervativní pole označuje i termínem **nevírové pole**, protože podmínka (5.22) současně zajišťuje, že silokřivky se nemohou do sebe uzavírat a nemohou tedy tvořit víry. Pomocí Stokesovy věty může být podmínka konzervativnosti (5.22) přepsána i do diferenciálního tvaru $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, kde ∇ značí operátor nabra. Této diferenciální podmínky obvykle využíváme při rychlém důkazu konzervativnosti pole.



Ilustrace k výpočtu práce konzervativního silového pole.

Nejprve ukážeme, že pokud je silové pole \mathbf{F} konzervativní, pak práce (5.21) tohoto pole nezávisí na trajektorii, ale pouze na počátečním A a koncovém bodě B integrační dráhy \widetilde{AB} . Mějme dva body A a B a ty spojíme dvěma obecnými křivkami \widetilde{ACB} a \widetilde{ADB} . Budeme-li nyní přemísťovat těleso po uzavřené křivce \widetilde{ACBDA} , bude z definice konzervativního pole celková práce rovna nule

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\widetilde{ACB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\widetilde{BDA}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Pokud změníme orientaci křivky \widetilde{BDA} na \widetilde{ADB} , změní křivkový integrál znaménko, proto z poslední rovnice plyne

$$W = \int_{\widetilde{ACB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\widetilde{BDA}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\widetilde{ADB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

A protože integrační cesty i body C a D byly voleny zcela libovolně, dokázali jsme, že práce W pole při přemístění tělesa z bodu A do bodu B je nezávislá na integrační cestě. Můžeme proto psát

$$W = W(A, B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Příklad 5.33 Určete práci, kterou vykoná silové pole $\mathbf{F} = (y, -x)$ při přemístění tělesa z bodu $A = [0, 0]$ do bodu $B = [1, 1]$ po parabole $y = x^2$, po parabole $x = y^2$ a po přímce $y = x$.

Řešení: Práce pole po první parabole je

$$A_1 = \int y dx - x dy = \int_0^1 x^2 dx - 2x^2 dx = -\frac{1}{3},$$

práce pole po druhé parabole vyjde

$$A_2 = \int y dx - x dy = \int_0^1 2y^2 dy - y^2 dy = \frac{1}{3},$$

konečně práce pole po přímce je

$$A_3 = \int y dx - x dy = \int_0^1 x dx - x dx = 0.$$

Protože $A_1 \neq A_2 \neq A_3$, je zřejmé, že nejde o potenciálové silové pole. Také není splněna podmínka potenciálovosti pole, neboť

$$(\nabla \times \mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = -2 \neq 0.$$

Příklad 5.34 Dokažte, že homogenní silové pole a centrální pole jsou konzervativní.

Řešení: Pro homogenní silové pole $\mathbf{F} = \text{konst}$ zřejmě platí $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Pro centrální pole $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$ je rovněž $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, protože

$$\nabla \times (f\mathbf{r}) = f\nabla \times \mathbf{r} + \nabla f \times \mathbf{r} = \nabla f \times \mathbf{r} \quad \text{a} \quad \nabla f = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Obě pole jsou tedy konzervativními poli.

Příklad 5.35 Najděte silokřivky homogenního pole $\mathbf{F} = \text{konst}$ a radiálního pole $\mathbf{F} = f\mathbf{r}$.

Řešení: Rovnice silokřivek homogenního pole dostaneme z rovnice $d\mathbf{r}/d\lambda = \mathbf{F}$, jde tedy o rovnoběžné přímky $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{F}\lambda$. Podobně rovnice silokřivek radiálního pole dostaneme z rovnice $d\mathbf{r}/d\lambda = f\mathbf{r}$, jde tedy o radiální přímky $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \exp(\int f d\lambda) = \mu \mathbf{r}_0$ procházející počátkem. Zde μ značí nový parametr silokřivek.

Příklad 5.36 Najděte silokřivky pole $\mathbf{F} = (y, -x)$.

Řešení: Rovnice silokřivek jsou

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \quad \text{odtud} \quad -x dx = y dy$$

a integrací dostaneme soustavu soustředných kružnic $x^2 + y^2 = a^2$ orientovaných ve směru hodinových ručiček.

5.7.7 Potenciální energie

Nyní ukážeme, že v konzervativním poli lze definovat **potenciální energii** U tak, že platí $W(A, B) = U(A) - U(B)$. Uvažujme opět práci pole při přemístění tělesa z bodu A do B . Zavedme ještě pomocný pevný bod P . V konzervativním poli zřejmě platí pro libovolnou trojici bodů rovnice $W(A, B) + W(B, P) + W(P, A) = 0$. Odtud vzhledem k tomu, že $W(A, P) = -W(P, A)$, platí také

$$W(A, B) = W(A, P) - W(B, P).$$

Zavedeme-li zde nové značení $U(X) = W(X, P)$, v němž závislost na referenčním bodě P již explicitně neuvádíme, můžeme psát

$$W(A, B) = U(A) - U(B), \quad (5.23)$$

a to jsme chtěli dokázat. Tímto předpisem je fakticky definována potenciální energie U . Volbou jiného referenčního bodu Q místo P bychom dostali jinou potenciální energii, která by se od té naší lišila jen o aditivní konstantu $W(P, Q)$. Říkáme proto, že potenciální energie je jednoznačně definována až na aditivní konstantu. Dokázali jsme tedy, že v konzervativním poli je možno definovat potenciální energii $U(X)$, která je pouze funkcí polohy X tělesa.

Chápeme-li bod A jako počáteční polohu a bod B jako konečnou polohu tělesa, pak platí

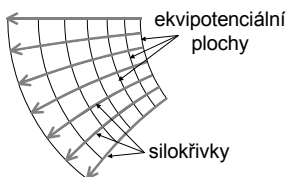
$$W = U(A) - U(B) = -\Delta U,$$

a je proto možno tvrdit, že práce pole snižuje potenciální energii tělesa. Pokud bychom chtěli tělesem v silovém poli volně pohybovat, museli bychom na něj zřejmě působit vnější silou $\mathbf{F}^e = -\mathbf{F}$, která by právě kompenzovala sílu pole. Práce $A = \int_A^B \mathbf{F}^e \cdot d\mathbf{s}$, kterou vykoná vnější síla při pomalém přemístění zkušební tělesa z bodu A do bodu B , je proto až na znaménko totožná s prací $W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ silového pole. Platí tedy $A = -W = \Delta U$, což je ale možno interpretovat tak, že práce A vnějších sil zvyšuje potenciální energii tělesa z počáteční hodnoty $U(A)$ na konečnou hodnotu $U(B)$, takže veličinu U můžeme v souladu s obecnou definicí energie skutečně nazývat energií.

Všechny body prostoru, na nichž je stejná hodnota potenciální energie

$$U(\mathbf{r}) = \text{konst},$$

tvoří **ekvipotenciální plochu**. Těleso tedy můžeme po ekvipotenciální ploše přemísťovat bez nutnosti konat práci. Protože při infinitezimálním posunu $d\mathbf{r}$ tělesa po ekvipotenciální ploše platí $dU = 0$ a obecně je $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, musí být síla pole \mathbf{F} vždy kolmá na elementární posun $d\mathbf{r}$ a tedy i na ekvipotenciální plochu. Siločáry a ekvipotenciální plochy se proto vždy protínají navzájem kolmo.



Ekvipotenciální plochy a siločáry nehomogenního konzervativního silového pole. Všimněte si, že siločáry protínají ekvipotenciální plochy vždy kolmo.

Jak síla tak potenciální energie prakticky rovnocenně popisují konkrétní silové pole. Potenciální energie je však skalární veličinou a má tedy jedinou složku, takže se s ní pracuje mnohem pohodlněji než se silovým polem. Především proto jí dáváme při praktických výpočtech přednost.

Zdůrazněme na závěr, že potenciální energii je možno definovat pouze u konzervativních polí. Naštěstí, většina silových polí, se kterými se ve fyzice setkáme, konzervativní jsou. Příkladem je gravitační pole nehybných těles nebo elektrické pole nehybných nábojů. Ale například pro síly tření je již podmínka konzervativnosti porušena, protože síla tření \mathbf{T} směřuje vždy proti pohybu \mathbf{v} a platí

$$\oint \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dt < 0.$$

Síly tření proto nejsou konzervativními silami a nelze je popisovat potenciální energií. Rovněž nestacionární silová pole jsou obvykle nekonzervativní.

Nejednoznačnost potenciální energie

Potenciální energie je definována předpisem (5.23), není tedy definovaná jednoznačně. K potenciální energii můžeme přičíst libovolnou konstantu a všechny vzorce, v nichž potenciální energie vystupuje, zůstanou nadále v platnosti. Často je vhodné definovat **referenční potenciální energii** na určité **referenční hladině**, teprve tím bude potenciální energie určena jednoznačně. V praxi je například vhodné požadovat, aby potenciální energie byla nulová na povrchu země. Podobně se to dělá i v elektrotechnice, kde se elektrický potenciál uzemnění bere roven nule. V případě teoretických polí se zase obvykle požaduje, aby byla potenciální energie rovna nule v nekonečnu, tj. nekonečně daleko ode všech zdrojů silového pole.

Homogenní tíhového pole

Nejznámějším příkladem konzervativního pole je **homogenní tíhové pole**. V něm působí na hmotný bod stálá tíha $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, proto se práce pole vykonaná při přemístění hmotného bodu z bodu A do bodu B spočte jako integrál

$$W = \int_A^B m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}.$$

Zavedeme-li souřadnou soustavu s osou z orientovanou svisle vzhůru, pak má tíha složky $\mathbf{G} = (0, 0, -mg)$ a práce je tudíž rovna

$$W = \int_A^B -mg dz = mgz_A - mgz_B = U_A - U_B$$

v souladu s předpisem (5.23). Dokázali jsme tedy, že práce pole závisí jen na poloze počátečního a koncového bodu. Homogenní tíhové pole je tedy polem potenciálním a jeho potenciální energie

$$U = mgz$$

závisí jen na souřadnici z . Touto volbou vybíráme horizontální rovinu $z = 0$ za hladinu nulové potenciální energie. Ekvipotenciálními plochami homogenního tíhového pole jsou horizontální roviny $z = \text{konst}$ a silokřivkami jsou zřejmě rovnoběžné vertikály.

Potenciální energie sil pružnosti

S potenciální energií se můžeme setkat i u pružných těles, jejich protažení nebo stlačení vyžaduje vykonat práci, která může být později využita, například u autíčka na péro nebo u mechanických hodin. Spočtíme proto potenciální energii pružiny o tuhosti k . Při natahování pružiny vzniká vratná síla pružiny $F = -ky$, která se snaží vrátit pružinu do původního stavu. Zde y značí protažení pružiny z rovnovážné polohy. Práce sil pružiny při jejím protažení z polohy A do polohy B je rovna

$$W = \int_A^B -ky dy = \frac{1}{2}ky_A^2 - \frac{1}{2}ky_B^2.$$

Můžeme tedy v souladu s předpisem (5.23) konzervativním silám pružnosti přiřadit potenciální energii

$$U = \frac{1}{2}ky^2,$$

pokud potenciální energii nenatažené pružiny bereme za nulovou $U = 0$.

Coulombovské pole

Gravitační i elektrostatická síla klesá se vzdáleností podle **Coulombova zákona**

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^2}\mathbf{r}^0 = \frac{k}{r^3}\mathbf{r},$$

kde k je konstanta. Síla tedy klesá se čtvercem vzdálenosti od bodového zdroje pole a pole je centrální. Najdeme nyní potenciální energii coulombovského pole. Práce pole při přemístění zkušební tělesa z bodu A do bodu B je

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \frac{k}{r^3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \frac{k}{r^2}dr = \frac{k}{r_A} - \frac{k}{r_B},$$

neboť platí $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ a tedy také $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$. Dokázali jsme tedy, že coulombovské pole je potenciálové a jeho potenciální energie je zřejmě rovna

$$U(\mathbf{r}) = \frac{k}{r},$$

pokud požadujeme, aby potenciální energie pole byla v nekonečnu rovna nule. Ekvipotenciálními plochami coulombovského pole jsou soustředné sféry $r = \text{konst}$ se středem v počátku a silokřivkami přímky procházející počátkem.

5.7.8 Síla a gradient pole

Je-li zadáno konzervativní silové pole \mathbf{F} , najdeme jeho potenciální energii integrací síly podle vzorce

$$U(\mathbf{r}) = U_P - \int_P^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kde U_P značí potenciální energii na referenční hladině obsahující bod P . Obráceně, tj. z potenciální energie pole je zase možno najít příslušné silové pole derivováním. Hned si ukážeme jak. Podívejme se nejprve na elementární přírůstek potenciální energie. Při přemístění z místa \mathbf{r} do blízkého bodu $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ se potenciální energie částice změní o hodnotu

$$dU = U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}).$$

Z matematické analýzy je známo, že **úplný diferenciál** funkce U tří proměnných x, y, z se spočte pomocí parciálních derivací podle předpisu

$$dU(\mathbf{r}) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \nabla U \cdot d\mathbf{r}, \quad (5.24)$$

kde vektorový výraz

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

se nazývá gradient U a symbol ∇ **operátor nabra** nebo **Hamiltonův operátor**. Ze skalárního součinu (5.24) dále plyne

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r} = |\nabla U| dr \cos \alpha,$$

odkud je zřejmé, že funkce U roste nejvíce v tom směru, pro který bude $\cos \alpha = 1$, tedy právě ve směru gradientu ∇U . Gradient ∇U má tedy směr nejrychlejšího růstu funkce U , odtud vznikl i název gradientu, latinsky *gradiens* totiž značí *stoupající*.

Z druhé strany, práce pole $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ snižuje potenciální energii částice o dU , platí tedy

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.25)$$

Srovnáním obou vztahů (5.24) a (5.25) pro diferenciál dU , které platí pro libovolné elementární posunutí $d\mathbf{r}$, dostaneme již hledaný vzorec pro výpočet síly pole ze známé potenciální energie

$$\mathbf{F} = -\nabla U = - \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (5.26)$$

Síla pole má tedy směr i velikost maximálního spádu potenciální energie.

Příklad 5.37 Spočítejte silové pole, je-li zadána jeho potenciální energie

$$U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2).$$

Řešení: Provedeme parciální derivace naznačené ve vzorci (5.26), dostaneme

$$\mathbf{F} = -\nabla \left[\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \right] = (-kx, -ky, -kz) = -k(x, y, z) = -k\mathbf{r}.$$

Síla je radiální, roste se vzdáleností od počátku souřadnic $O = [0, 0, 0]$ a směřuje do bodu O .

Příklad 5.38 Spočítejte silové pole, je-li zadána jeho potenciální energie

$$U = \frac{k}{r} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Řešení: Spočteme nejprve

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = k \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = k \frac{x}{r^3},$$

podobně další složky síly, a proto

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^3} (x, y, z) = \frac{k}{r^3} \mathbf{r}.$$

Síla je radiální, míří směrem ven od počátku $O = (0, 0, 0)$ a klesá se čtvercem vzdálenosti r . Je to tedy coulombovské pole.

Příklad 5.39 Dokažte, že pro funkci $f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, platí identita

$$\nabla f = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Řešení: Najdeme nejprve složku x . Zřejmě je

$$\nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{x}{r},$$

podobně bychom dostali výrazy pro zbylé složky $\nabla_y f$ a $\nabla_z f$. Platí tedy skutečně dokazovaný vzorec. S jeho pomocí snadno najdeme silové pole pro potenciální energii $U = k/r$, dostaneme $\mathbf{F} = (k/r^2) (\mathbf{r}/r) = k\mathbf{r}/r^3$ apod.

Příklad 5.40 Najděte dipólové silové pole, které má potenciální energii $U = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/r^3$.

Řešení: Z definice dostaneme

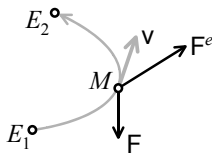
$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\nabla \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^3} \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right).$$

Protože $\nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$ a $\nabla (1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$, dostaneme hned výsledek

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - 3\mathbf{p}r^2}{r^5}.$$

5.7.9 Zákon zachování mechanické energie

Mezi mechanickou prací, kinetickou energií a potenciální energií je úzký vztah, který se nazývá zákon přeměny práce a energie. Můžeme jej stejně jako zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti odvodit z pohybového zákona.



Vlivem vnější síly \mathbf{F}^e se hmotný bod M v konzervativním silovém poli přesouvá a přitom vykonaná práce A je rovna přírůstku mechanické energie $E_2 - E_1$.

Uvažujme hmotný bod M v potenciálovém silovém poli, na který působí navíc vnější síla \mathbf{F}^e , jež je schopna konat práci. Pro pohyb hmotného bodu v silovém poli platí Newtonova pohybová rovnice

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^e + \mathbf{F}.$$

Spočtíme práci A , kterou vykoná vnější síla \mathbf{F}^e při přemístění tělesa z místa \mathbf{r}_1 do místa \mathbf{r}_2 . Dostaneme tak integrál

$$A = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}^e \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r}.$$

První člen na pravé straně rovnice je možno upravit do tvaru

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1,$$

a je tedy roven přírůstku kinetické energie. Podobně druhý člen

$$- \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = U_2 - U_1$$

je roven přírůstku potenciální energie tělesa, takže máme výsledek

$$A = T_2 - T_1 + U_2 - U_1,$$

který říká, že práce vykonaná vnější silou se přemění na přírůstek kinetické energie a potenciální energie tělesa. To je hledaný **zákon přeměny práce a energie**:

Přírůstek kinetické energie a potenciální energie tělesa se rovná práci vykonané vnějšími silami

$$A = \Delta T + \Delta U.$$

Součet kinetické a potenciální energie tělesa

$$E = T + U$$

se nazývá **mechanická energie**. Výše zmíněný zákon přeměny práce a energie je nyní možno zapsat ještě stručněji vzorcem $A = \Delta E = E_2 - E_1$, což znamená, že **přírůstek mechanické energie tělesa je roven vložené práci**. V případě, že na těleso nepůsobí žádná vnější síla, ale jen síla pole samotného, bude $\Delta E = 0$, takže mechanická energie tělesa zůstává konstantní $E = \text{konst}$ a platí **zákon zachování mechanické energie**:

Při pohybu v konzervativním poli (tj. bez vlivu tření a odporu prostředí) se mechanická energie tělesa nemění

$$E = T + U = \text{konst.}$$

Například pro těleso vržené v homogenním tíhovém poli platí zákon zachování energie ve tvaru

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{konst.}$$

To lze snadno ověřit dosazením například pro vrh svislý. V kinematice jsme dokázali, že pro vrh svislý platí

$$v = v_0 - gt \quad \text{a} \quad y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde v_0 je počáteční rychlost. Odtud po dosazení a úpravě dostaneme

$$E = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2 + mg\left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \text{konst.}$$

Mechanická energie E vrženého tělesa je po tedy celou dobu letu stálá a je rovna jeho počáteční kinetické energii $T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Podobně pro těleso kmitající na pružině o tuhosti k platí zákon zachování mechanické energie ve tvaru

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \text{konst.}$$

Příklad 5.41 Dokažte, že platí zákon zachování energie i pro šikmo vržené těleso v homogenním tíhovém poli.

Řešení: Z teorie šikmého vrhu víme, že pro polohu tělesa platí

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

a pro jeho rychlost

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Odtud kinetická energie vrženého tělesa je

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_0gt \sin \alpha + \frac{1}{2}mg^2t^2$$

a jeho potenciální energie je

$$U = mgy = mv_0gt \sin \alpha - \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

Takže celková mechanická energie tělesa je opravdu konstantní po celou dobu vrhu

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv_0^2 = \text{konst.}$$

Příklad 5.42 Do jaké výšky H vyletí kámen vržený svisle vzhůru rychlostí v ?

Řešení: Podle zákona zachování energie se počáteční kinetická energie přemění na potenciální energii a tedy platí

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH, \quad \text{odtud} \quad H = \frac{v^2}{2g}.$$

Příklad 5.43 Spočtete rychlost kvádra, který sklouzl z nakloněné roviny o výšce h .

Řešení: Podle zákona zachování energie platí $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, proto bude rychlost kvádra dole rovna

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Pokud započteme i vliv tření, bude zákon zachování energie obsahovat práci sil tření

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - Tl,$$

kde $T = fN = fmg \cos \alpha$ je síla tření a $l = h/\sin \alpha$ délka nakloněné roviny. Výsledná rychlost bude v tomto případě nižší

$$v = \sqrt{2gh(1 - f \cot \alpha)}.$$

Vzorec pochopitelně platí jen pro $\tan \alpha > f$, jinak se kvádr do pohybu vůbec nedá.

Příklad 5.44 Závaží na laně tvoří kyvadlo o délce $l = 5$ m. Závaží bylo vychýleno o úhel $\alpha = 90^\circ$ z rovnovážné polohy. Určete rychlost závaží při jeho průchodu rovnovážnou polohou.

Řešení: Podle zákona zachování energie platí $\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos \alpha)$, proto bude rychlost závaží rovna

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \approx 10 \text{ m/s}.$$

Příklad 5.45 Z věže hradu vysoké $h = 60$ m byla vypálena dělová koule rychlostí $v_0 = 50$ m/s pod úhlem $\alpha = 30^\circ$. Určete rychlost dělové koule při jejím dopadu na zem.

Řešení: Opět stačí zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

takže rychlost koule při dopadu nezávisí na úhlu výstřelu a platí

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 60.8 \text{ m/s}.$$

Příklad 5.46 Projektil proletěl deskou o tloušťce d , přičemž jeho rychlost poklesla z v_1 na v_2 . Jakou průměrnou silou působila deska na projektil?

Řešení: Opět stačí zákon zachování energie. Pokles kinetické energie $\Delta T = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$ byl zapříčiněn odporovou silou F , která vykonala práci $A = Fd$. Protože $\Delta T = A$, máme odtud výsledek

$$F = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2d}.$$

Příklad 5.47 Určete brzdnu dráhu automobilu, který se pohybuje rychlostí v , když součinitel tření kol o vozovku je roven f .

Řešení: Opět stačí zákon zachování energie. Brzdění způsobuje třecí síla $F = fmg$, která vykoná práci $A = Fs$. A protože původní kinetická energie automobilu byla $T = \frac{1}{2}mv^2$, dostaneme ze zákona zachování energie $T = A$ pro brzdnu dráhu výsledek

$$s = \frac{v^2}{2fg}.$$

Příklad 5.48 Na pružinu tuhosti k bylo opatrně zavěšeno těleso o hmotnosti m . Určete, o jakou výchylku se pružina protáhne.

Řešení: Opět užijeme zákon zachování energie. Původně byla energie $E = 0$, ale při protažení pružiny o y směrem dolů se zvětšuje její potenciální energie pružnosti $\frac{1}{2}ky^2$ a kinetická energie $\frac{1}{2}mv^2$, zatímco klesá její potenciální energie tíhová $-mgy$. Platí tedy

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 - mgy = 0.$$

Protože kinetická energie je vždy nezáporná

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy - \frac{1}{2}ky^2 \geq 0,$$

můžeme odtud dedukovat, že pružina se zavěšeným tělesem bude kmitat v mezích

$$0 \leq y \leq \frac{2mg}{k}.$$

Po zatlumení kmitů zůstane pružina v rovnovážné poloze s výchylkou $y_0 = mg/k$, jak ostatně plyne z definice tuhosti pružiny.

Příklad 5.49 Na lanku přes pevnou kladku visí dvě závaží m_1 a m_2 . Na počátku se nachází těžší z obou závaží ve výšce h od země a soustava je v klidu. Určete rychlost a zrychlení soustavy v okamžiku, kdy se těžší z obou závaží dotkne země.

Řešení: Opět stačí zákon zachování energie. Protože rychlosti obou závaží jsou stejné, a protože obě závaží musí urazit stejnou dráhu, platí

$$\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_1gh - m_2gh,$$

odtud

$$v = \sqrt{2gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Zrychlení odtud dostaneme porovnáním se známým vzorcem pro zrychlený pohyb $v = \sqrt{2as}$, takže je

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

5.7.10 Účinnost

Jestliže přenášíme určitým mechanismem práci, část této práce se cestou ztrácí a nemůže být využita. Například při převodu mechanické práce z motoru na automobil se část práce přeměňuje třením v převodovce na teplo a další část se ztrácí na úkor aerodynamického odporu vzduchu. Podobně při přenosu nebo transformaci energie se část nevyužité energie ztrácí. Například elektrická energie se ztrácí v elektrickém vedení jako Joulovo teplo, tepelná energie uniká špatnou izolací, parní motor využívá jen část dodané tepelné energie atd. Proto definujeme bezrozměrnou veličinu zvanou **účinnost** jako podíl skutečně využitě práce A_2 a dodané práce A_1

$$\eta = \frac{A_2}{A_1}.$$

Zajímá-li nás okamžitá účinnost, je lépe definovat ji jako podíl využitého a dodaného výkonu

$$\eta = \frac{\Delta A_2}{\Delta A_1} = \frac{P_2 \Delta t}{P_1 \Delta t} = \frac{P_2}{P_1}.$$

Stejně je možno definovat i účinnost přeměny a využití energie $\eta = E_2/E_1$ jako podíl využitě energie E_2 a dodané energie E_1 . Obecně platí, že účinnost je vždy menší než jedna $\eta \leq 1$ a udává se obvykle v procentech.

5.7.11 Zákon zachování energie a věčný pohyb

Jak dobře víme, stroj potřebuje ke svému pohybu energii zvnějšku. Například, aby šel hodinový strojek, musíme natáhnout klíčkem jeho hnací pero, případně u kyvadlových hodin zvednout jeho závaží. U moderních hodinek zase musíme vložit do stroje baterii. Otázka zní, nebylo by možné vyrobit takový stroj, který by tuto energii nevyžadoval a přitom se pohyboval? Pokoušelo se o to tisíce mechaniků. Při návrhu **perpetua mobile**, tak byl tento stroj pojmenován, kombinovali všechny známé i neznámé konstrukční principy, ale úspěchu nikdo z nich nedosáhl. Hypotetický stroj s tak poetickým jménem se nikomu vyrobit nepodařilo. Pravda, někteří věřili, že jej vyrobili, ale nikomu z nich skutečně nefungoval. Oficiální věda přestala hledat věčný samohyb už v 17. století, pařížská Akademie věd veřejně

deklarovala nemožnost sestrojení perpetua mobile roku 1775, přesto jsou dodnes mnohé patentní úřady vydatně zásobovány novými plány na konstrukci perpetua mobile.

Mluvíme-li o perpetuu mobile, musíme rozlišovat dva druhy tohoto stroje. **Perpetuum mobile I. druhu** je stroj, který se bude věčně pohybovat a navíc ještě konat užitečnou práci, aniž bychom do něj museli přivádět energii. Takový stroj je snem všech inženýrů. Kdyby existoval, náš život by se zcela změnil! **Perpetuum mobile II. druhu** je pak takový stroj, který se bude věčně pohybovat bez toho, že bychom do něj museli přivádět energii. Takový stroj však nekoná práci, a není proto zdaleka tak užitečný, jako by bylo perpetuum mobile I. druhu. Ale ani tento stroj není možno sestrojít, protože nikdy nelze zcela eliminovat ztráty energie způsobené odporem proti pohybu. Část mechanické energie se vždy přemění na neužitečné teplo, které unikne do okolí a každý stroj se bez přísunu energie nakonec zastaví.

Za perpetuum mobile II. druhu je možno téměř považovat planetární systém, který funguje bez patrných ztrát energie po miliardy let. Skutečným perpetuum mobile II. druhu jsou však elementární částice. Například elektron v základním stavu může obíhat kolem jádra atomu po miliardy let bez potřeby dodání energie. Věčný pohyb elektronu je možný proto, že na úrovni mikrosvěta jevy tření a disipace energie neexistují. Také chaotický tepelný pohyb suspenze pylových zrněk ve vodě, známý jako Brownův pohyb, trvá věčně i bez přísunu energie.

Zákon zachování energie je v přímém rozporu s existencí perpetua mobile I. druhu. Z tohoto důvodu jej nelze sestrojít. Existenci perpetua mobile II. druhu nelze na základě zákona zachování energie vyloučit. Až pokusy o jeho praktickou realizaci ukazují, že ani takový stroj postavit nedokážeme.

Energie hraje klíčovou roli nejen v mechanice, ale i ve všech ostatních částech fyziky. Brzy poznáte další formy energie jako jsou tepelná energie, elektrická energie, magnetická energie, světelná energie, jaderná energie a další. Ačkoliv v různých fyzikálních oborech platí různé zákony a používáme zcela odlišné fyzikální veličiny a jednotky, všechny části fyziky jsou úzce propojeny právě přes pojem **energie** a **zákon zachování energie**.

Celková energie izolované soustavy těles se zachovává

$$E = T + U + E_Q + E_{EM} + E_S + E_J + \dots = \text{konst.}$$

Zákon zachování a přeměny energie je tedy mnohem obecnější než zákon zachování mechanické energie.

5.7.12 Historická poznámka

Prvopočátek pojmu kinetické energie je možno spatřovat v pojmu *živá síla*, kterou zavedl GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ roku 1686 při zkoumání srážek kulečnických koulí. Leibniz jako první vyřešil správně pružnou srážku koulí za využití předpokladu, že se zachovává nejen *množství pohybu*, tj. hybnost $m\mathbf{v}$, ale i veličina

mv^2 , kterou nazval živá síla. Podobně zavedl i *mrtvou sílu* pro označení toho, co dnes známe jako potenciální energii. Teprve až roku 1826 JEAN-VICTOR PONCELET a nezávisle i GUSTAVE-GASPARD CORIOLIS našli vztah mezi prací a kinetickou energií a definovali kinetickou energii se správným koeficientem jako $\frac{1}{2}mv^2$. Za dnes používané termíny **kinetická a potenciální energie** vděčíme WILLIAM JOHN MACQUORN RANKINEMU, který je zavedl roku 1853.

Součin síly a dráhy nesl v minulosti roztodivné názvy jako *moment aktivity*, *dráhový moment* aj., než se ustálil dnešní název. Současné označení **mechanická práce** zavedl roku 1826 Poncelet. Netriviální vztah fyzikální práce k lidské práci blíže ozřejmil Coriolis roku 1829.

Skutečný zákon zachování energie (nejen mechanické) byl objeven až v souvislosti s teplem a první větou termodynamickou. Připomeňme si některé důležité mezníky na této cestě.

Vztah mezi prací a teplem objevil HRABĚ RUMFORD (původním jménem BENJAMIN THOMPSON) roku 1798. Zjistil, že při vrtání dělových hlavni se uvolňuje teplo přímo úměrné vynaložené mechanické práci. Teplo se při vrtání tvořilo libovolně dlouho, což vyvracelo větu o zachování množství tepelného fluida. Vypočetl také jako první **mechanický ekvivalent tepla**. Na počátku 19. století JOSEPH-LOUIS GAY-LUSSAC a PIERRE-LOUIS DULONG dokázali, že rozpínáním plynu se koná na pístu práce na úkor tepla, které plyn odebírá ze svého okolí. To rovněž vyvracelo teorii kalorika jako nezničitelné a nestvořitelné substance. Fluidová teorie se však přesto udržela dalších 50 let.

Roku 1842 JULIUS ROBERT MAYER znovu objevuje ekvivalenci tepla a práce a vyvozuje, více filozoficky než experimentálně, *zákon zachování síly*. Pod pojmem síly rozumí Bernoulliho živou sílu (kinetická energie), mrtvou sílu (potenciální energie), teplo i práci. Pomocí rozdílu měrných tepel plynu při stálém tlaku a stálém objemu odvozuje mechanický ekvivalent tepla. Mayer je i zakladatelem bioenergetiky. Když sloužil jako lodní lékař a pouštěl žilou námořníkům v tropech, pozoroval, že jejich krev je světlejší a správně usoudil, že odkysličování krve v tropech probíhá pomaleji, protože zde není třeba tělu dodávat tolik tepla. Naopak člověk, který namáhavě pracuje, spotřebuje více kyslíku a jeho krev bude tmavší.

Roku 1843 změřil mechanický ekvivalent tepla JAMES PRESCOTT JOULE. Mezi póly elektromagnetu umístil cívku, kterou uvedl do rotačního pohybu padajícím závažím. V cívce se indukoval elektrický proud a ten ohřívá vodu. Porovnáním mechanické práce uvolněné závažím s teplem, kterým se ohřála voda, dostal mechanický ekvivalent 400 – 560 kilopondmetrů na kilokalorii. Později definoval i průměrný výkon pivovarského koně, jednotku výkonu *koňská síla*.

Matematickou formulaci zákona zachování energie podal v letech 1845-1847 HERMANN VON HELMHOLTZ v knize *Über die Erhaltung der Kraft* (O zachování síly). Na základě všech známých poznatků vyslovil větu: *Žádným způsobem, žádnou kombinací těles, není možno vyrobit neomezené množství síly*. Tvrdil, že suma *síly* je v anorganickém světě konstantní a že není možno vyrobit *perpetuum mobile*. Práce, která se spotřebuje k dosažení určitého pohybového stavu těles, se získá zase zpět při návratu soustavy do původního stavu, a to po libovolné cestě.

Moderní terminologii a vyjasnění pojmů přinesl až roku 1853 WILLIAM JOHN

MACQUORN RANKINE, který Leibnizovu živou sílu pojmenoval dnes běžným označením **energie**. Energie je podle něj schopnost konat práci. Význam slova energie je z řeckého *en ergon* (v práci). Energii mechanického pohybu nazval kinetickou energií, Mayerovu mrtvou sílu nazval potenciální energií, součin síly a dráhy nazval prací. Mayerův a Helmholtzův zákon zachování síly se tímto stal **zákonem zachování a přeměny energie**.

Později se vyjasnilo, že teplo stejně jako práce nejsou energie, ale jen formy přenosu energie z jedné soustavy do druhé. Nahřáté těleso neobsahuje teplo, ale vnitřní energii ve formě kinetické a potenciální energie jeho atomů. O teple hovoříme až v okamžiku přenosu vnitřní energie tělesa na jiné těleso nebo při přeměně vnitřní energie na jinou formu energie. Na rozdíl od energie proto teplo ani práce nejsou stavovými veličinami. Matematicky tento rozdíl vyjadřuje skutečnost, že teplo ani práce nejsou úplnými diferenciály. Pojem **vnitřní energie** (tehdy ještě vnitřní sílu) zavedl RUDOLF CLAUSIUS roku 1851.

Konečná formulace I. věty termodynamické (1851) se přisuzuje LORDU KELVINOVÍ (původním jménem WILLIAM THOMSON): Přírůstek vnitřní energie soustavy je roven vložené práci a přivedenému teplu $\Delta U = A + Q$.

5.8 Mechanická energie a pohyb

5.8.1 Jednorozměrný pohyb

Pomocí energie a zákona zachování energie je možno úplně vyšetřit pohyb částice i bez znalosti Newtonova zákona síly. Takový postup je běžný například v teoretické mechanice, kde se pojem síly prakticky vůbec nepoužívá.

Ukážeme si nyní, jak najdeme pohybovou rovnici ze zákona zachování energie. Problém bude nejjednodušší v případě jednorozměrného pohybu. Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje jen v ose x a který se nachází v silovém konzervativním poli $F(x)$. Potenciální energii pole označíme $U(x)$. Místo pohybové rovnice $m\ddot{x} = F(x)$, která je rovnicí druhého řádu, můžeme použít rovnou zákon zachování energie, podle nějž platí

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E,$$

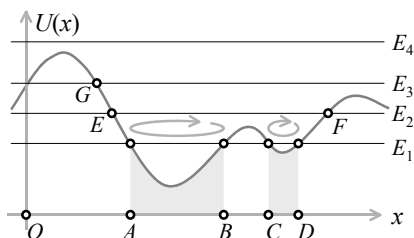
kde E je konstantní celková mechanická energie hmotného bodu. Tak dostaneme hned diferenciální rovnici prvního řádu. Rovnici lze separovat, a řešení lze proto psát obecně ve tvaru

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (5.27)$$

Pohyb bodu je omezen jen na ty oblasti, kde je $U(x) < E$, jinak by ani jmenovatel neexistoval. Podle tvaru potenciální energie $U(x)$ a velikosti celkové energie E (ta závisí od počátečních podmínek) může být pohyb v jednom nebo i v obou směrech omezen. Pokud platí

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max},$$

mluvíme o **finitním** pohybu a o **potenciálové jámě**.



Jednodimenzionální pohyb v potenciálovém poli $U(x)$. Při energii E_1 je pohyb omezen na intervaly AB nebo CD , při energii E_2 je omezen na celý interval EF , pro energii E_3 je omezen jen zleva bodem G a při energii E_4 je pohyb v celém prostoru neomezen.

Pohledem na obrázek vidíme, že pro některé energie, jakou je například E_1 , může být pohyb omezen dokonce na dvě prostorově zcela oddělené oblasti AB a CD . Těleso nemůže přejít z jedné oblasti do druhé bez dodání další energie. Ve které z oblastí se bude nacházet, závisí na počátečních podmínkách. Doba Δt , potřebná k proběhnutí vzdálenosti od minima do maxima, je zřejmě rovna

$$\Delta t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

a pohyb hmotného bodu se stává periodickým s **periodou** $T = 2\Delta t$. Tak tomu je na obrázku při energii E_1 nebo E_2 .

Při jiné hodnotě energie (na obrázku to je případ s energií E_3), může být pohyb omezen jen na jedné straně. V tom případě se částice odráží na **potenciálovém valu** v místě x_0 , kde platí $E = U(x_0)$, a mluvíme o **semifinitním pohybu**. Při ještě vyšší energii může být pohyb neomezený, **infinitní**, a částice proletí každým bodem osy x nanejvýš jedenkrát a všemi jen jedním směrem.

Homogenní pole

Nejjednodušším případem takového pohybu je jednorozměrný pohyb hmotného bodu v homogenním tíhovém poli, kde potenciální energie $U = mgx$ je dána lineární funkcí vertikální souřadnice x . Pohyb částice s energií E z místa $x(0) = 0$ je podle (5.27) popsán rovnicí

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E - mgx}},$$

odtud po integraci dostaneme

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t = -2 \frac{\sqrt{E - mgx} - \sqrt{E}}{mg}.$$

Vyjádríme-li odtud souřadnici x , máme

$$x = \pm t \sqrt{\frac{2E}{m}} - \frac{1}{2}gt^2 = \pm v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde $v_0 = \sqrt{2E/m}$ je zřejmě počáteční rychlost hmotného bodu. Pro rychlost dostaneme $v = \pm v_0 - gt$. Odtud již snadno seznáme, že zkoumaný pohyb je **svislým vrhem** vzhůru resp. dolů. Pohyb je zřejmě seshora semifinitní, protože může probíhat jen tam, kde je

$$x \leq E/mg,$$

maximální výškou vrhu je tedy $H = E/mg$.

Lineární oscilátor

Jako příklad prozkoumejme pohyb hmotného bodu o energii E v poli lineární vratné síly (**lineární oscilátor**)

$$F = -kx.$$

Príslušná potenciální energie je, jak již víme, rovna

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

a pohyb hmotného bodu může probíhat jen tam, kde platí

$$\frac{1}{2}kx^2 \leq E.$$

Odtud je zřejmé, že pohyb bodu je pro každou hodnotu energie E omezen (finitní) a platí

$$-\sqrt{\frac{2E}{k}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Perioda pohybu T je rovna

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

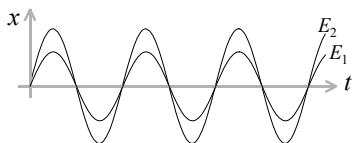
a překvapivě vůbec nezávisí na energii E . Samotný pohyb $x(t)$ najdeme integrací podle rovnice (5.27), po dosazení dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \sqrt{\frac{k}{2E}}x,$$

a odtud obrácením

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Jde tedy o **harmonický kmitavý pohyb** s amplitudou $A = \sqrt{2E/k}$ a úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{k/m}$.



Pohyb harmonického oscilátoru o menší energii E_1 a větší energii E_2 . Všimněte si, že zatímco amplituda kmitů roste s energií, frekvence a perioda na energii nezávisí.

Coulombovské pole

Vyšetřeme ještě volný pád hmotného bodu z místa $x(0) = a$ v coulombovském poli

$$U = -\varkappa \frac{mM}{x}.$$

Za předpokladu, že pád nastal z klidu $\dot{x}(0) = 0$, bude trajektorií přímka a energie částice bude rovna $E = -\varkappa \frac{M}{a}$. Podle (5.27) máme pohyb určen rovnicí

$$\sqrt{2\varkappa M}t = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}}.$$

Integrací dostaneme výsledek

$$\sqrt{\frac{2\varkappa M}{a^3}}t = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right)}. \quad (5.28)$$

To je vzhledem k x transcendentní rovnice, kterou lze řešit jen pomocí numerických metod. Jen pro malé časy platí kvadratická závislost

$$x \approx a - \frac{1}{2}\varkappa \frac{M}{a^2}t^2.$$

Čas

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2 a^3}{8\varkappa M}},$$

za který částice dopadne až do centra, je konečný a dostane se z (5.28) dosazením za $x = 0$. Podobně časy, za které se částice dostane přesně do čtvrtiny, poloviny a tři čtvrtin své dráhy, jsou popořadě

$$t_1 \approx 0.609T, \quad t_2 \approx 0.818T \quad \text{a} \quad t_3 \approx 0.942T.$$

5.8.2 Pohyb v rovině

Homogenní pole

Zkoumejme dvojrozměrný pohyb hmotného bodu v homogenním tíhovém poli, kde potenciální energie $U = mgy$ závisí jen na vertikální souřadnici y . Pro pohyb částice

s energií E z místa $x(0) = 0$ a $y(0) = 0$ platí jak zákon zachování horizontální složky hybnosti

$$p_x = m\dot{x} = mv_{x0},$$

tak i zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = E.$$

Ten je možno přepsat do tvaru

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + U_{\text{ef}} = E,$$

kde $U_{\text{ef}} = mgy + \frac{1}{2}mv_{x0}^2$ je **efektivní potenciální energie**. Nyní jde opět o jednorozměrný problém, jehož řešení je popsáno rovnicí (5.27), takže odtud hned máme řešení

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{E - mgy - \frac{1}{2}mv_{x0}^2}}.$$

Po integraci dostaneme

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t = -2 \frac{\sqrt{E - \frac{1}{2}mv_{x0}^2 - mgy} - \sqrt{E - \frac{1}{2}mv_{x0}^2}}{mg}.$$

Vyjádříme-li odtud souřadnici y , máme

$$y = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - v_{x0}^2} t - \frac{1}{2}gt^2 = \pm v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde $v_{y0} = \sqrt{\frac{2E}{m} - v_{x0}^2}$ je zřejmě počáteční složka vertikální rychlosti hmotného bodu. Horizontální souřadnice je zřejmě $x = v_{x0}t$. Pro rychlost pak dostaneme $v_x = v_{x0}$ a $v_y = \pm v_{y0} - gt$. Odtud vidíme, že zkoumaný pohyb je **šikmým vrhem**. Pohyb je zřejmě seshora semifinitní, protože může probíhat jen tam, kde je

$$y \leq \frac{E - \frac{1}{2}mv_{x0}^2}{mg} = \frac{v_{y0}^2}{2g}$$

a maximální výškou vrhu je tedy $H = v_{y0}^2/2g = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$.

Pohyb v poli centrální síly

Diskuze vícedimenzionálního pohybu je mnohem komplikovanější. Uvažujme pohyb v poli centrální síly $F(r)$, takové pole je vždy potenciální a příslušná potenciální energie je dána integrálem

$$U(r) = - \int_{\infty}^r F(r) dr.$$

Pohyb v centrálním poli je rovinný a při pohybu se zachovává jak moment hybnosti

$$mr^2\dot{\phi} = L,$$

tak i energie

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + U(r) = E.$$

To jsou z matematického pohledu dvě nelineární diferenciální rovnice prvního řádu. Jestliže z nich vyloučíme $\dot{\phi}$, dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E,$$

která nezávisí na azimutu ϕ . Dostali jsme jedinou diferenciální rovnici pro funkci $r(t)$, kterou můžeme v principu vyřešit, známe-li $U(r)$. Dvoudimenzionální problém jsme tak převedli na problém jednodimenzionální. Veličina

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

zde hraje roli potenciální energie a nazývá se **efektivní potenciální energie**.

V analogii s jednodimenzionálním pohybem máme hned výsledek pro $t(r)$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{ef}}(r)}} = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}}.$$

Pokud hledáme trajektorii, můžeme vyloučit čas pomocí momentu hybnosti

$$dt = \frac{mr^2}{L}d\phi,$$

a pro $\phi(r)$ vyjde integrál

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\phi = \int_{r_0}^r \frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}}.$$

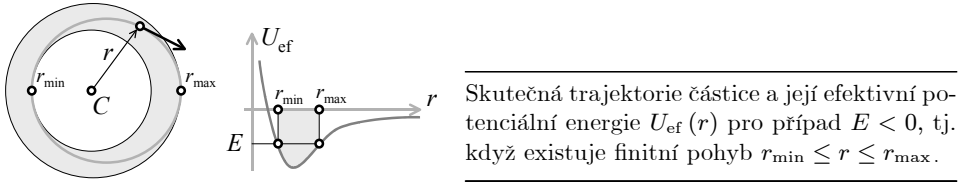
I bez integrace můžeme provést diskuzi podobnou té z předchozí kapitoly pro jednodimenzionální pohyb. Reálný pohyb je možný jen tam, kde je $\dot{r}^2 \geq 0$, tedy jen tam, kde je

$$E \geq U_{\text{ef}}(r).$$

Například pro gravitační pole je

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \varkappa \frac{mM}{r}.$$

Protože pro $r \rightarrow 0$ je $U_{\text{ef}}(r) \rightarrow \infty$, je zřejmé, že pohyb částice je vždy omezen na oblast $r \geq r_{\text{min}}$. Při záporné energii $E < 0$ je pohyb omezen dokonce i shora na oblast $r < r_{\text{max}}$, pohyb je tedy **finitní** a jeho trajektorii je elipsa, případně kružnice. V případě $E = 0$ je pohyb semifinitní a trajektorii částice je parabola. Konečně pro $E > 0$ je trajektorii částice hyperbola.



Pro periodu finitního pohybu dostaneme výraz

$$T = \sqrt{2m} \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}},$$

pro změnu azimutu za tuto dobu máme

$$\Delta\phi = \sqrt{2m} \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}}.$$

Dráha částice bude uzavřenou jen tehdy, pokud bude pootočení za periodu rovno racionálnímu zlomku plného úhlu, tj. pokud bude $\Delta\phi = 2\pi p/q$. Pro pole typu $U(r) = kr^n$ to nastane jen pro pole coulombovské $U(r) = -k/r$ a pro pole lineárního harmonického oscilátoru $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Toto tvrzení je obsahem **Bertrandova teoremu**. V prvním případě vychází $\Delta\phi = \pi$ a ve druhém $\Delta\phi = 2\pi$. Dráhou částice je v obou případech elipsa. V případě coulombovského pole vyjde perioda

$$T^2 = \frac{mk^2\pi^2}{2|E|^3},$$

nezávisle na orbitálním momentu. Pro newtonské pole odtud skutečně dostaneme třetí Keplerův zákon

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa M} a^3.$$

Lineární oscilátor

Podrobněji nyní vyšetříme pohyb částice v centrálním poli kvadratického potenciálu

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}kr^2.$$

Při pohybu se zachovává energie E a moment hybnosti L částice, tyto dva integrály tvoří soustavu provázaných diferenciálních rovnic pro $r(t)$ a $\phi(t)$

$$E = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \quad \text{a} \quad L = mr^2\dot{\phi}. \quad (5.29)$$

Pohyb částice o dané energii E je zřejmě opět omezen nerovnostmi

$$\frac{1}{2}mr^2 = E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \geq 0,$$

odtud vychází $b \leq r \leq a$ kde

$$a = \sqrt{\frac{E}{k} + \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{mk}}} \quad \text{a} \quad b = \sqrt{\frac{E}{k} - \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{mk}}}. \quad (5.30)$$

Vyloučíme-li z obou rovnic (5.29) čas, dostaneme rovnici pro trajektorii. Příslušné úpravy vedou na rovnici

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{L} \sqrt{2mE - kmr^2 - \frac{L^2}{r^2}}.$$

Substitucí $r^2 = 1/u$ z ní dostaneme diferenciální rovnici

$$-\frac{1}{2} \frac{du}{d\phi} = \sqrt{-\frac{km}{L^2} + \frac{2mE}{L^2}u - u^2}.$$

Tuto rovnici již dokážeme pohodlně zintegrovat separací proměnných. Takto nakonec dostaneme po úpravě řešení ve tvaru

$$u = \frac{mE}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{mE}{L^2}\right)^2 - \frac{mk}{L^2}} \cos 2\phi.$$

Pokud si uvědomíme, že $u = 1/r^2$ a pokud dále rozepíšeme $\cos 2\phi$ a 1 z prvního členu pomocí funkcí $\cos^2 \phi$ a $\sin^2 \phi$, je možno toto řešení přepsat do tvaru

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2},$$

kde

$$\frac{1}{a^2} = \frac{mE}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{mE}{L^2}\right)^2 - \frac{mk}{L^2}} \quad \text{a} \quad \frac{1}{b^2} = \frac{mE}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mE}{L^2}\right)^2 - \frac{mk}{L^2}}.$$

Z posledního tvaru rovnice trajektorie je již zřejmé, že se jedná o středovou rovnici elipsy s poloosami a a b . Snadno také ověříme, že vzorce pro poloosy a, b jsou ekvivalentní o něco výše uvedeným vzorcům (5.30). Trajektorie částice je tedy obecně uzavřená elipsa, která se stane kružnicí pro $mE^2 = kL^2$ nebo úsečkou pro $L = 0$.

Vzdálenost částice od počátku se změní během jedné periody celkem dvakrát od maxima do minima, proto je perioda rovna

$$T = 2\sqrt{2m} \int_b^a \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kr^2 - \frac{L^2}{2mr^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Všimněte si, že perioda pohybu rovinného lineárního oscilátoru (izotropního) nezávisí ani na jeho energii ani na jeho momentu hybnosti. To je zobecnění známého poznatku, podle něhož perioda jednorozměrného lineárního oscilátoru nezávisí na jeho amplitudě jeho kmitů.

Jak je patrné z předchozích řádků, není analýza pohybu částice v kvadratickém potenciálu pomocí integrálů pohybů asi tou nejvhodnější metodou studia lineárního oscilátoru. Skutečně, mnohem pohodlněji obdržíme všechny výsledky pomocí zákona síly a přitom se dokonce nemusíme ani omezovat na izotropní oscilátor. Uvažujme tedy pohyb částice v poli obecného kvadratického potenciálu

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2.$$

Na částici působí necentrální síla $\mathbf{F} = -\nabla U = -(k_x x, k_y y)$ a pohybová rovnice částice zní

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U.$$

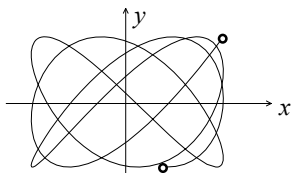
Fakticky jde o dvě zcela nezávislé diferenciální rovnice

$$\ddot{x} = -\omega_x^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega_y^2 y,$$

kde $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$ a $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$. Každá z rovnic představuje rovnici jednorozměrného oscilátoru, jehož harmonické řešení již známe. Proto můžeme rovnou napsat i obecné řešení třírozměrného oscilátoru ve tvaru

$$x = x_0 \cos(\omega_x t + \phi_x), \quad y = y_0 \cos(\omega_y t + \phi_y).$$

V obecném případě **anizotropního oscilátoru** $k_x \neq k_y$ budou trajektoriemi částice propletené Lissajousovy křivky, které budou uzavřené pouze v případě souměrných frekvencí ω_x a ω_y , kdy je také teprve možné hovořit o periodě pohybu.



Příklad obecné neuzavřené trajektorie anizotropního rovinného oscilátoru.

Pokud se opět omezíme na **izotropní oscilátor**, bude $k = k_x = k_y$ a $U = \frac{1}{2}kr^2$. Sílové pole izotropního oscilátoru bude centrální, neboť platí $\mathbf{F} = -\nabla U = -k\mathbf{r}$. Pohyb částice je v tom případě možno popsat rovnicemi

$$x = x_0 \cos(\omega t + \phi_x), \quad y = y_0 \cos(\omega t + \phi_y),$$

kde $\omega = \sqrt{k/m}$. Vyloučením času z těchto dvou rovnic snadno najdeme, že trajektorií částice musí být elipsa se středem v počátku a periodou pohybu $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. Vhodným natočením souřadné soustavy nabude řešení jednodušší tvar

$$x = a \cos \omega t \quad \text{a} \quad y = b \sin \omega t. \quad (5.31)$$

Poloosy a a b lze pochopitelně svázat s počáteční energií a momentem hybnosti částice, zřejmě musí platit

$$E = \frac{1}{2}k(a^2 + b^2) \quad \text{a} \quad L = \sqrt{kmab},$$

jak se lze přesvědčit prostým dosazením řešení (5.31) do vzorců

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \quad \text{a} \quad L = m(xy - y\dot{x}).$$

Pokud z těchto rovnic vypočteme příslušné poloosy eliptické trajektorie, dostaneme pro ně pochopitelně již známé výsledky (5.30).