

# OPTICKÉ VÍRY – NOVÝ SMĚR ROZVOJE SINGULÁRNÍ OPTIKY

Zdeněk Bouchal, *katedra optiky a Výzkumné centrum pro optiku, PŘF UP,  
tř. 17. listopadu 50, 770 00 Olomouc*

*Singulární optika představuje poměrně mladou, rychle se rozvíjející oblast moderní optiky a fotoniky. Zabývá se studiem fázových singularit vlnové funkce popisující optické záření. Hlavní pozornost je soustředěna na spirální singularity nazývané optické víry. Vírová struktura optického záření má přímou souvislost s orbitálním momentem hybnosti, který se významně projevuje při interakci s mikročásticemi a atomy. Kromě fundamentálních poznatků, které přináší nové informace o podstatě a vlastnostech elektromagnetického záření, nabízí singulární optika i perspektivní aplikace v oblasti atomové optiky, mikromechaniky, biologie, zpracování informace a optických počítačů.*

## ÚVOD

Obvyklými pojmy, se kterými pracujeme při popisu vln libovolného původu, jsou amplituda a fáze. Ačkoliv je fáze při popisu elektromagnetických vln pomocnou veličinou, zavedení vlnoplochy, definované jako plochy konstantní fáze, poskytuje názornou představu o šíření a transformaci elektromagnetického záření. V běžných případech je vlnoplocha popsána spojitou funkcí. V rámci standardních metod popisu elektromagnetického záření byly nespojitosti vlnoplochy považovány za oblasti, ve kterých popis selhává, a nebyl k nim brán zřetel. Nová oblast moderní fyzikální optiky, nazývaná singulární optika, pracuje se širokou škálou jevů souvisejících s fázovými singularitami optických polí a s jejich fázovou topologií [1, 2]. Optické singularity se projevují na třech rozdílných úrovních: jako paprskové singularity studované v rámci teorie katastrof, jako fázové singularity skalárních polí a jako polarizační singularity (singularities kmitoměru) vektorových polí. Fázové singularity, kterým je věnována největší pozornost, mohou být dále reprezentovány jako zlomové, vírové nebo kombinované. Fázové singularity mohou ve světelných polích vznikat zcela nahodilým způsobem, například interferencí náhodně rozptýleného světla. Nejvýznamnější jsou však fázové singularities záměrně vytvářené v dobře směřovaných optických svazcích. Hlavní pozornost je zaměřena na koherentní laserové svazky, na jejichž pozadí jsou vytvářeny fázové singularities spirálovitého typu nazývané optické víry [3–6]. Tyto vírové svazky mají projevy, které se v rozmanitých formách vyskytují přirozeným způsobem ve volné přírodě. Naším běžným zkušenostem jsou blízké především víry, které vznikají hydrodynamickým a atmosférickým prouděním, protože jsme schopni přímo pozorovat

jejich mechanické účinky. Projevy vírů světelných jsou mnohem subtilnější a vymykají se z dosahu našich běžných představ a zkušeností. V hydrodynamice mluvíme o vírech v souvislosti s rotačním vířivým pohybem kapaliny. Analogie existuje i v případě světelných vírů. Vířivé proudění kapaliny je nahrazeno vířivým tokem elektromagnetické energie, který je důsledkem šroubovitého tvaru vlnoplochy. Laserový vírový svazek vykazuje v místě optického víru bodovou fázovou singularitu. Tento bod je centrem šroubovité vlnoplochy, kterou si lze představit například jako točité věžní schodiště. V místě víru, to znamená na ose šroubovité vlnoplochy, není fáze jednoznačně definovaná. Dá se ukázat, že amplituda svazku je v tomto bodě nulová, takže centrum víru je tmavé. Důležitým parametrem světelného víru je celočíselný topologický náboj, který určuje, kolika listy je šroubovitá vlnoplocha tvořena. Kladné a záporné znaménko topologického náboje potom vyjadřuje orientaci stoupání šroubovité vlnoplochy. Ve volném prostoru (případně i dielektrických prostředích, která jsou izotropní) je směr toku elektromagnetické energie reprezentován Poyntingovým vektorem, jehož směr je totožný se směrem gradientu fáze vlny. V geometrické interpretaci si tento poznatek můžeme představit tak, že v daném bodě vlnoplochy proudí elektromagnetická energie ve směru určeném vnější normálou vlnoplochy. Tyto normály pak představují pomyslné paprsky přenášející elektro-magnetickou energii. V případě šroubovité vlnoplochy obklopující světelný vír představují paprsky v prostoru stoupající spirály a elektromagnetická energie, která je jimi přenášena, vytváří optický vír podobný těm, které vznikají proudící kapalinou. S tímto vířivým prouděním elektromagnetické energie souvisejí i mechanické projevy optických vírů. Poměrně nedávno skupina fyziků z University of St. Andrews

ve Skotsku upozornila na to, že optické vírové svazky vykazují orbitální úhlový moment hybnosti, který je možné přenést na mikročástice a atomy [7–10]. Mechanický účinek je potom pozorován jako rotace částic [11–13]. Tento jev je významný pro konstrukci mikromechanických systémů, u kterých se předpokládá, že budou poháněny světlem. Pohonný rotor systémů, který měří jen několik mikrometrů, připomíná větrný mlýnek, jehož lopatky však v tomto případě zabírají ve „světelném větru“. Podobné mechanické systémy již byly realizovány a jejich další výzkum úspěšně pokračuje. Optické vírové svazky vykazují i další zajímavé vlastnosti, které jsou významné nejen pro hlubší pochopení základních fyzikálních zákonů, ale jsou příslibem i pro nové fyzikální a technické aplikace. Jedná se zejména o rotaci vírové struktury při šíření nosného svazku volným prostorem, chování „optického dipólu“, u kterého v analogii s elektrostatikou dochází k vzájemnému přitahování resp. odpuzování vírů opačného resp. stejného topologického náboje, vzájemnému pohlcení (anihilaci) vírů, nebo změně znaménka topologického náboje víru neseného astigmatickým laserovým svazkem. Tyto vlastnosti dávají možnost využití vírových svazků pro zachycení a vedení chlazených atomů, optický záznam, přenos a zpracování informace. Celočíslný topologický náboj optických vírů je novým nástrojem pro topologickou aritmetiku a optické počítače. Nelineárními optickými interakcemi lze topologické náboje vírových svazků měnit a ovládat. Například generace druhé harmonické, při které dochází v nelineárním optickém krystalu ke zdvojnásobení kruhové frekvence vstupního svazku a tím ke změně jeho barvy, umožňuje současně zdvojnásobení topologického náboje jeho optického víru [14, 15]. V rámci nelineární optiky jsou vírové svazky studovány i v souvislosti s prostorovými solitony [16]. Optické víry dávají možnost vytvořit a rekonfigurovat světelné stopy vhodné pro vedení světla světlem a vytvářet tak světelné vlnovody. Poznatky získané při studiu optických vírových svazků lze v rámci analogií přenést i do jiných oblastí moderní fyziky, ve kterých jsou vírové struktury významné. Mezi takové oblasti patří například fyzika pevné fáze, částicová fyzika nebo kosmologie. Velmi aktuální je problematika materiálových (atomových) vírových svazků studovaných v Boseových-Einsteinových kondenzátech.

## IDENTIFIKACE VÍROVÉHO DEFEKTU FÁZE

Vlastnosti vírových svazků mohou být jednoduchým způsobem demonstrovány budeme-li předpokládat, že vírová struktura je nesená monochromatickým paraxiálním svazkem. Skalární komplexní amplituda vírového svazku, který se šíří ve směru osy  $z$ , pak může být zapsána ve tvaru

$$U(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \exp[i(\omega t - kz)], \quad (1)$$

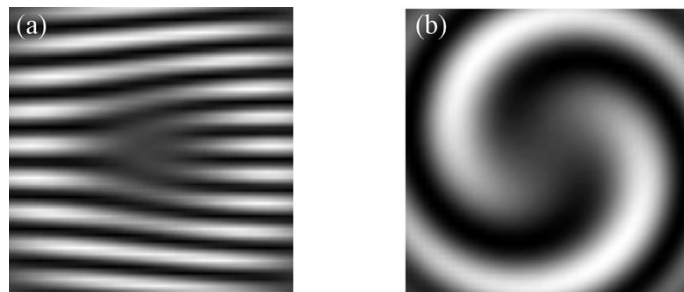
kde  $\vec{r} \equiv (x, y, z)$  a  $u$  je pomalu proměnná amplituda, kterou můžeme vyjádřit pomocí reálné amplitudy  $a$  a fáze  $F$ ,

$$u(\vec{r}) = a(r) \exp[iF(\vec{r})]. \quad (2)$$

Bod prostoru, ve kterém je vír lokalizován, lze identifikovat nenulovou hodnotou křivkového integrálu

$$\int_S \nabla F \cdot d\vec{s} = 2m\pi. \quad (3)$$

Je-li fáze  $F$  spojitá funkce, pak hodnota křivkového integrálu je nulová. Jestliže se ale uvnitř uzavřené křivky podél níž se provádí integrace nachází optický vír, ve kterém je fáze nespojitá, pak hodnota křivkového integrálu nabývá nenulové hodnoty. Dá se ukázat, že v bodě, ve kterém je vír lokalizován, platí, že reálná i imaginární část komplexní amplitudy je nulová,  $\Re\{u\} = \Im\{u\} = 0$ , takže vírové centrum má nulovou intenzitu a je tmavé. Celočíslné hodnoty  $m = \pm 1, 2, \dots$ , představují topologický náboj optického víru. Topologický náboj může být interpretován jako počet listů šroubovitě vlnoplochy, která vír obklopuje. Jeho znaménko souvisí s orientací stoupání šroubovitě vlnoplochy. Při experimentech s vírovými svazky provádíme jejich registraci pomocí kvadratických detektorů. Při tomto způsobu detekce ztrácíme informaci o fázi, takže vírovou strukturu není možné identifikovat přímým pozorováním. Prostředkem pro její zviditelnění je interference světla. Interferenční vzory, které vznikají koherentní superpozicí vírového svazku se sférickou, případně rovinnou vlnou, poskytují možnost vyhodnotit polohy vírových center ve svazku a určit velikost a znaménko jejich topologických nábojů. Interferenční vzory mají v prvním případě spirálovitý tvar, ve druhém potom vykazují typické vidličkovité rozštěpení. Počet větví spirál, případně násobnost vidličkovitého rozštěpení slouží k rozpoznání absolutní hodnoty topologického náboje. Jeho znaménko souvisí se směrem stočení spirál, případně s orien-



1/ Interference optického víru s topologickým nábojem  $m = 2$  a referenční (a) rovinné vlny a (b) sférické vlny

tací vidličkovitého rozštěpení. Zviditelnění šroubovité vlnoplochy víru s topologickým nábojem  $m = 2$  pomocí interference s referenční rovinnou a sférickou vlnou je znázorněno na obr. 1.

### VÍRY V GAUSSOVSKÉM NOSNÉM SVAZKU

Pomalu proměnná komplexní amplituda  $u$ , která charakterizuje optický vír s topologickým nábojem  $m$ , může být zapsána ve tvaru

$$u(\vec{r}) = (x + iy)^m. \quad (4)$$

S použitím kruhových válcových souřadnic  $(r, \varphi)$  může být přepsána jako

$$u(\vec{r}) = r^m \exp(im\varphi). \quad (5)$$

Jednotlivé optické víry (4), resp. (5) mohou být rozmístěny na pozadí nosného svazku, kterým může být například gaussovský svazek. Jeho příčný amplitudový profil je potom modulován vírovou strukturou, která může být v obecném případě velmi členitá. V následující analýze se omezíme na typické případy důležité pro demonstraci vlastností vírových svazků.

### STRUKTURA VÍRŮ STEJNÉHO TOPOLOGICKÉHO NÁBOJE

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že gaussovský svazek nese  $L$  vírových fázových defektů stejného topologického náboje  $m = 1$ . V rovině pasu  $z = 0$  může být jeho komplexní amplituda zapsána pomocí kruhových válcových souřadnic v jednoduchém tvaru

$$U_0(r, \varphi, t) = \exp(-r^2/w^2) \exp(i\omega t) \prod_{l=1, L} [r \exp(i\varphi) - r_l \exp(i\varphi_l)] \quad (6)$$

kde  $w$  je poloměr pasu. Její vývoj při šíření volným prostorem je možné studovat ve frekvenčním, případně impulzním přístupu. Ve frekvenčním prostoru nalezneme pomocí 2D Fourierovy transformace komplexní amplitudy  $U_0$  úhlové spektrum, které odpovídá vírovému svazku v rovině pasu. Úhlové spektrum po volném šíření do vzdálenosti  $z = Z$  získáme tak, že výchozí spektrum násobíme přenosovým faktorem volného šíření. V případě paraxiálních gaussovských svazků lze použít přenosový faktor vyjádřený ve Fresnelově aproximaci. Komplexní amplitudu svazku v rovině  $z = Z$  dostaneme inverzní Fourierovou transformací. Tímto postupem získáme komplexní amplitudu vírového svazku ve tvaru

$$U(r, \varphi, Z, t) = (1 - i\eta)^{-(L+1)} \exp(i\omega t - ikZ) \exp[-r^2/w^2(Z)] \times \prod_{l=1, L} \{r \exp(i\varphi) - r'_l(Z) \exp[i\varphi'_l(Z)]\} \quad (7)$$

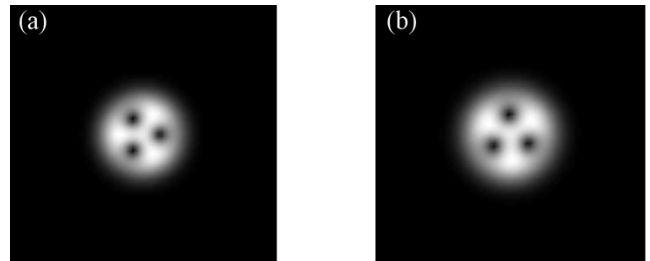
$$\begin{aligned} \eta &= Z/q \\ q &= kw^2/2 \\ w^2(Z) &= w^2(1 - i\eta) \end{aligned}$$

a  $q$  označuje Rayleighovu vzdálenost nosného gaussovského svazku. Při šíření volným prostorem se v důsledku difrakce poloměr svazku rozšiřuje. Poloha  $l$ -tého víru, která je v rovině pasu určena souřadnicemi  $r_l$  a  $\varphi_l$ , se při šíření nosného svazku mění. V rovině  $z = Z$  je určena souřadnicemi  $r'_l$  a  $\varphi'_l$ , které mohou být zapsány ve tvaru

$$r'_l = r_l(1 + \eta^2)^{1/2} \quad (8)$$

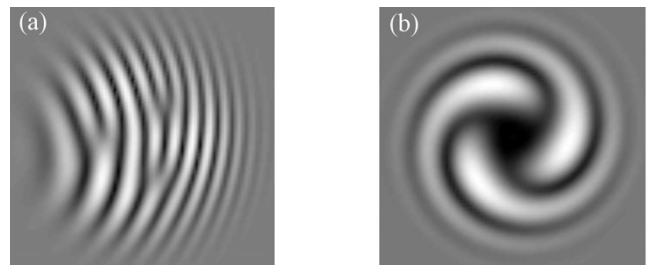
$$\varphi'_l = \varphi_l - \arctan(\eta) \quad (9)$$

Vztahy (6) a (7) představují komplexní amplitudu svazku v rovině pasu a po šíření volným prostorem do vzdálenosti  $Z$ . Z jejich srovnání je zřejmé, že vírová struktura modulující příčný profil svazku zůstává tvarově invariantní a dochází pouze k její rotaci a expanzi související s difrakčním rozšiřováním nosného gaussovského svazku. Tyto efekty jsou zřejmé ze závislosti kruhových válcových



2/ Trojice vírů s topologickým nábojem  $m = 1$  nesená gaussovským svazkem: (a) rovina pasu  $z = 0$ , (b)  $z = q/2$ , (c)  $z = q$ , (d)  $z = 2q$  ( $q$  označuje Rayleighovu vzdálenost).

souřadnic  $r'_l$  a  $\varphi'_l$ , které určují lokalizaci vírových center, na podélné souřadnici  $z = Z$ . Při šíření svazku na dostatečně velkou, limitně nekonečnou vzdálenost, dochází k rotaci vírové struktury o úhel  $\pi/2$ . Rotace a expanze vírové struktury tvořené třemi víry stejného topologického náboje  $m = 1$  je znázorněna na obr. 2. Příčná intenzitní stopa vírového svazku je na obrázcích (a)–(d)



3/ Interference trojice vírů s topologickými náboji  $m = 1$  a referenční (a) rovinné vlny a (b) sférické vlny

vyhodnocena v rovině pasu  $z = 0$  a ve vzdálenostech  $z = q/2$ ,  $z = q$  a  $z = 2q$  vyjádřených pomocí Rayleighovy vzdálenosti  $q$ . Ve výchozí rovině pasu jsou víry lokalizovány v bodech o souřadnicích  $r_1 = r_2 = r_3 = 0,8w$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2\pi/3$  a  $\varphi_3 = 4\pi/3$ . Topologie této vírové struktury je na obr. 3 ilustrována pomocí interference s rovinnou a sférickou vlnou.

## OPTICKÝ DIPÓL

Názornou a z fyzikálního hlediska zajímavou situaci představuje dvojice vírů opačného topologického náboje uhnížděná v gaussovském svazku. Pro jednoduchost budeme pracovat s vírovými fázovými defekty o topologických nábojích  $\pm 1$ , které jsou v rovině  $z = 0$  lokalizovány v bodech  $(\Delta x, 0)$  a  $(-\Delta x, 0)$ . V rovině pasu pak může být komplexní amplituda svazku zapsána ve tvaru

$$U_0(r, \varphi, t) = \exp(-r^2/w^2) \exp(i\omega t) [r \exp(i\varphi) - \Delta x] [r \exp(-i\varphi) + \Delta x]. \quad (10)$$

Popíšeme-li volné šíření svazku ve frekvenčním prostoru pomocí přenosového faktoru vyjádřeného ve Fresnelově aproximaci, můžeme pro komplexní amplitudu v rovině  $z = Z$  psát

$$U(r, \varphi, Z, t) = (1 - i\eta)^3 \exp(i\omega t - ikZ) \exp[-r^2/w^2(Z)] \times \{-i\eta(1 - i\eta)w^2 + [r \exp(i\varphi) - \Delta x(1 - i\eta)] \times [r \exp(i\varphi) + \Delta x(1 - i\eta)]\} \quad (11)$$

Při šíření svazku se polohy center vírů mění. Jejich trajektorie lze vyjádřit pomocí souřadnic  $r$  a  $\varphi$ , které jsou funkcemi podélné souřadnice  $z$ . Pro danou vzdálenost šíření svazku  $z = Z$  mohou být souřadnice bodů, ve kterých jsou víry lokalizovány, určeny z podmínky

$$\Re\{U(r, \varphi, Z, t)\} = \mathcal{I}\{U(r, \varphi, Z, t)\} = 0. \quad (12)$$

Jejím řešením obdržíme

$$r(Z) = (1 + \eta)^{1/2} \Delta x \quad (13)$$

$$\varphi(Z) = \arcsin[\eta(w^2/2\Delta x^2 - 1)/(1 + \eta)^{1/2}]. \quad (14)$$

Přemísťování center vírů je výhodné sledovat v souřadném systému, který je spojený s expandujícím nosným gaussovským svazkem. Kartézské souřadnice  $(x', y')$  jsou v tomto systému normovány poloměrem gaussovského svazku

$$x' = x/[w(1 + \eta)^{1/2}], \quad (15)$$

$$y' = y/[w(1 + \eta)^{1/2}]. \quad (16)$$

S použitím (13) a (14) mohou být přepsány ve tvaru

$$x' = \pm \rho \{1 - \eta^2 [1/(2\rho^2) - 1] / (1 + \eta^2)\}^{1/2} \quad (17)$$

$$y' = \rho \eta [1/(2\rho^2) - 1] / (1 + \eta^2)^{1/2} \quad (18)$$

kde  $\rho = \Delta x/w$ . Ze vztahu  $x'^2 + y'^2 = \rho^2$ , je potom zřejmé, že při šíření svazku se centra vírů přemísťují po kružnici o poloměru  $\rho$ , který je určen výchozí vzdáleností vírů  $\Delta x$  a poloměrem pasu gaussovského svazku  $w$ . S použitím (17) a (18) dostáváme pro  $z = 0$  předpokládanou počáteční polohu vírových center  $x' = \pm \rho$  a  $y' = 0$ . Pro velké, limitně nekonečné vzdálenosti šíření svazku můžeme jejich polohu specifikovat souřadnicemi

$$x'(\infty) = \pm \rho \{1 - [1/(2\rho^2) - 1]^2\}^{1/2} \quad (19)$$

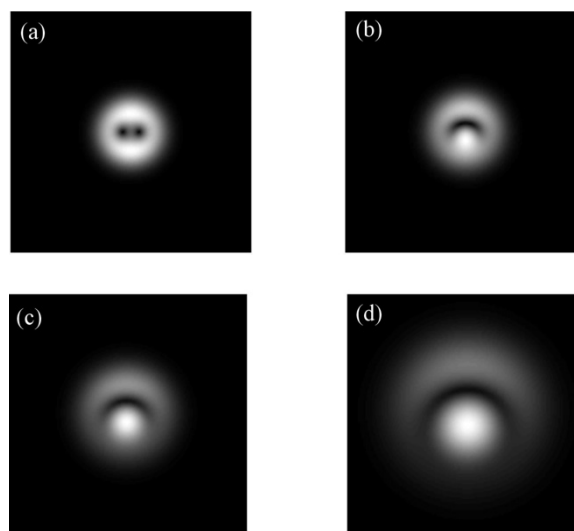
$$y'(\infty) = \rho [1/(2\rho^2) - 1]. \quad (20)$$

Pro vývoj topologie vírového svazku je rozhodující, zda se vírová centra mohou setkat v tomtež bodě příčné roviny  $z = \text{konst}$ . Pokud tato situace nastane, víry se vzhledem k opačnému znaménku topologického náboje interferencí vyruší a dojde k jejich anihilaci. V opačném případě zůstanou víry ve svazku zachovány i ve vzdálené oblasti. Ze vztahů (17) a (18) je zřejmé, že vírová centra se setkají v témže bodě pouze tehdy, když  $x' = -x' = 0$ .

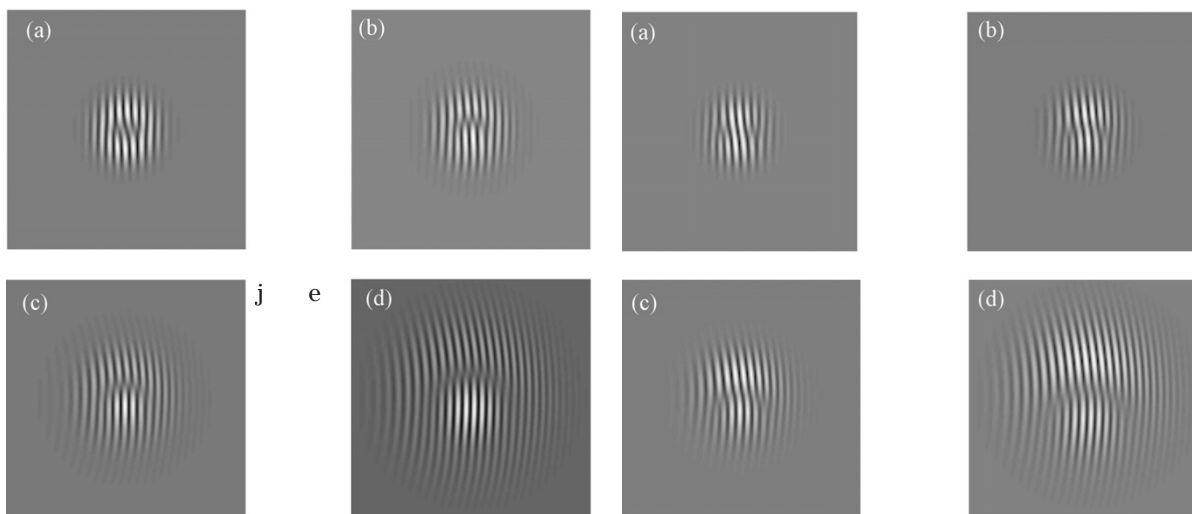
S použitím této podmínky dostaneme

$$\eta = 1/\{[1/(2\rho^2) - 1]^2 - 1\}^{1/2} \quad (21)$$

Protože  $\eta$  je poměr vzdálenosti šíření svazku  $Z$  a Rayleighovy vzdálenosti  $q$ , mají fyzikální smysl jen taková řešení podmínky (21), pro něž je  $\eta$  reálná veličina. Tato situace nastává pro  $\rho \leq 1/2$ . Je zřejmé, že vývoj dvojice vírů opačného topologického náboje



4/ Přitahování a následná anihilace vírů opačného topologického náboje při šíření volným prostorem ( $\Delta x/w = 0.4$ ): (a) rovina pasu  $z = 0$ , (b)  $z = q/2$ , (c)  $z = q$ , (d)  $z = 2q$

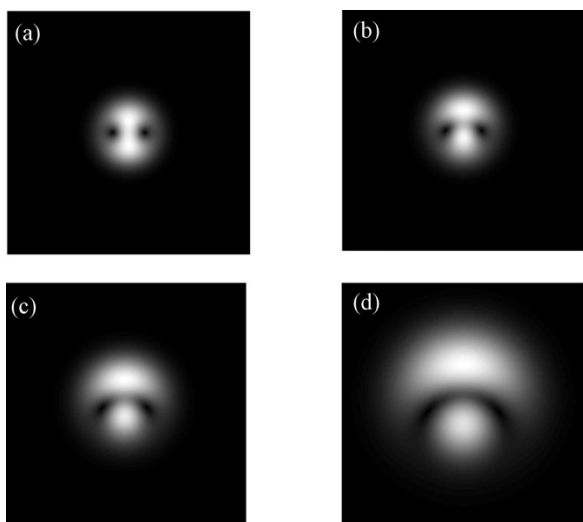


5/ Zviditelnění přitahování a anihilace vírů opačného topologického náboje interferencí s referenční rovinnou vlnou (parametry stejné jako v obr. 4)

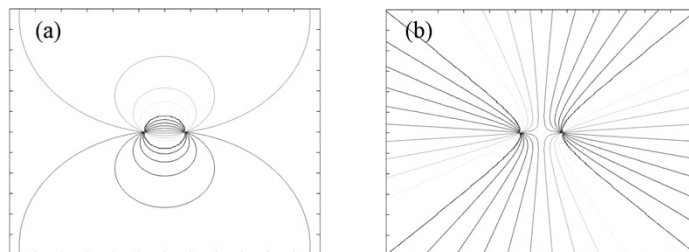
7/ Zviditelnění vývoje vírů opačného topologického náboje interferencí s referenční rovinnou vlnou (parametry stejné jako v obr. 6)

umístěných v gaussovském svazku je ovlivněn poměrem počáteční polohy vírových center v rovině  $z = 0$  a poloměru pasu  $w$ . Vzájemná anihilace vírů nastane při šíření svazku do konečné vzdálenosti tehdy, když  $\rho < 1/2$ . Je-li  $\rho = 1/2$ , pak anihilace vírů nastává ve velmi velké, teoreticky nekonečné vzdálenosti. V případě  $\rho > 1/2$  se víry nemohou setkat v téže bodě příčné roviny a zůstávají ve svazku zachovány. Výsledky počítačové simulace jsou ilustrovány na obr. 4–7. Na obr. 4 je znázorněn vývoj optického dipólu při šíření volným prostorem pro případ, kdy vírová centra jsou v rovině pasu natolik blízká, že splňují podmínku vzájemné anihilace ( $\Delta x / w = 0,4$ ). Příčný intenzitní profil svazku na obrázcích (a)–(d) odpovídá rovině pasu  $z = 0$  a vzdálenostem  $z = q / 2$ ,  $z = q$  a  $z = 2q$ . Anihilace

vírů je zřejmá z interferenčních vzorů na obr. 5. Interferenční vzor (a) zviditelňuje topologii svazku v rovině pasu  $z = 0$ . Přítomnost vírů je zřejmá ze zřetelného vidličkovitého rozštěpení interferenčních proužků. Rozdílná znaménka topologických nábojů vírů se projevují opačnou orientací vidličkovitých rozštěpení. Další interferenční vzory jsou vyhodnoceny pro stejné vzdálenosti jako na obr. 4. Z obrázku (d), který odpovídá dvojnásobné Rayleighově vzdálenosti, je zřejmý zánik vidličkovitých rozštěpení dokumentující anihilaci vírů. Optický dipól, jehož vývoj je ilustrován na obr. 6, obsahuje dvojici vírů se vzájemnou vzdáleností překračující podmínku anihilace ( $\Delta x / w = 0,8$ ). Vírová centra se při šíření volným prostorem k sobě přibližují, k jejich splnutí a vzájemné anihilaci však nedojde. Tento fakt je zřejmý z obr. 7, který ukazuje zřetelné vidličkovité rozštěpení interferenčních proužků ve všech sledovaných vzdálenostech. Přitahování resp. odpuzování optických vírů opačného resp. stejného topologického náboje má zřejmou analogii s elektrostatikou. Ta je názorně demonstrována, provedeme-li u dvojice vírů vyhodnocení křivek konstantní fáze v rovině  $x, y$ . Tyto



6/ Vývoj dvojice vírů opačného topologického náboje pro parametry při kterých nenastává anihilace ( $\Delta x / w = 0,8$ ): (a) rovina pasu  $z = 0$ , (b)  $z = q/2$ , (c)  $z = q$ , (d)  $z = 2q$ .



8/ Analogie vírové optiky a elektrostatiky. Křivky konstantní fáze v rovině  $x, y$  (a) pro optický dipól (víry opačného topologického náboje) a (b) pro víry stejného topologického náboje.

izolinie jsou na obr. 8 znázorněny pro dvojici vírů opačného a stejného topologického náboje. Jejich tvar je nápadně podobný siločarám elektrostatického pole získaným pro dvojici opačných a souhlasných elektrických nábojů.

## ÚHLOVÝ MOMENT HYBNOSTI VÍROVÉHO SVAZKU

Úhlový moment hybnosti přenášený laserovými svazky je významný jak z hlediska základního tak i aplikovaného výzkumu. Má mechanické účinky, které se při interakci s atomy a mikročásticemi projevují jejich rotací. Úhlový moment hybnosti světelných svazků je tvořen dvěma složkami. Jednou z nich je orbitální úhlový moment hybnosti, druhou spin. Spin je závislý na polarizačním stavu svazku a je nulový pro svazky s lineární polarizací. Při interakci s částicemi vyvolává jejich rotaci kolem vlastní osy. Orbitální moment hybnosti souvisí s vířivým tokem elektromagnetické energie a vzniká u svazků, jejichž vlnoplocha má šroubovitý tvar. Při interakci svazku s částicí způsobuje její rotační pohyb kolem centra víru neseného svazkem. Laserové vírové svazky proto vykazují výrazné účinky orbitálního úhlového momentu hybnosti. Moment hybnosti  $\vec{J}$  může být vyjádřen jako vektorový součin polohového vektoru  $\vec{r}$  a lineárního momentu hybnosti  $\vec{p}$ ,

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (22)$$

Při šíření svazku ve vakuu může být vektor  $\vec{r}$  zapsán pomocí vektoru udávajícího hustotu toku elektromagnetické energie, tzv. Poyntingova vektoru  $\vec{S}$ ,

$$\vec{p} = \vec{S}/c^2 \quad (23)$$

kde  $c$  je rychlost šíření světla ve vakuu. Úhlový moment hybnosti je při šíření svazku podél osy  $z$  určen  $z$ -ovou složkou vektoru  $\vec{J}$ ,

$$J_z = (\vec{r} \times \vec{S})_z / c^2 \quad (24)$$

V prostorovém bodě určeném kruhovými válcovými souřadnicemi  $(r, j, z)$  je velikost úhlového momentu hybnosti dána vztahem

$$J_z = r S_\varphi / c^2 \quad (25)$$

kde  $S_\varphi$  je azimutální složka Poyntingova vektoru daná jako

$$S_\varphi = -S_x \sin(\varphi) + S_y \cos(\varphi). \quad (26)$$

Provedeme-li normování objemovou hustotou energie  $W$ ,

$$j_z = J_z / W \quad (27)$$

pak  $j_z$  představuje velikost orbitálního úhlového momentu hybnosti, který je přenášen fotonem svazku.

Skalární komplexní amplituda  $U$  splňuje vlnovou rovnici. Její úpravou můžeme získat vztah, který má tvar zákona zachování energie

$$\nabla \cdot \vec{S}' + \partial W' / \partial t = 0 \quad (28)$$

kde

$$\vec{S}' = -(\nabla U \partial U^* / \partial t + \nabla U^* \partial U / \partial t), \quad (29)$$

$$W' = \nabla U \cdot \nabla U^* + (1/c^2) |\partial U / \partial t|^2. \quad (30)$$

Veličiny  $\vec{S}'$  a  $W'$  můžeme považovat za skalární aproximaci hustoty toku elektromagnetické energie a objemové hustoty elektromagnetické energie a mohou být použity pro výpočet úhlového momentu hybnosti.

## ORBITÁLNÍ ÚHLOVÝ MOMENT HYBNOSTI

Orbitální úhlový moment hybnosti můžeme jednoduše demonstrovat na paraxiálním monochromatickém svazku s centrálně umístěným vírem

$$U(r, \varphi, z, t) = u(r, z) \exp(i\omega t), \quad (31)$$

kde

$$u(r, z) = a(r, z) \exp[i(m\varphi - kz)], \quad (32)$$

a  $m$  označuje topologický náboj víru. Dosadíme-li do (25) místo azimutální složky Poyntingova vektoru její náhradu získanou v rámci skalární aproximace pomocí (29), dostaneme pro orbitální úhlový moment hybnosti relaci

$$J_z = 2m\omega |a|^2 / c^2 \quad (33)$$

Vypočteme-li objemovou hustotu energie  $W$  pomocí aproximativního vztahu (30) s uvážením paraxiální aproximace, pak můžeme psát

$$W = 2k^2 |a|^2. \quad (34)$$

Velikost orbitálního úhlového momentu hybnosti příslušejícího fotonu svazku o kruhové frekvenci  $\omega$  je pak dána jako

$$j_z = m/\omega. \quad (35)$$

Orbitální úhlový moment hybnosti závisí na parametru  $m$  charakterizujícím spirality vlnoplochy svazku a je nepřímo úměrný jeho kruhové frekvenci. Tato skutečnost je důvodem, proč lze jeho mecha-

nické účinky snáze demonstrovat v mikrovlnné oblasti spektra než v oblasti optické.

## SPIN

Při demonstraci spinu je nutné zahrnout vliv polarizace svazku a přejít od skalárního popisu k popisu vektorovému. To je možné provést například s využitím elektromagnetických potenciálů. Vektory elektromagnetického pole  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  mohou být v tomto případě zapsány pomocí vektorového potenciálu  $\vec{A}$  a skalárního potenciálu  $\phi$  ve tvaru

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (36)$$

$$\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t - \nabla\phi \quad (37)$$

Budeme-li předpokládat, že pracujeme se svazkem kontinuálně zářícího laseru, pak vektor  $\vec{E}$  může být zapsán ve tvaru

$$\vec{E} = (1/2) [\vec{e} \exp(i\omega t) + \vec{e}^* \exp(-i\omega t)], \quad (38)$$

kde  $\vec{e}$  je vektorová komplexní amplituda elektrického pole. Podobným způsobem lze pomocí vektorů  $\vec{b}$  zapsat i vektor magnetické indukce  $\vec{B}$ . S využitím Lorentzovy kalibrační podmínky pak můžeme psát

$$\vec{e} = -i [\vec{A}\omega + (c^2/\omega)\nabla(\nabla \cdot \vec{A})], \quad (39)$$

$$\vec{b} = \nabla \times \vec{A} \quad (40)$$

Vektorový potenciál vytvoříme pomocí monochromatické skalární komplexní amplitudy paraxiálního vírového svazku (32)

$$\vec{A}(r, \varphi, z) = (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})u(r, z), \quad (41)$$

kde  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  jsou jednotkové vektory. Pro další postup je výhodné převést kartézské složky vektorového potenciálu na složku radiální a azimutální a vypočítat vektorové komplexní amplitudy  $\vec{e}$  a  $\vec{b}$ . Azimutální složku, která souvisí s úhlovým momentem hybnosti, pak můžeme psát ve tvaru

$$S_\varphi = (1/\mu_0)[(e_z b_r^* - e_r b_z^*) + c.c.] \quad (42)$$

kde c.c. označuje komplexně sdružený výraz,  $\mu_0$  označuje permeabilitu vakua a složky vektorů  $\vec{e}$  a  $\vec{b}$  jsou dány vztahy

$$e_r = -i[\omega A_r + (c^2/\omega)\partial(\nabla \cdot \vec{A})/\partial r], \quad (43)$$

$$e_z = -i(c^2/\omega)\partial(\nabla \cdot \vec{A})/\partial z, \quad (44)$$

$$b_r = (1/r)\partial A_z/\partial\varphi - \partial A_\varphi/\partial z, \quad (45)$$

$$b_z = (1/r)[\partial(rA_\varphi)/\partial r - \partial A_r/\partial\varphi]. \quad (46)$$

$A_r$  a  $A_\varphi$  označuje radiální a azimutální složku vektorového potenciálu. S využitím paraxiální aproximace můžeme získat azimutální složku Poyntingova vektoru, která po dosazení do (25) umožňuje zapsat velikost úhlového momentu hybnosti ve tvaru

$$J_z = -2\omega m \varepsilon_0 (|\alpha|^2 + |\beta|^2) |a|^2 + i\omega \varepsilon_0 (\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \partial(r|a|^2)/\partial r, \quad (47)$$

kde  $\varepsilon_0$  označuje permitivitu vakua. Vypočteme-li pomocí vektorů pole objemovou hustotu elektromagnetické energie, pak s přihlédnutím k paraxiální aproximaci může být její vyjádření zjednodušeno na tvar

$$W = 2\omega^2 \varepsilon_0 (|\alpha|^2 + |\beta|^2) |a|^2. \quad (48)$$

Pro normovaný úhlový moment hybnosti pak můžeme psát

$$j_z = -m/\omega + [\sigma/(2\omega|a|^2)]\partial(r|a|^2)/\partial r \quad (49)$$

$$\sigma = i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)/(|\alpha|^2 + |\beta|^2). \quad (50)$$

Koeficient  $\sigma$  popisuje polarizační stav použitého vektorového potenciálu. První člen úhlového momentu hybnosti (49) je orbitální moment hybnosti, druhý člen závisí na polarizačním stavu svazku a popisuje spin. Pro pravotočivou resp. levotočivou kruhovou polarizaci nabývá koeficient  $\sigma$  hodnot  $\pm 1$ , pro lineární polarizaci dostáváme  $\sigma = 0$ .

## EXPERIMENTÁLNÍ REALIZACE OPTICKÉHO VÍROVÉHO SVAZKU

### Astigmatický čočkový konvertor

Svazky kontinuálně vyzářujících laserů mohou být popsány jako řešení Helmholtzovy rovnice získané v paraxiální aproximaci. Nejjednodušším typem řešení je gaussovský svazek, který vystupuje přímo z rezonátoru ideálního laseru. Jako obecnější typy řešení paraxiální Helmholtzovy rovnice lze získat prostorově modulované gaussovské svazky. V kartézském souřadném systému je modulace podél os  $x$  a  $y$  dána Hermiteovými polynomy  $n$ -tého, resp.  $m$ -tého řádu. Komplexní amplituda  $U_{n,m}$  pak určuje tzv. hermiteovský-gaussovský (H-G) svazek, který je charakterizovaný módovými indexy  $n$  a  $m$ . S použitím kruhových válcových souřadnic  $r$  a  $\varphi$  je radiální modulace svazku popsána Laguerreovými polynomy  $p$ -tého řádu, azimutální modulace je dána členem  $\exp(i l \varphi)$ . Svazky tohoto typu se nazývají laguerreovské-gaussovské (L-G) svazky a jsou charakterizovány módovými indexy  $p$  a  $l$ . Pro módové indexy  $n=m=0$  a  $p=l=0$  přecházejí H-G i L-G svazky v základní prostorově nemodulovaný

gaussovský svazek. Pro módové indexy  $l \neq 0$  popisuje azimutálně závislý fázový člen L-G svazků šroubovitou vlnoplochu. Fázová singularita, která se objevuje na ose svazku, souvisí s optickým vírem topologického náboje  $l$ . Optické vírové svazky jsou tedy reprezentovány L-G svazky. Přestože teoretická analýza umožňuje získat svazky tohoto typu přímo v ideálním rezonátoru laseru, v praktických případech k jejich generaci obvykle nedochází. Ustanovení L-G módu vyžaduje dokonalou rotační symetrii rezonátoru, kterou je obtížné zabezpečit. Mnohem snadněji lze dosáhnout generace H-G svazků. Módy řádu vyššího než nultého lze získat vhodným prostorovým rozložením ztrát uvnitř rezonátoru. Pro generaci L-G svazků mimo rezonátor laseru pak lze využít toho, že H-G svazky vytvářejí úplnou ortonormální bázi, pomocí níž je možné vyjádřit komplexní amplitudu libovolného svazku. S využitím této vlastnosti je možné L-G svazky získat jako lineární superpozici snadno dostupných H-G svazků [17]. Např. L-G svazek s módovými indexy  $p=0$  a  $l=1$ , představující vírový svazek s azimutální fázovou modulací  $\exp(i\varphi)$ , lze vytvořit koherentním součtem H-G svazků s komplexními amplitudami  $U_{01}$  a  $U_{10}$ , které mají vzájemný fázový posuv  $\pi/2$ . Tento fázový posuv je možné vytvořit pomocí astigmatického čočkového konvertoru, který je tvořen dvěma válcovými čočkami [18]. Čočky mají stejné ohniskové vzdálenosti  $f'$  a vzájemnou vzdálenost  $2^{1/2}f'$ . Intenzitní profil H-G svazků  $U_{01}$  a  $U_{10}$  a výsledek jejich koherentního součtu provedeného s konstantním fázovým posuvem  $\pi/2$  znázorňuje obr. 9.

### Spirální fázová destička

Výhodným způsobem lze optický vír související se šroubovitým tvarem vlnoplochy vytvořit pomocí transparentní destičky, jejíž tloušťka narůstá s azimutálním úhlem [19]. Taková fázová destička o indexu lomu  $n$  je navržena tak, že při změně azimutálního úhlu o  $2\pi$  je vytvořen skok tloušťky destičky, který odpovídá celočíselnému násobku vlnové délky svazku dopadajícího na destičku. Je-li tento skok tloušťky destičky  $\Delta t$  dán vztahem

$$\Delta t = l\lambda / (n - 1), \quad (51)$$

pak světelný svazek získává po průchodu destičkou fázovou modulaci určenou členem  $\exp(il\varphi)$  a stává se tak vírovým svazkem s topologickým nábojem  $l$ .

### Počítačem vytvářené hologramy

Použití počítačem generovaných hologramů je rozšířené pro vytváření monochromatických svazků se speciálním amplitudovým a fázovým profilem. Hologram je vytvořen jako počítačem generovaný

interferenční vzor, který vznikne interferencí rovinné vlny a požadovaného svazku. Při osvětlení hologramu rovinnou vlnou má svazek získaný v prvním difrakčním řádu požadovanou strukturu. Při vytváření vírového svazku se šroubovitou vlnoplochu má interferenční vzor typickou strukturu s vidličkovitým rozštěpením interferenčních proužků. Tyto hologramy mohou být vytvářeny jako binární amplitudové hologramy. Rozhraní mezi světlými a tmavými proužky jsou definována vztahem [20],

$$N = 2R \cos \Phi / T - l\Phi / \pi \quad (52)$$

kde  $N$  je celočíselná konstanta,  $T$  je perioda vzniklé mřížky a  $R$  a  $\Phi$  jsou kruhové válcové souřadnice v rovině mřížky. Při osvětlení takového hologramu gaussovským svazkem dostáváme v prvním difrakčním řádu vírový svazek se šroubovitou vlnoplochu popsanou fázovým členem  $\exp(il\varphi)$ .

### PERSPEKTIVY VÝZKUMU A APLIKACE

Současná singulární optika poskytuje poměrně široký prostor pro základní a aplikovaný výzkum jevů souvisejících s projevy singularit skalárních a vektorových optických polí. Zájem je věnován zejména spirální fázovým singularitám, tzv. optickým vírům. Jejich atraktivnost spočívá především ve spirálním toku elektromagnetické energie, který souvisí s nenulovým orbitálním momentem hybnosti. Intenzivně jsou studovány jeho mechanické účinky na mikročástice a atomy, které otevírají nové aplikační možnosti. Optické vírové svazky rozšiřují možnosti manipulace mikročástic prováděné tzv. optickou pinzetou [21] pomocí gaussovských laserových svazků. V běžných podmínkách je optická pinzeta použitelná pro zachycení a manipulaci málo absorbuje částic jejichž index lomu je mírně vyšší než index lomu okolního prostředí. Pomocí vírových svazků byly realizovány „tmavé“ optické pasti, které mohou zachytit jiným způsobem obtížně manipulovatelné částice. Fokusaný vírový svazek, který je na ose tmavý, vytváří „světelný komín“, kterým jsou částice tlačeny radiačním tlakem a v blízkosti ohniska zachyceny. Tímto způsobem lze zachycovat absorbující i reflektující částice a částice s nízkým indexem lomu umístěné v kapalině s vysokým indexem lomu. V důsledku orbitálního momentu hybnosti, případně spinu, optických vírových svazků, dochází současně k rotaci zachycených mikročástic. Pro tuto oblast aplikací jsou důležité tzv. nedifrakční vírové svazky. Jedná se o vírové struktury uhnížděné v nosných svazcích, které při šíření v ideálním případě nevykazují difrakční divergenci (v časopise *Jemná mechanika a optika* již bylo o těchto svazcích referováno [22]). Kromě strukturální stability mají nedifrakční



frakční vírové svazky schopnost samoregenerace. Ta se projevuje tím, že vírový svazek porušený interakcí s mikročásticí, kterou svým spirálním tokem energie roztočí, při následném volném šíření samovolně obnoví svou původní vírovou strukturu a je schopen opětovné interakce doprovázené přenosem orbitálního momentu hybnosti [23, 24].

Strukturální stabilita optických vírových svazků z nich činí vhodné kandidáty pro přenos informace vysokými rychlostmi na velké vzdálenosti. Navíc přítomnost nebo nepřítomnost tmavého centra víru může indikovat 1 nebo 0, zatímco velikost a znaménko jeho topologického náboje poskytuje dodatečné parametry pro přenos informace. Aplikace v této oblasti podněcují zájem o studium koherenčních vlastností a informační entropie optických vírových svazků [25, 26].

Další významný směr výzkumu souvisí s vektorovými vírovými svazky, u kterých se kromě obvyklých polarizačních stavů studuje i tzv. radiální a azimutální polarizace související s prostorovou závislostí kmitosměru vektorů elektromagnetického pole a se singularitou kmitosměru v místě optického víru.

Významným způsobem pronikly laserové vírové svazky i do oblasti nelineární optiky. Intenzivně je studována konverze topologie svazku v důsledku nelineárních interakcí. Nedávno provedené experimenty otevřely novou cestu výzkumu sestupné frekvenční konverze, při které dochází v nelineárním krystalu ke generaci provázaných fotonových párů v signálním a jalovém svazku. Při čerpání krystalu optickým vírovým svazkem byla prokázána rovněž provázanost orbitálních momentů hybnosti přenášených fotony signálního a jalového svazku [27, 28]. Tento jev má hluboké fyzikální souvislosti, jejichž analýza může přinést nové poznatky a aplikace.

#### Poděkování

Výzkum optických vírových svazků je na katedře optiky PřF UP Olomouc a ve Výzkumném centru pro optiku UP Olomouc částečně podporován grantem LN00A015.

#### Literatura

- [1] J. F. Nye, M. V. Berry, Proc. R. Soc. London Ser. **A 336**, 165 (1974).
- [2] M. Soskin, M. V. Vasnetsov, Progress in Optics **42**, 219 (2001).
- [3] P. Culet, L. Gil, F. Rocca, Opt. Commun. **73**, 403 (1989).
- [4] I. V. Basistiy, M. S. Soskin, M. V. Vasnetsov, Opt. Commun. **119**, 604 (1995).
- [5] G. F. Brand, J. Mod. Opt. **44**, 1243 (1997).
- [6] V. Y. Bazhenov, M. Soskin, M. V. Vasnetsov, J. Mod. Opt. **39**, 985 (1992).
- [7] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman, Phys. Rev. **A 45**, 8185 (1992).
- [8] L. Allen, M. J. Padgett, M. Babiker, Progress in Optics **39**, 291 (1999).
- [9] M. J. Padgett, L. Allen, Opt. Commun. **121**, 36 (1995).
- [10] S. M. Barnett, L. Allen, Opt. Commun. **110**, 670 (1994).
- [11] H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, Rubinsztein-Dunlop, Phys. Rev. Lett. **75**, 826 (1995).
- [12] N. B. Simpson, L. Allen, M. J. Padgett, J. Mod. Opt. **43**, 2485 (1996).
- [13] H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, Rubinsztein-Dunlop, J. Mod. Opt. **42**, 217 (1995).
- [14] K. Dholakia, N. B. Simpson, M. J. Padgett, Phys. Rev. **A 54**, R3742 (1996).
- [15] J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M. J. Padgett, Phys. Rev. **A 56**, 4193 (1997).
- [16] Y. S. Kivshar, E. A. Ostrovskaya, Opt. Photon. News, **12**, 27 (2001).
- [17] E. Abramochkin, V. Volostnikov, Opt. Commun. **83**, 123 (1991).
- [18] M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. E. L. O. Van der Veen, J. P. Woerdman, Opt. Commun. **96**, 123 (1993).
- [19] M. W. Beijersbergen, R. P. C. Coerwinkel, M. Kristensen, J. P. Woerdman, Opt. Commun. **112**, 321 (1994).
- [20] G. F. Brand, J. Mod. Opt. **44**, 1243 (1997).
- [21] A. Jonáš, L. Šrámek, P. Zemánek, M. Liška, Jemná mechanika a optika **45**, 344 (1999).
- [22] Z. Bouchal, J. Wagner, Jemná mechanika a optika **45**, 317 (2000).
- [23] Z. Bouchal: *Resistance of nondiffracting vortex beam against amplitude and phase perturbations*, Opt. Commun. (2002), v tisku.
- [24] Z. Bouchal: *Revival of the orbital angular momentum of the vortex beam after interaction with nontransparent obstacle*, In: Photonics Prague 02, Proc. Conf. Photonics, Praha (2002), v tisku.
- [25] Z. Bouchal, J. Peřina: *Nondiffracting beams with controlled spatial coherence*, J. Mod. Opt., (2002), v tisku.
- [26] G. S. Agarwal, J. Banerji, Opt. Lett. **27**, 800 (2002).
- [27] J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen, M. Padgett, Phys. Rev. **A 59**, s. 3950 (1999).
- [28] A. Mair, A. Vaziry, G. Welsh, A. Zeilinger, Nature **412**, 313 (2001).