INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace a zvýšení atraktivity studia optiky
reg. č.: CZ.1.07/2.2.00/07.0289

Úlohy k přednášce Vlnová a paprsková optika OPT/VPO1X

(řešení úloh pomocí programů OSLO Premium fy Lambda Research a MATLAB)

Zdeněk Bouchal

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

OBSAH:

I. Šíření světla nehomogenním prostředím

I.1 Prostředí s axiálním gradientem
I.2 SELFOC – prostředí s radiálním gradientem
I.3 Gradientní čočka
I.4 Luneburgova čočka
I.5 Maxwellova rybí čočka
I.6 Woodova čočka

II. Paraxiální zobrazování

II.1 Zobrazení kuličkou
II.2 Afokální čočka
II.3 Kuličkový retroreflektor

III. Gaussovský svazek

III.1 Volné šíření GS
III.2 Obecná transformace GS čočkou
III.3 Fokusace GS čočkou
III.4 Kolimace GS dvoučlenným systémem
III.5 Průchod GS nehomogenním prostředím
III.6 Určení módů SELFOC prostředí

I. Šíření světla nehomogenním prostředím

Index lomu se mění v prostoru: $n = n(\vec{r})$

Monochromatická EM vlna

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}(\vec{r})\exp[i\omega t + ik\varphi(\vec{r})]$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{h}(\vec{r})\exp[i\omega t + ik\varphi(\vec{r})]$$

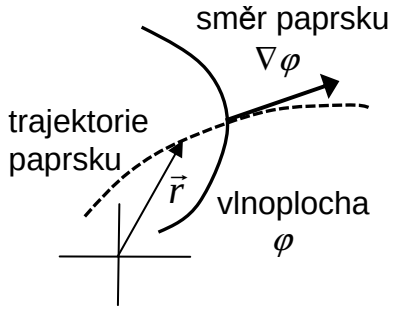
$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}n$$

➡ Maxwellovy rovnice

$\lambda \to 0$ ➡

Eikonálová rovnice

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi = n^2$$



Paprsková rovnice

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n$$

Řešení paprskové rovnice:

- analytické
  (s použitím paraxiální aproximace)
- numerické
  (Runge-Kuttova metoda, program Oslo)

Typy nehomogenních prostředí

(možnost simulace v programu Oslo):

- axiálně-radiální gradient
- axiální eliptický gradient
- Woodova čočka
- SELFOC gradient
- sférický gradient
- Maxwellova rybí oko
- Luneburgova čočka

Úloha I.1: Prostředí s axiálním gradientem

Zadání: Určete trajektorii paprsků, které se šíří prostředím, jehož index lomu je určen funkcí $n = A + B \cdot z$, kde *A* a *B* jsou reálné konstanty. Paprsek leží v rovině (x,z) a v rovině *z=0* má vzdálenost x_0 od osy *z* a svírá s ní úhel θ_0. Řešení úlohy ověřte simulací šíření paprsku v programu Oslo Premium.

Postup výpočtu:

Paprsková rovnice pro axiální změnu indexu lomu : $\frac{d}{ds}(n \sin\theta) = 0$, kde $\sin\theta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}}$

Použití okrajové podmínky:

$$z = \int \frac{\sqrt{(A+Bz)^2 - A^2 \sin^2\theta_0}}{A \sin\theta_0} dx$$

Trajektorie paprsku:

$$x(z) = x_0 + \frac{zA\sin\theta_0}{\sqrt{(A+Bz)^2 - A^2 \sin^2\theta_0}}$$

Diskuze výsledku:

- Součin *n* sin θ je v prostředí konstantní – pro libovolnou vzdálenost šíření paprsku je splněn zákon lomu: $n(z)\sin\theta(z) = n_0 \sin\theta_0$
- Trajektorie paprsku je odlišná pro $B_1 = B$ a $B_2 = -B$.
- Pro B=0 je trajektorie paprsku přímočará: $x(z) = x_0 + z \cdot tg\theta_0$

Prostředí s axiálním gradientem – program OSLO Premium

Zadání parametrů prostředí:

Surface Data

Select special data type: arg

Gen | Setup | Wavelength | Field Points | Variables | Draw Off | Group | Notes

Lens: No name Zoom 1 of 1 Efl 5.6295e+35

Ent beam radius 5.000000 Field angle 45.000000 Primary wavln 0.587560

SRF	RADIUS	THICKNESS	APERTURE RADIUS		GLASS	SPECIAL
OBJ	0.000000	1.0000e+20	1.0000e+20		AIR	
AST	0.000000	100.000000	20.000000	A	GLASS1	G
2	0.000000	0.000000	25.368819	S	AIR	
IMS	0.000000	0.000000	25.368819	S		

The index distribution is given by

$$n(r,z) = n_0 + \mathbf{nz1}\,z + \mathbf{nz2}\,z^2 + \mathbf{nz3}\,z^3 + \mathbf{nz4}\,z^4 + \mathbf{nr1}\,r^2 + \mathbf{nr2}\,r^4 + \mathbf{nr3}\,r^6 + \mathbf{nr4}\,r^8$$

where

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Surface Note (N)
- Surface Control (F)
- Coordinates (C)
- Polynomial Asphere (A)
- Spline Surface (S)
- Diffractive Surface (D)
- Gradient Index (G) → Axial-Radial Gradient
- Multilayer Coating (M)
- Polarization Element (Z)
- User Surface (U)
- Interferometric Deformation (I)

Gradient Index Data < Surface Data

0.1

Surface 1

GDT ARG Step Size: 0.100000

WVN	Wavelength	NZ1	NZ2	NZ3	NZ4
1	0.587560	0.100000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.486130	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3	0.656270	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

WVN	Wavelength	NR1	NR2	NR3	NR4
1	0.587560	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.486130	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3	0.656270	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

GRIN coordinate system decentration/tilt: None

GDX	GDY	GDZ	GTA	GTB	GTC
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Delete GRIN Medium

Direct Glass Index Entry < Surface Data

1.5

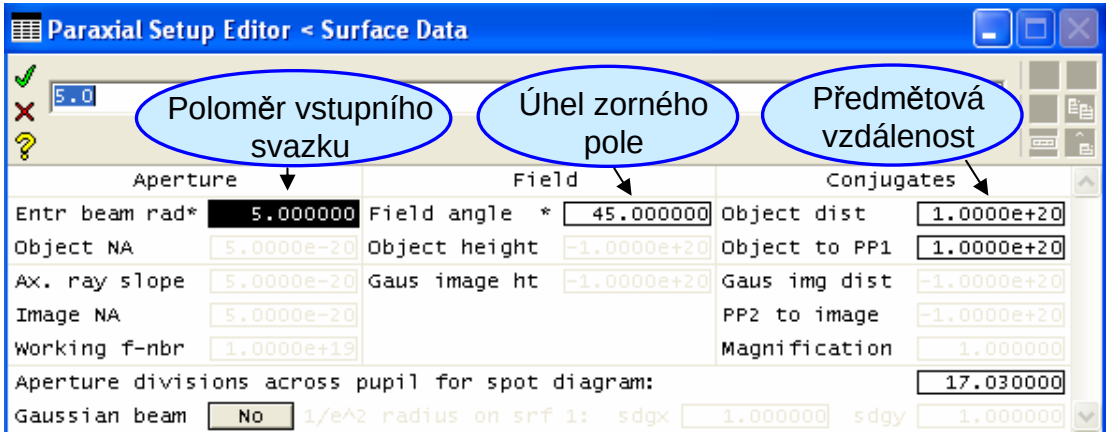
Surface 1

Glass Name: GLASS1

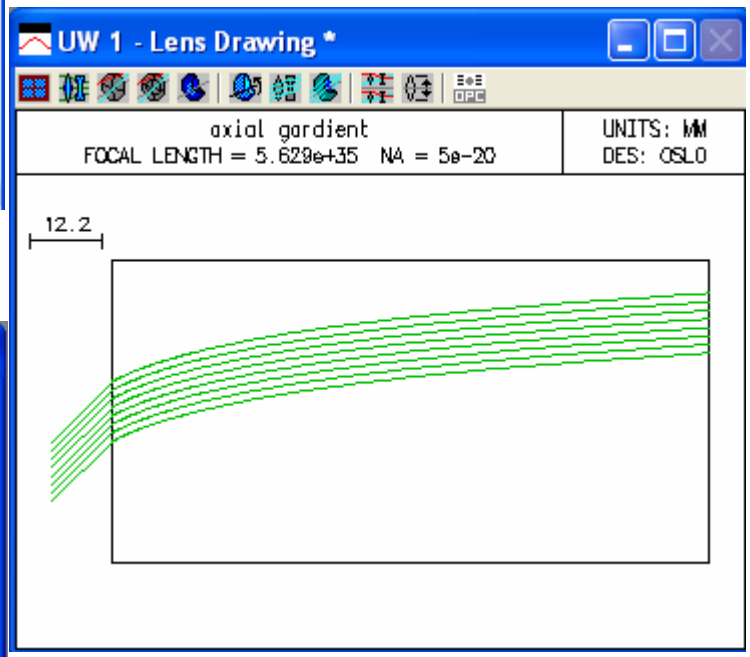
Nbr	Wavelength	Index
1	0.587560	1.500000
2	0.486130	1.000000
3	0.656270	1.000000

Prostředí s axiálním gradientem – program OSLO Premium

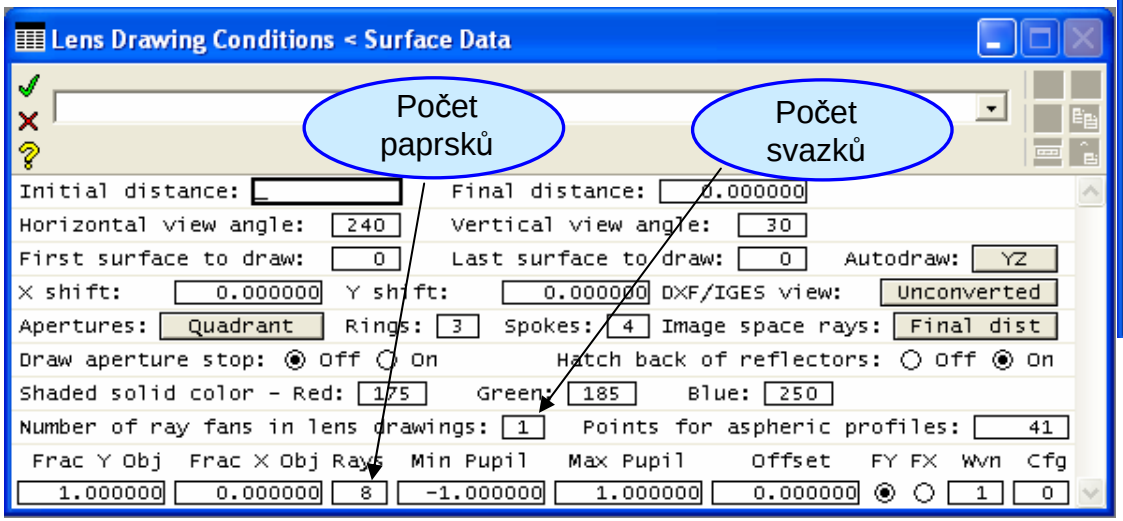
Zadání parametrů paprsku:



Znázornění chodu paprsků:



Podmínky vykreslení paprsků:



Úloha I.2: SELFOC – prostředí s radiálním gradientem

Zadání: Určete trajektorii paprsků, které se šíří prostředím, jehož index lomu je určen funkcí $n = n_0\left(1-\alpha^2 r^2/2\right)$, kde n_0 a α jsou reálné konstanty a $r^2 = x^2 + y^2$. Paprsek leží v rovině (*r,z*) a v rovině *z=0* má vzdálenost r_0 od osy *z* a svírá s ní úhel θ_0. Řešení úlohy ověřte simulací šíření paprsku v programu Oslo Premium.

Postup výpočtu:

Paprsková rovnice upravená s použitím paraxiální aproximace $d/ds \approx d/dz$: $\dfrac{d^2 r}{dz^2} + \alpha^2 r = 0$

Trajektorie paprsku: $r = r_0 \cos(\alpha z) + \dfrac{\theta_0}{\alpha}\sin(\alpha z)$

Sklon paprsku vzhledem k ose *z*: $\theta = -r_0 \alpha \sin(\alpha z) + \theta_0 \cos(\alpha z)$

Diskuze výsledku:

- Paprsky mají periodickou trajektorii, perioda je: $\Lambda = \dfrac{2\pi}{\alpha}$
- Pro paprsky, které v rovině *z=0* vycházejí z osy *z,* má periodická trajektorie amplitudu $r_{\max} = \theta_0/\alpha$.
- Pro paprsky, které jsou rovnoběžné s osou z, má periodická trajektorie amplitudu $r_{\max} = r_0$.

Prostředí SELFOC – program OSLO Premium

perioda: $\Lambda = 2\pi / nr1$

Zadání parametrů prostředí:

This gradient is a radial gradient in a form used by Nippon Sheet Glass (NSG).

$$n^2(r) = n_0^2\left[1-(\mathbf{nr1}r)^2 + \mathbf{nr2}(\mathbf{nr1}r)^4 + \mathbf{nr3}(\mathbf{nr1}r)^6 + \mathbf{nr4}(\mathbf{nr1}r)^8\right]$$

where

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left(\begin{array}{l} nr2 = nr3 = nr4 = 0: \\ n \approx n_0\left[1-(nr1r)^2/2\right] \end{array}\right)$$

Surface Data

Select special data type: con

Gen | Setup | Wavelength | Field Points | Variables | Draw Off

Lens: SELFOC Zoom 1 of 1

Ent beam radius 0.900000 Field angle 5.7296e-05 Primary wavln 0.587560

SRF	RADIUS		THICKNESS		APERTURE RADIUS		GLASS		SPECIAL
OBJ	0.000000		1.0000e+20		1.0000e+14		AIR		
AST	0.000000		31.420000		1.000000	A	GLASS1		G
2	0.000000		0.000000		0.900000	S	AIR		
IMS	0.000000		0.000000		0.900000	S			

- Surface Note (N)
- Surface Control (F)
- Coordinates (C)
- Polynomial Asphere (A)
- Spline Surface (S)
- Diffractive Surface (D)
- ✔ Gradient Index (G) → ✔ SELFOC Gradient
- Multilayer Coating (M)
- Polarization Element (Z)
- User Surface (U)
- Interferometric Deformation (I)

Gradient Index Data < Surface Data

0.1

Surface 1

GDT SEL Step Size: 0.100000

WVN	Wavelength	NR1	NR2	NR3	NR4
1	0.587560	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.486130	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3	0.656270	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

GRIN coordinate system decentration/tilt: None

GDX	GDY	GDZ	GTA	GTB	GTC
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Delete GRIN Medium

Direct Glass Index Entry < Surface Data

1.5

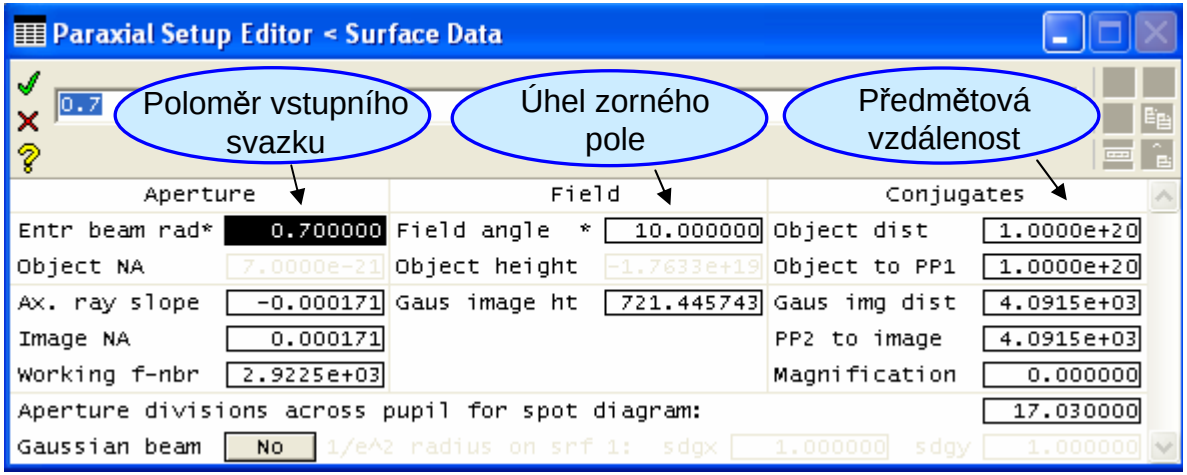
Surface 1

Glass Name: GLASS1

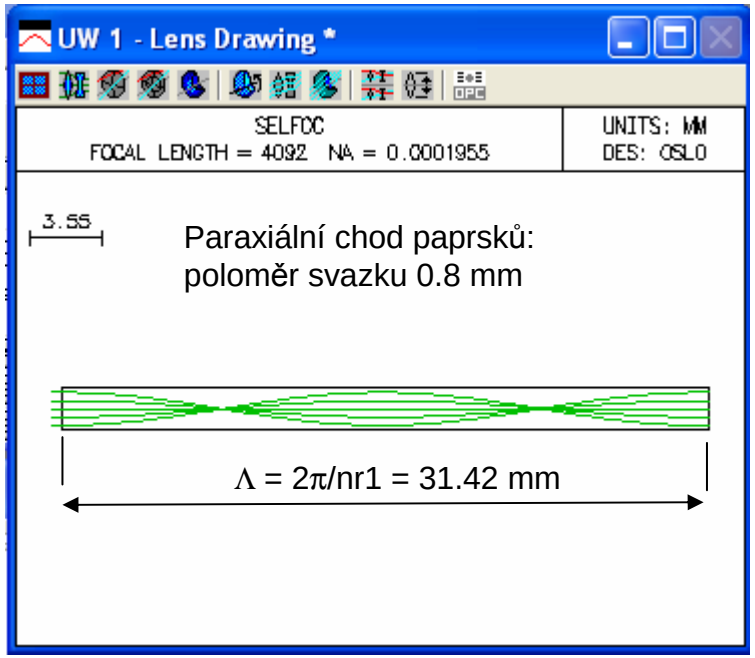
Nbr	Wavelength	Index
1	0.587560	1.500000
2	0.486130	1.000000
3	0.656270	1.000000

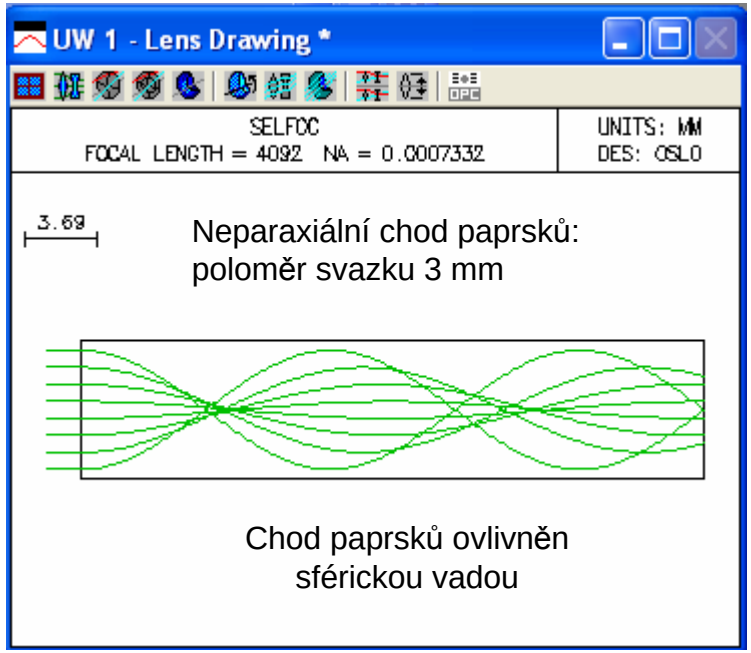
Prostředí SELFOC – program OSLO Premium

Zadání parametrů paprsku:



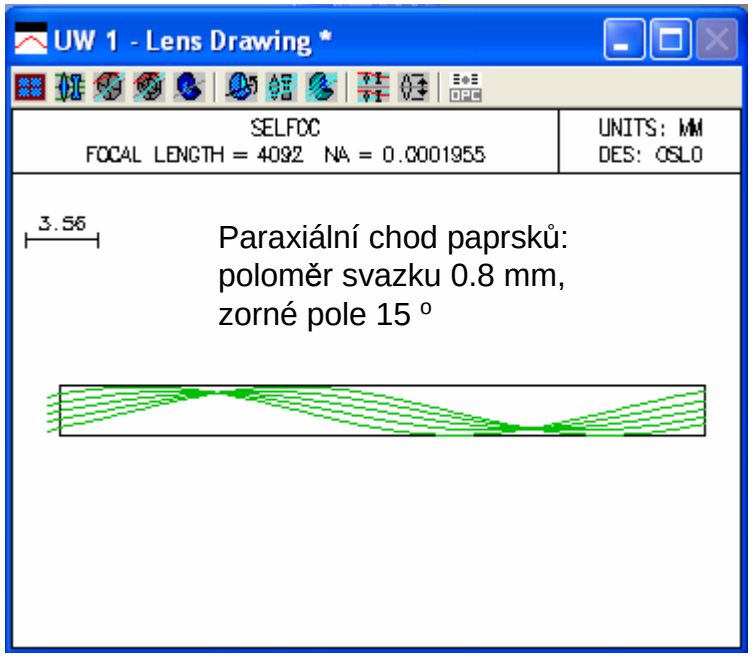
Vykreslení paprsků



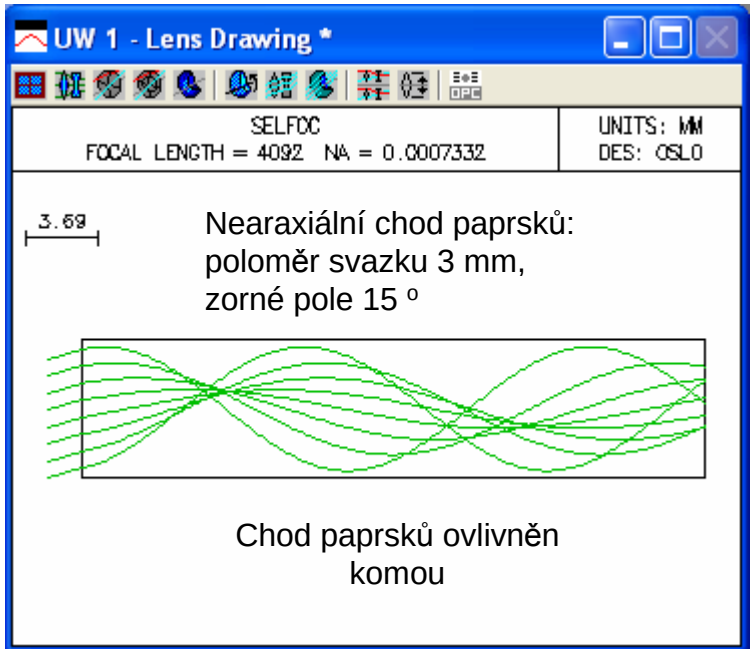


Prostředí SELFOC – program OSLO Premium

Vykreslení paprsků



Paraxiální chod paprsků:
poloměr svazku 0.8 mm,
zorné pole 15 °



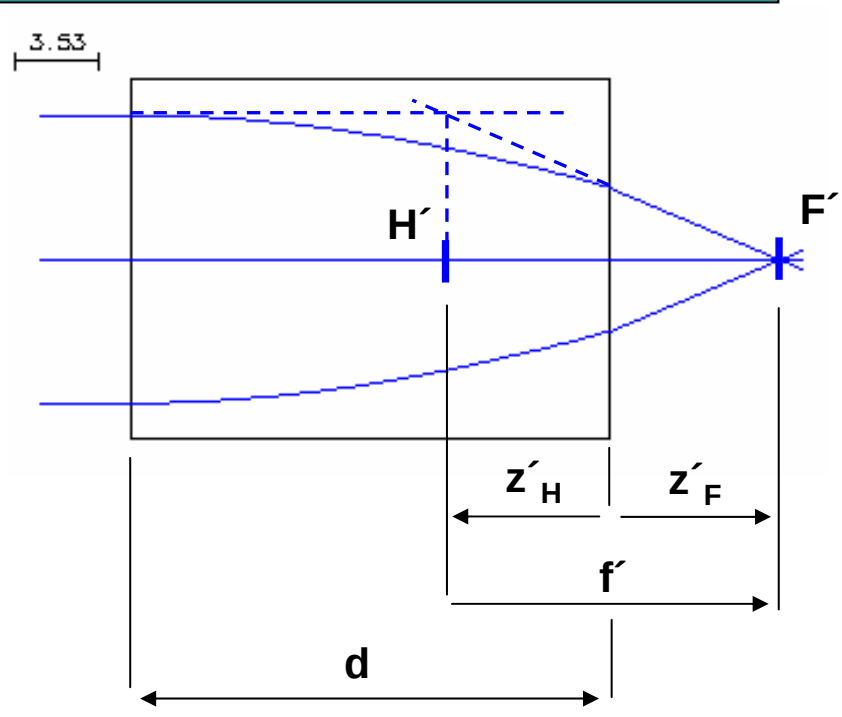
Nearaxiální chod paprsků:
poloměr svazku 3 mm,
zorné pole 15 °

Chod paprsků ovlivněn komou

Úloha I.3: Gradientní čočka

Zadání: Určete ohniskovou vzdálenost gradientní čočky, která má tloušťku *d* a je vyrobena ze SELFOC materiálu o indexu lomu $n = n_0\left(1-\alpha^2 r^2/2\right)$.
Úlohu řešte obecně a následně proveďte vyčíslení pro parametry *d=20 mm*, n_0*=1.5* a α*=0.05*.
Správnost výpočtu ověřte pomocí programu Oslo Premium.

Průchod paprsků gradientní (GRIN) čočkou



Z trajektorie paprsku a geometrie určíme:

Poloha obrazového ohniskového bodu

$$z_F' = \frac{\cos(\alpha d)}{n_0 \alpha \sin(\alpha d)}$$

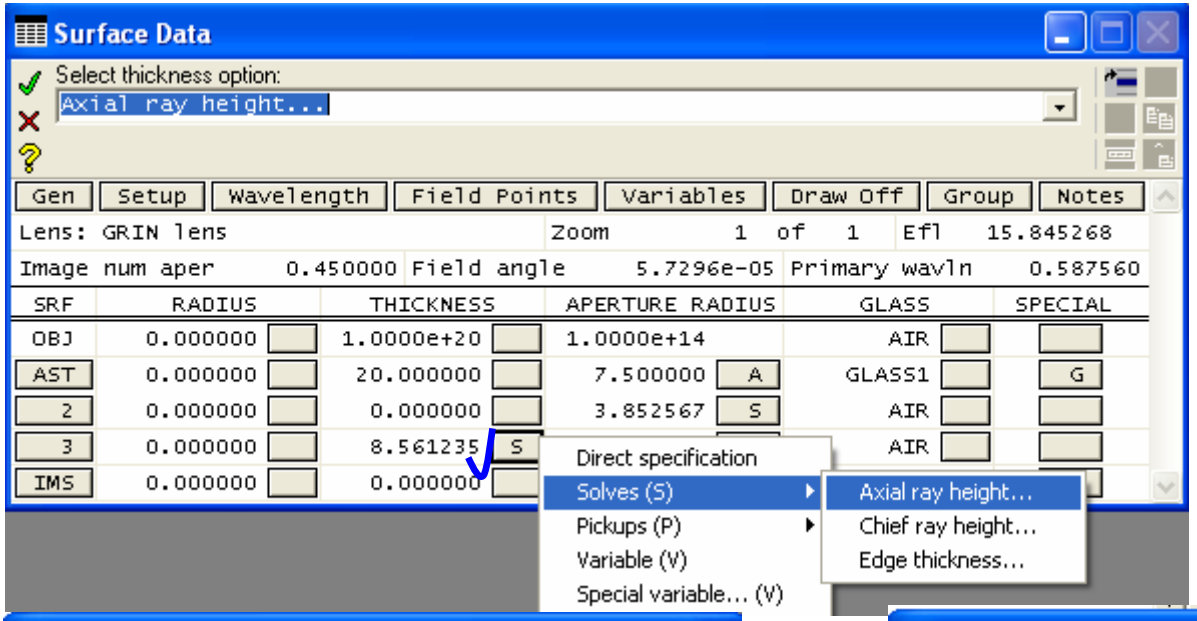
Poloha obrazového hlavního bodu

$$z_H' = \frac{\cos(\alpha d) - 1}{n_0 \alpha \sin(\alpha d)}$$

Obrazová ohnisková vzdálenost

$$f' = \frac{1}{n_0 \alpha \sin(\alpha d)}$$

Gradientní čočka – program OSLO Premium



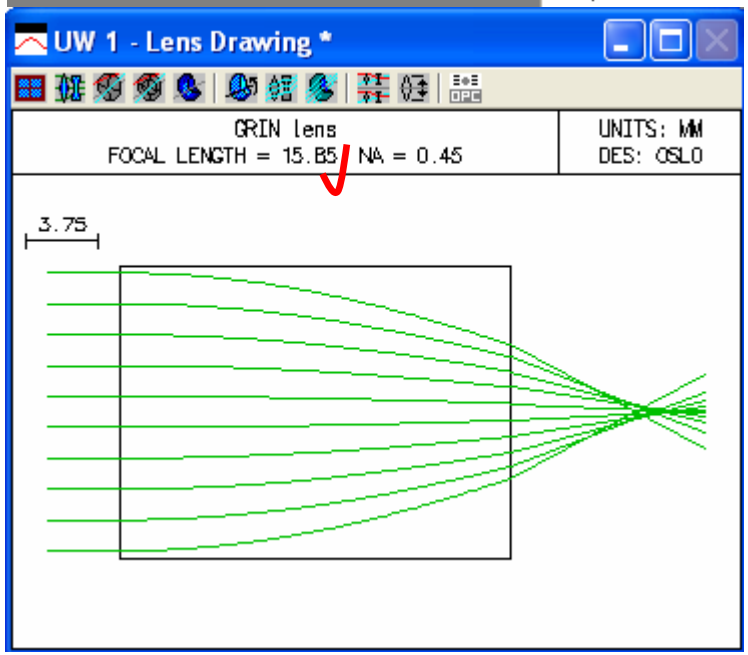
Parametry prostředí:

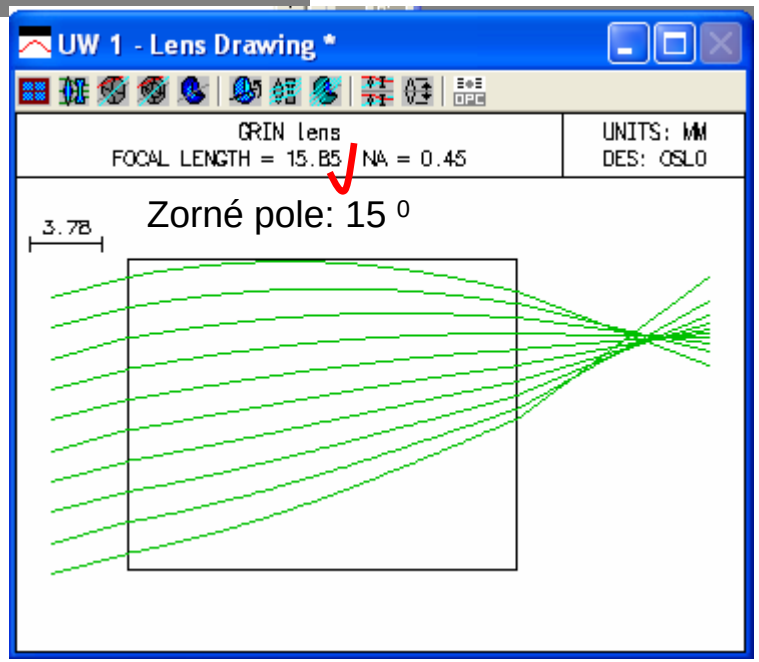
$$n_0 = 1.5,$$

$$\alpha \equiv nr1 = 0.05$$

$$z_F' = \frac{\cos(\alpha d)}{n_0 \alpha \sin(\alpha d)} = 8.561 \quad mm$$

$$f' = \frac{1}{n_0 \alpha \sin(\alpha d)} = 15.845 \quad mm$$

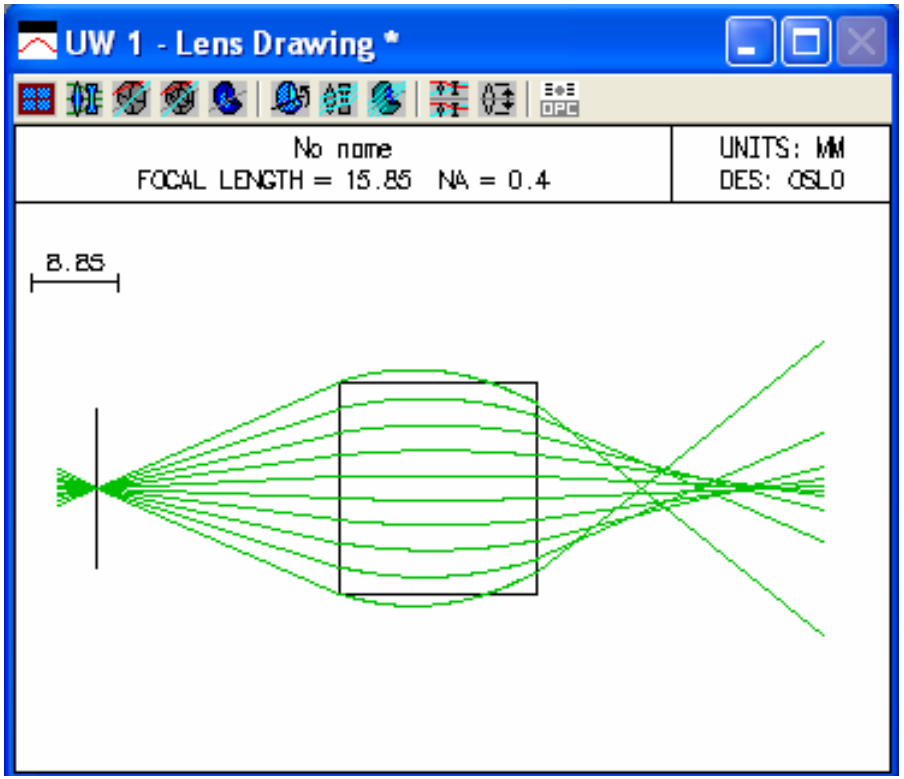




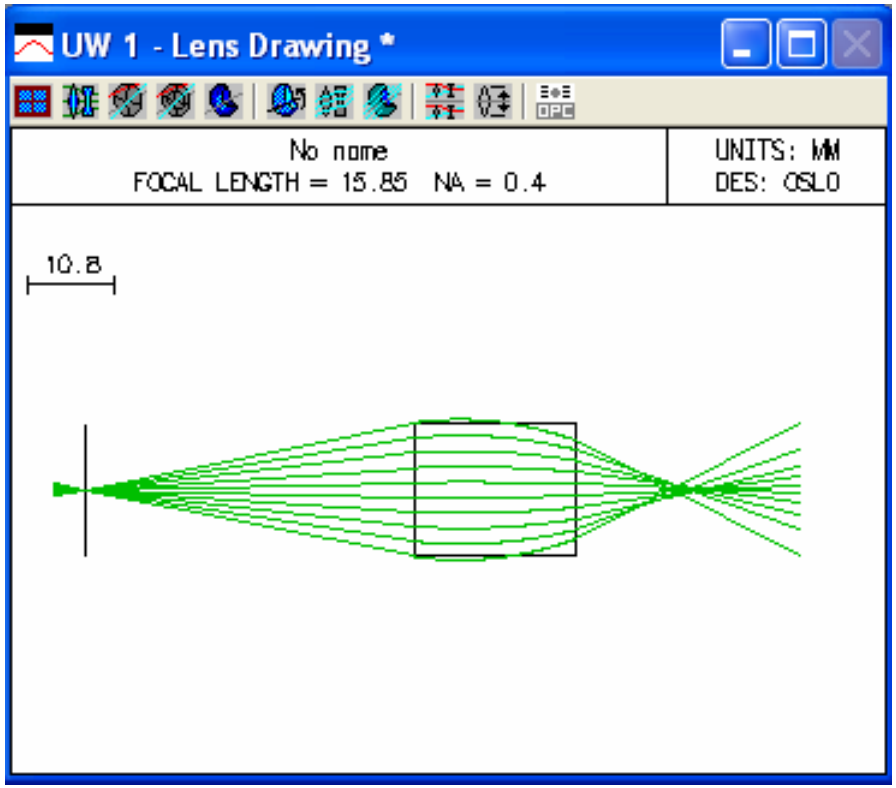
Gradientní čočka – program OSLO Premium

Zobrazení gradientní čočkou

příčné měřítko m = - 0.5



příčné měřítko m = - 1

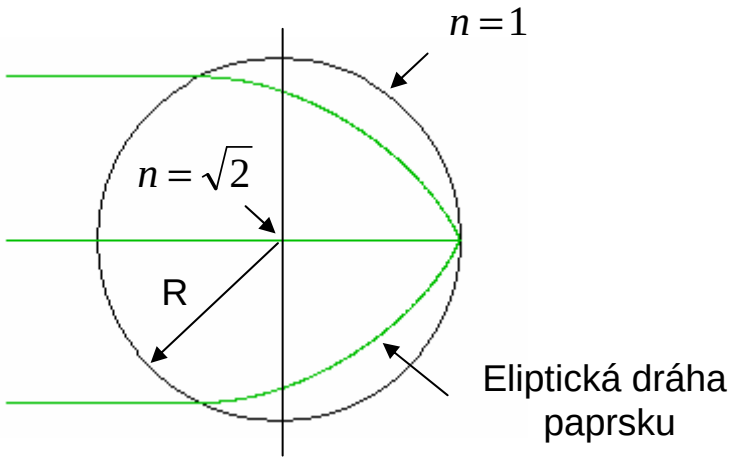


Úloha I.4: Luneburgova čočka – program Oslo Premium

Zadání: V programu Oslo Premium ověřte funkci Luneburgovy čočky, která umožňuje fokusaci monochromatické rovinné vlny. Znázorněte paprskovou kaustiku pro osový a mimoosový svazek rovnoběžných paprsků dopadajících na čočku. V programu Oslo Premium simulujte činnost teleskopu sestaveného z Luneburgových čoček.

Základní informace:

Luneburgova čočka je optické prostředí se sféricky symetrickým, prostorově proměnným indexem lomu, které poskytuje dokonalé geometrické zobrazení dvou koncentrických sfér (jedna sféra se zobrazuje na druhou). Nejjednodušším typem je Luneburgova fokusační čočka (Rudolf Luneburg, 1944), která má tvar koule a je z materiálu, jehož index lomu se od středu čočky k jejímu povrchu zmenšuje.
Čočka zobrazuje nekonečně vzdálený předmětový bod na protilehlou plochu čočky.



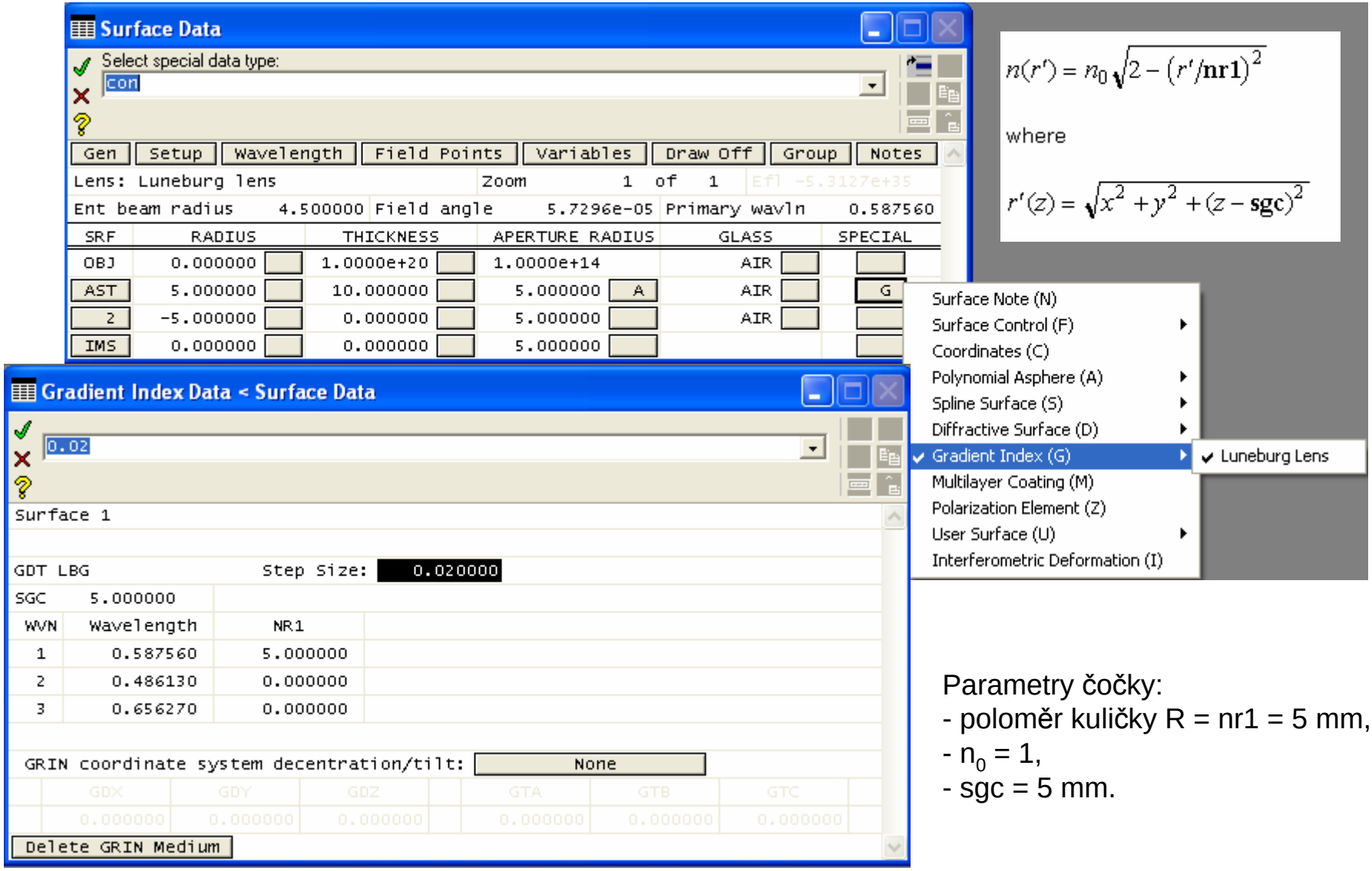
Index lomu:

$$n = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

R … poloměr čočky

Luneburgova čočka – program Oslo Premium



$$n(r') = n_0\sqrt{2-(r'/\mathbf{nr1})^2}$$

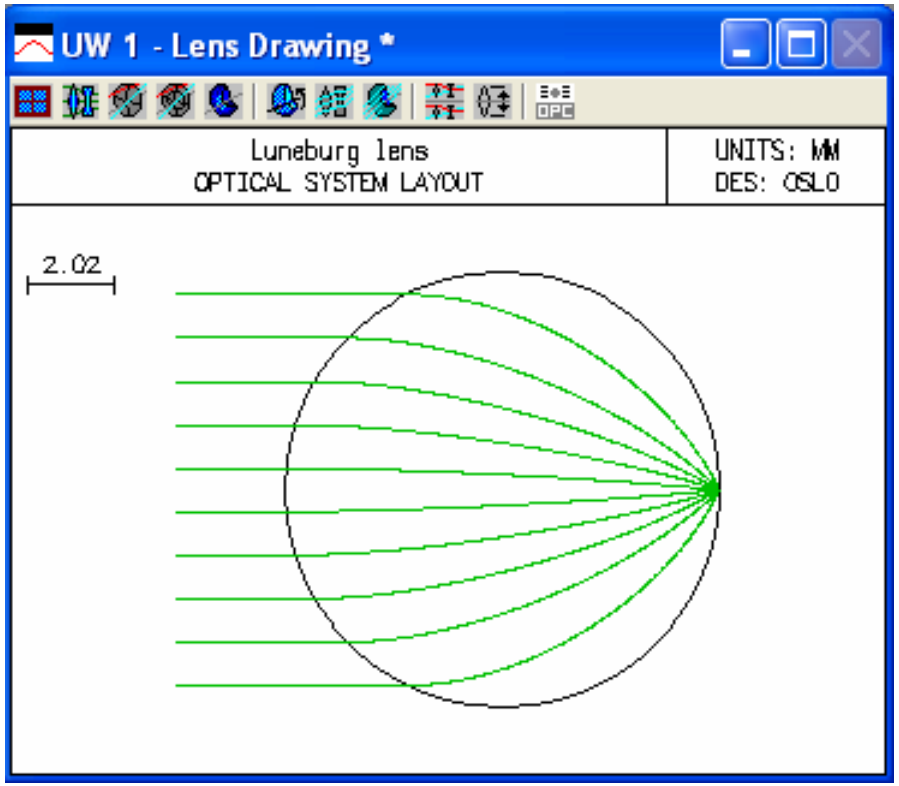
where

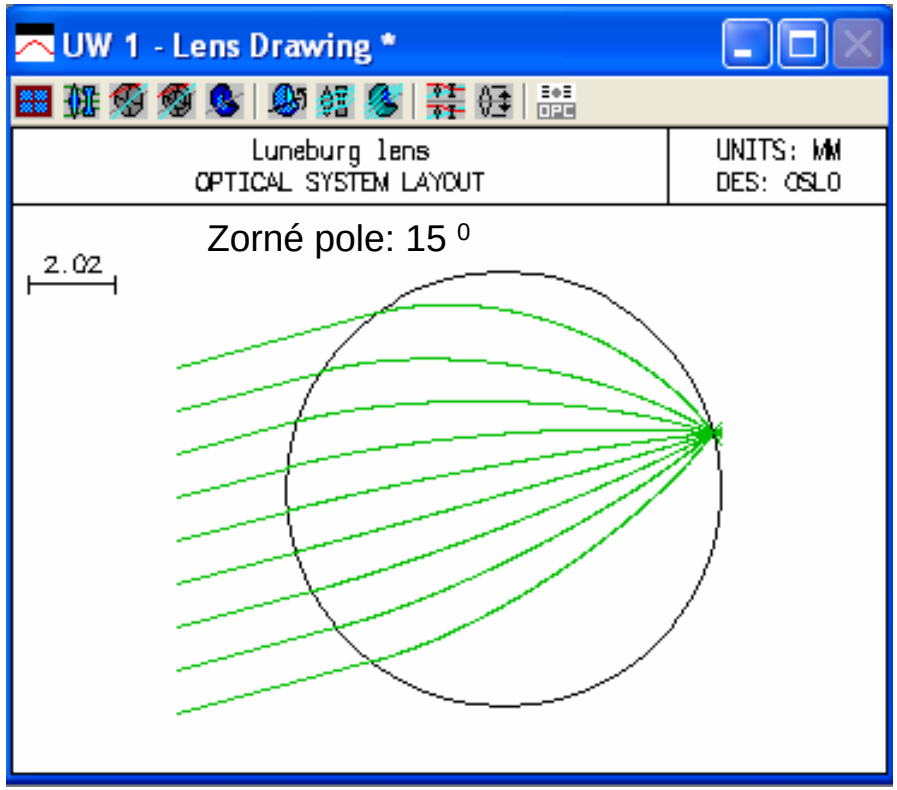
$$r'(z) = \sqrt{x^2+y^2+(z-\mathbf{sgc})^2}$$

Parametry čočky:
- poloměr kuličky R = nr1 = 5 mm,
- n_0 = 1,
- sgc = 5 mm.

Luneburgova čočka – program Oslo Premium

Vykreslení paprsků





Luneburgův teleskop – program Oslo Premium

Vykreslení paprsků

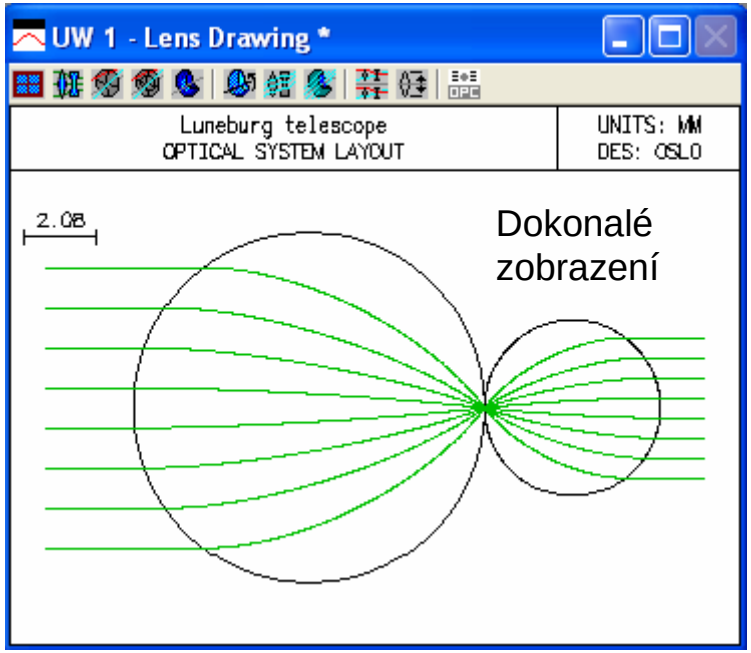
Surface Data

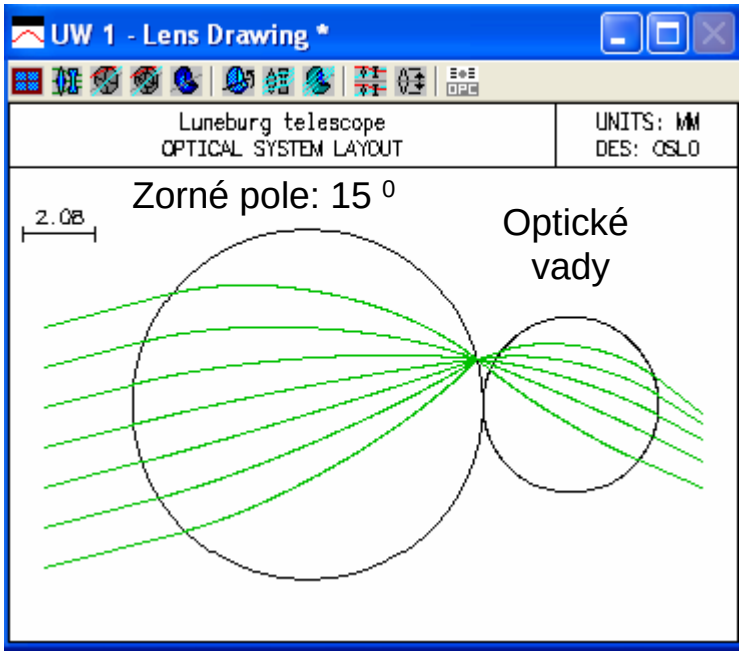
Gen | Setup | Wavelength | Field Points | Variables | Draw Off | Group | Notes

Lens: Luneburg telescope Zoom 1 of 1 Efl 4.8269e+35

Ent beam radius 4.000000 Field angle 15.000000 Primary wavln 0.587562

SRF	RADIUS	THICKNESS	APERTURE RADIUS		GLASS		SPECIAL
OBJ	0.000000	1.0000e+20	2.6795e+19		AIR		
AST	5.000000	10.000000	5.000000	A	LUNE_GLASS		G
2	-5.000000	0.000000	5.000000		AIR		
3	2.500000	5.000000	2.500000		LUNE_GLASS	P	G
4	-2.500000	0.000000	2.500000		AIR		
5	-2.500000	8.000000	2.500000		AIR		
IMS	0.000000	0.000000	2.500000				



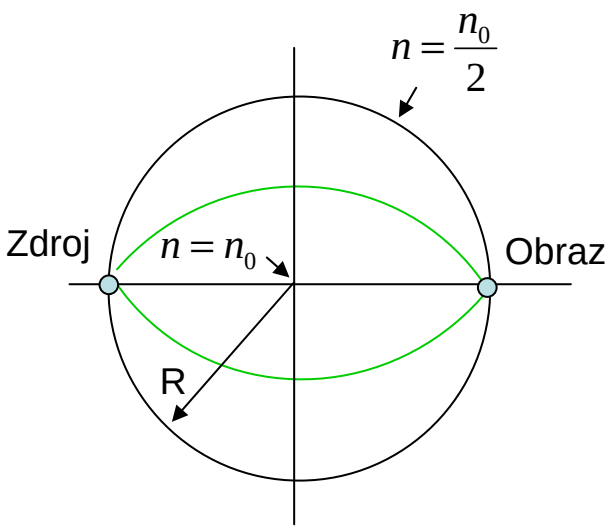


Úloha I.5: Maxwellova rybí čočka – program Oslo Premium

Zadání: V programu Oslo Premium ověřte funkci Maxwellovy rybí čočky, která umožňuje dokonalé zobrazení monochromatického bodového zdroje. Znázorněte paprskovou kaustiku pro svazky vycházející z osového a mimoosového bodového zdroje.

Základní informace:

Maxwellova rybí čočka je optické prostředí se sféricky symetrickým, prostorově proměnným indexem lomu, které má tvar kuličky. Poskytuje dokonalé geometrické zobrazení bodového monochromatického zdroje umístěného na povrchu kuličky – dokonalý obraz vzniká na protilehlé straně kuličky.



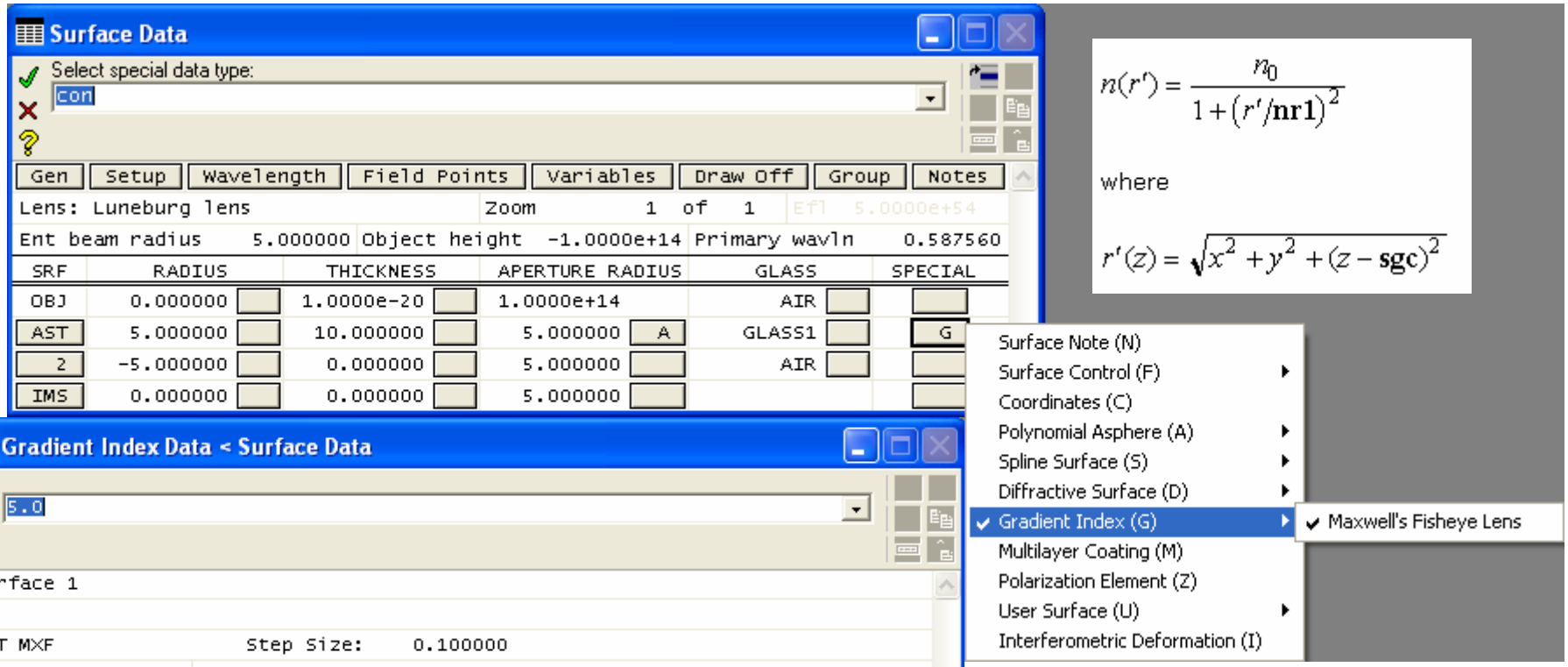
Index lomu:

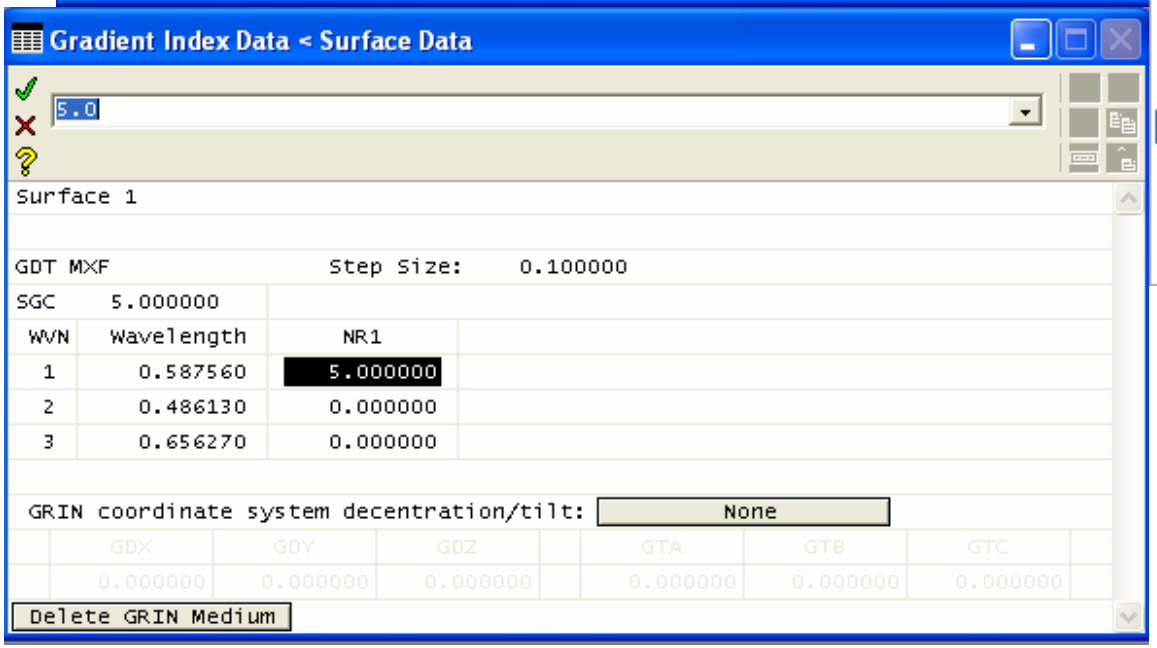
$$n = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

R … poloměr čočky

Maxwellova rybí čočka – program Oslo Premium

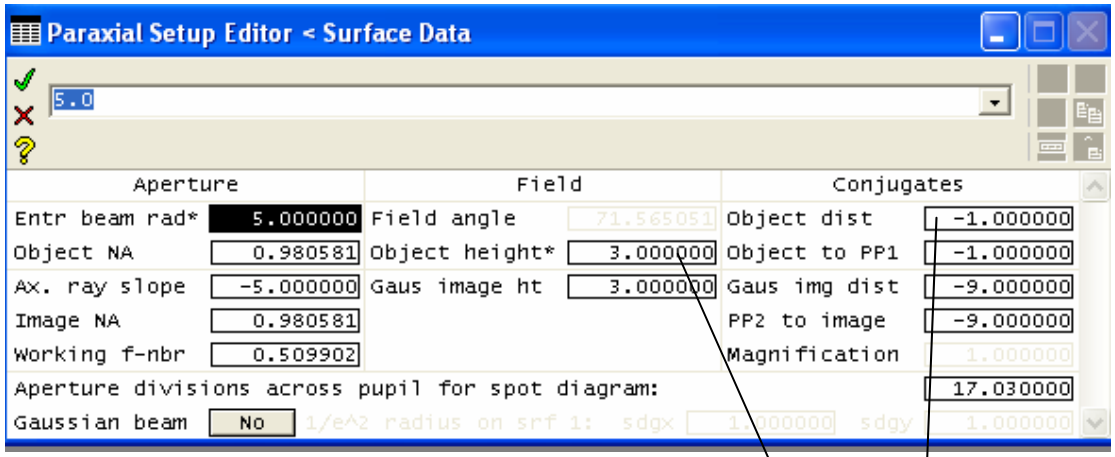


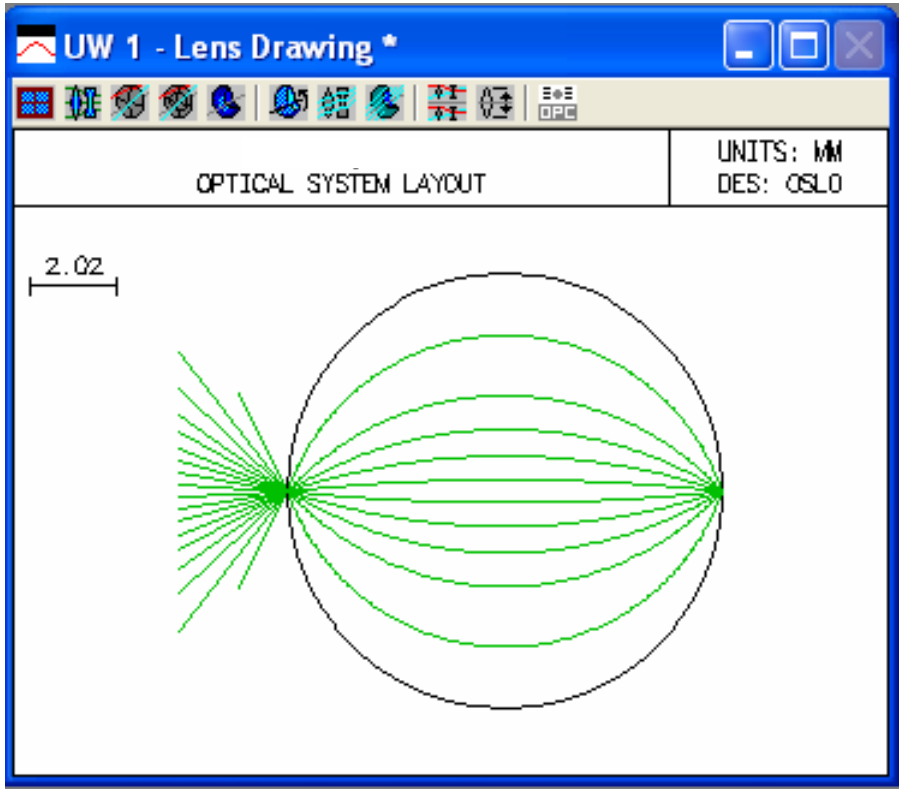


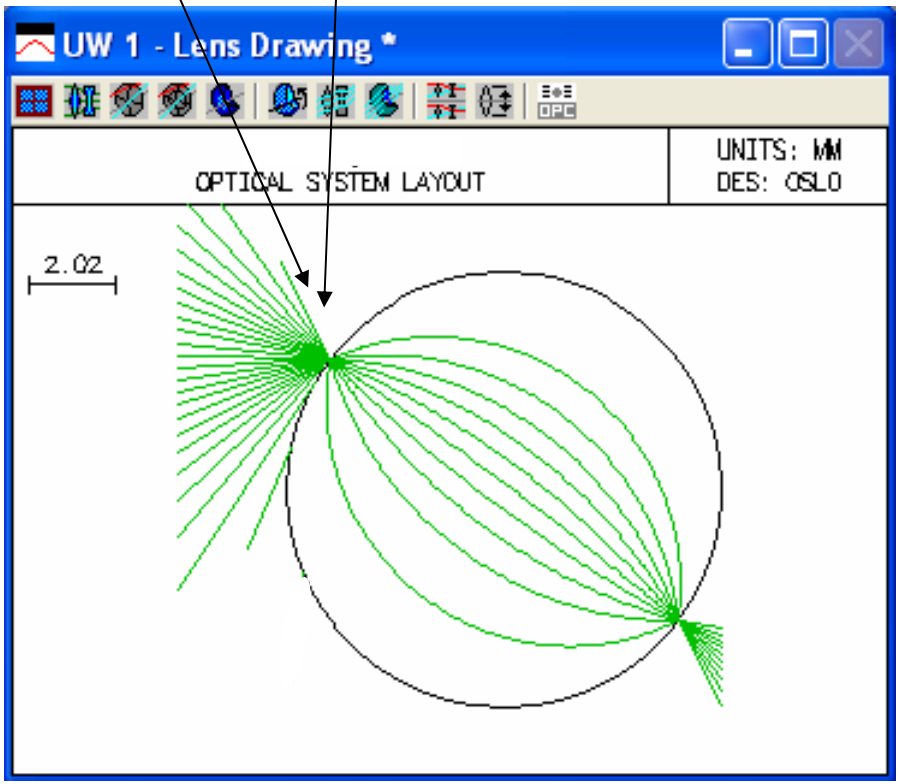
Parametry čočky:
- poloměr kuličky R = nr1 = 5 mm,
- n_0 = 1,
- sgc = 5 mm.

Maxwellova rybí čočka – program Oslo Premium

Vykreslení paprsků







Úloha I.6: Woodova čočka – program Oslo Premium

Zadání: Navrhněte parametry při kterých bude Woodova čočka transformovat svazek rovnoběžných paprsků jako spojná a rozptylná čočka. Proveďte propočet paprsků Woodovou čočkou v programu Oslo Premium.

Základní informace:

Woodova čočka je optické prostředí s radiálním gradientem indexu lomu. V programu Oslo Premium je index lomu určen vztahem $n = n_0 + nr1r^2$.
Podle záporné nebo kladné hodnoty koeficientu *nr*1 Woodova čočka působí jako spojka nebo rozptylka.

Pro určení optických parametrů Woodovy čočky může být použit stejný postup jako v případě SELFOC čočky:

SELFOC čočka:

$$n = n_0\left(1 - \alpha^2 r^2/2\right)$$

$$f' = \frac{1}{n_0 \alpha \sin(\alpha d)}$$

$d \ldots tloušťka \quad čočky$

$$nr1 = -\frac{n_0 \alpha^2}{2}$$

Obrazová ohnisková vzdálenost:

Woodova čočka:

$$n = n_0 + nr1r^2.$$

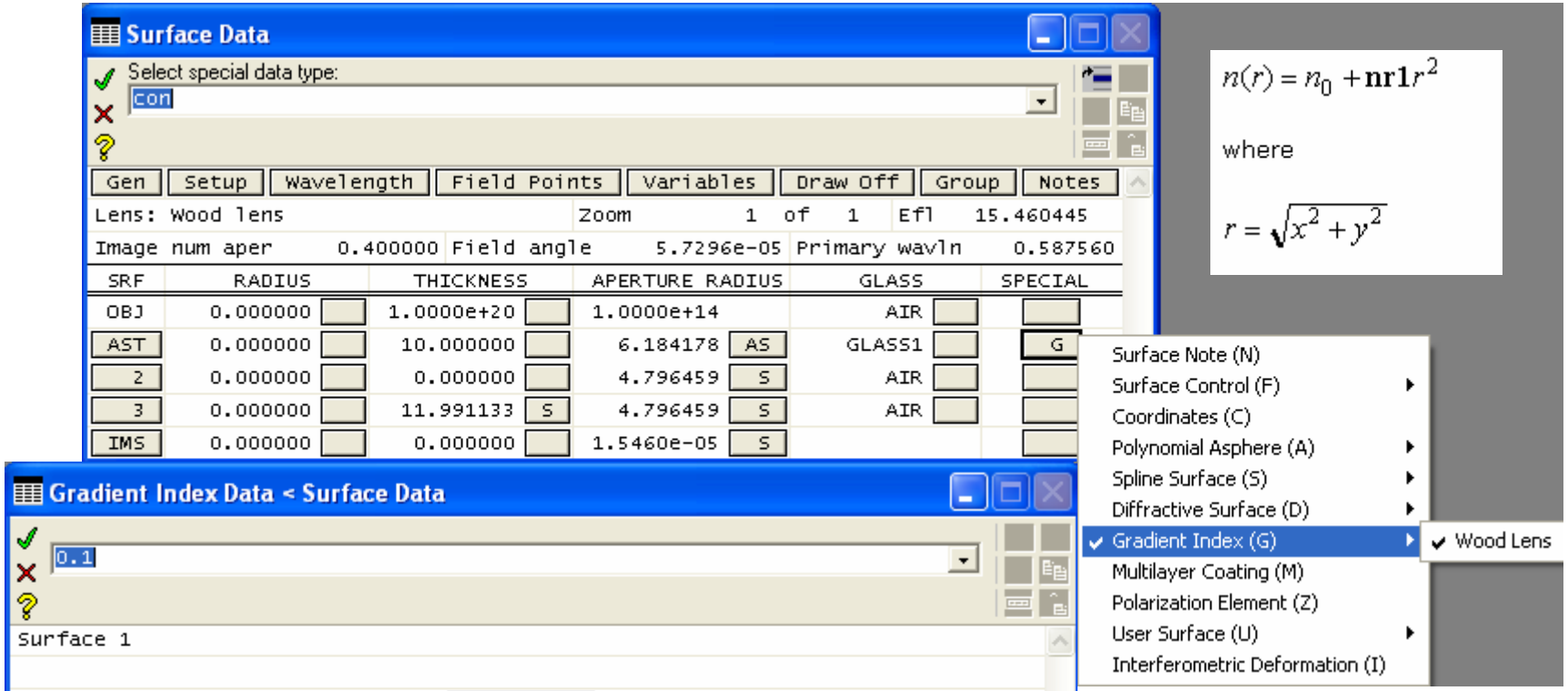
$$pro \quad \alpha d << 1:$$

$$f' \approx -\frac{1}{2nr1d},$$

$nr1 < 0 \ldots spojka$

$nr1 > 0 \ldots rozptylka$

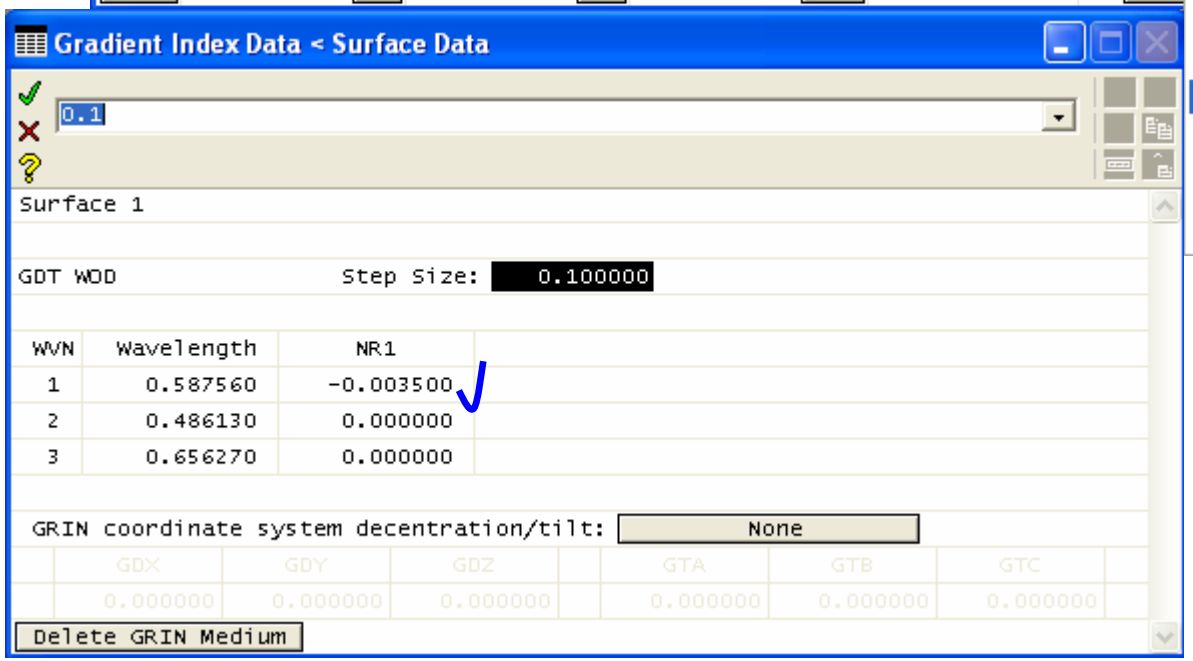
Woodova čočka – program Oslo Premium



$$n(r) = n_0 + \mathbf{nr1}\, r^2$$

where

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Parametry prostředí:

$$n_0 = 1.5, \quad d = 10 \quad mm$$

$$nr1 = -0.0035$$

Spojná Woodova čočka

$$f' \approx -\frac{1}{2nr1d} = 14.3 \quad mm$$

(předpoklad $d\,nr1 \ll 1$)

Woodova čočka – program Oslo Premium

Průchod paprsků Woodovou čočkou

Spojná Woodova čočka

$$n_0 = 1.5, \quad d = 10 \quad mm$$

$$nr1 = -0.0035$$

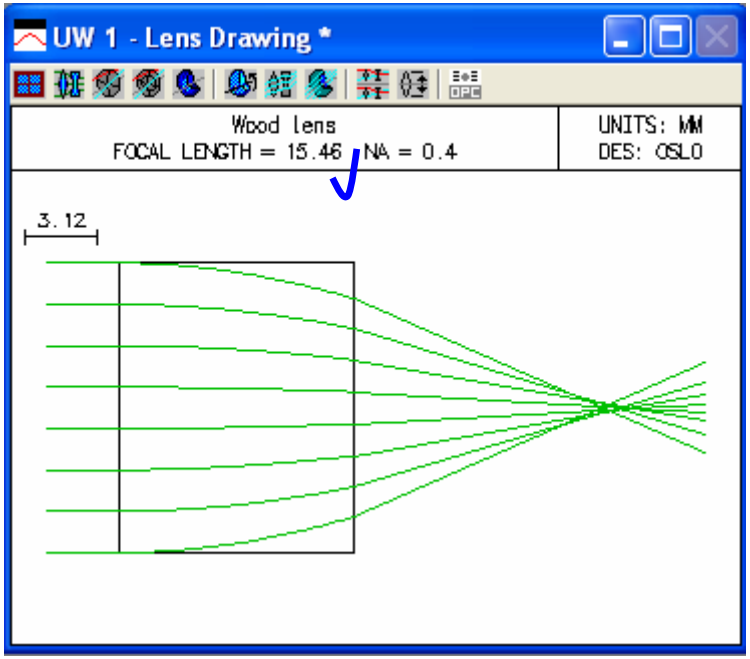
$$f' \approx -\frac{1}{2nr1d} = 14.3 \quad mm$$

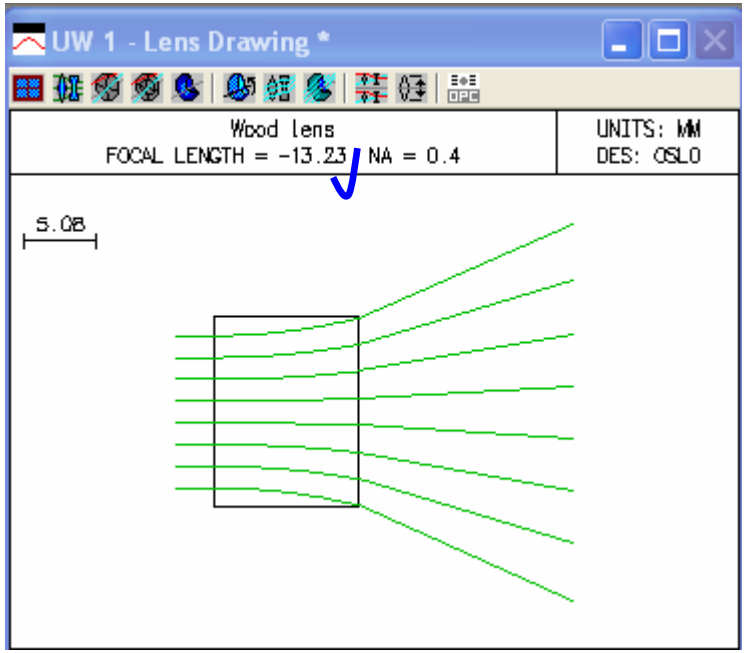
Rozptylná Woodova čočka

$$n_0 = 1.5, \quad d = 10 \quad mm$$

$$nr1 = 0.0035$$

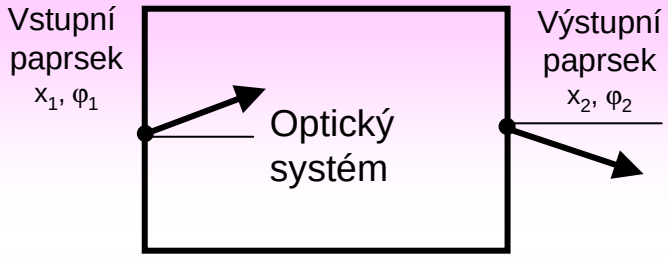
$$f' \approx -\frac{1}{2nr1d} = -14.3 \quad mm$$





II. Paraxiální zobrazování

Úlohy paraxiálního zobrazování lze řešit pomocí maticového formalismu:

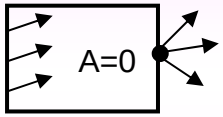


$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} x_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}$$

M . . . matice soustavy

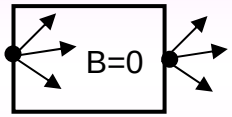
Transformační matice optických systémů

Fokusační systém



$$x_2 = B\varphi_1$$

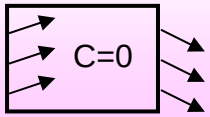
Zobrazovací systém



$$x_2 = Ax_1$$

A . . . příčné měřítko

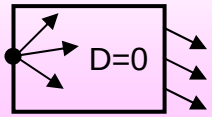
Afokální systém



$$\varphi_2 = D\varphi_1$$

D . . úhlové zvětšení

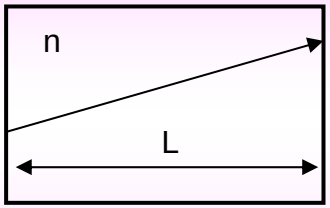
Kolimační systém



$$\varphi_2 = Cx_1$$

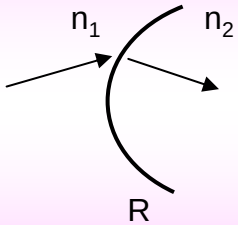
Základní transformační matice

Volné šíření (homogenní prostředí)



$$M = \begin{bmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Průchod sférickým rozhraním

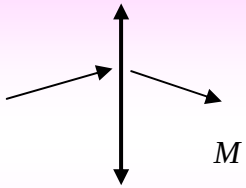


$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n_1 - n_2)/R & 1 \end{bmatrix}$$

Odraz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n_1/R & 1 \end{bmatrix}$$

Tenká čočka

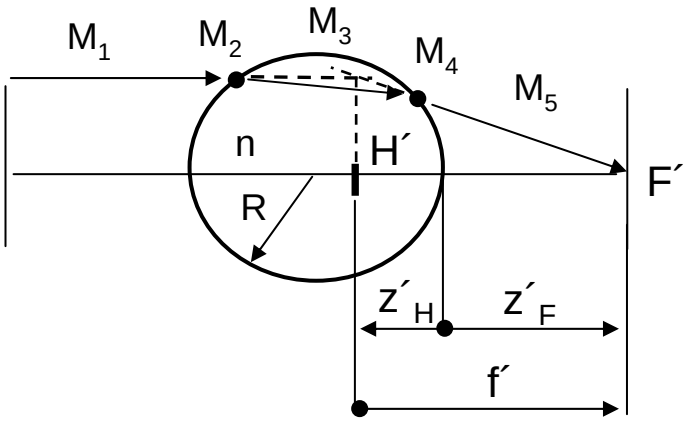


$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{bmatrix}$$

f . . . předmětová ohnisková vzdálenost

Úloha II.1: Zobrazování skleněnou kuličkou

Zadání: Určete paraxiální optické parametry skleněné kuličky, která je vyrobena ze skla o indexu lomu *n = 3/2* a má poloměr *R = 5 mm*. Kulička je umístěna ve vzduchu. V programu Oslo Premium proveďte simulaci fokusace a vykreslete paprskovou kaustiku pro osový a mimoosový předmětový bod..



$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = M_5 M_4 M_3 M_2 M_1$$

Obrazová ohnisková rovina $(A = 0)$:

$$z_F' = \frac{\frac{2R}{n}K - 1}{K\left(\frac{2R}{n}K - 2\right)}, \quad K = \frac{n-1}{R}$$

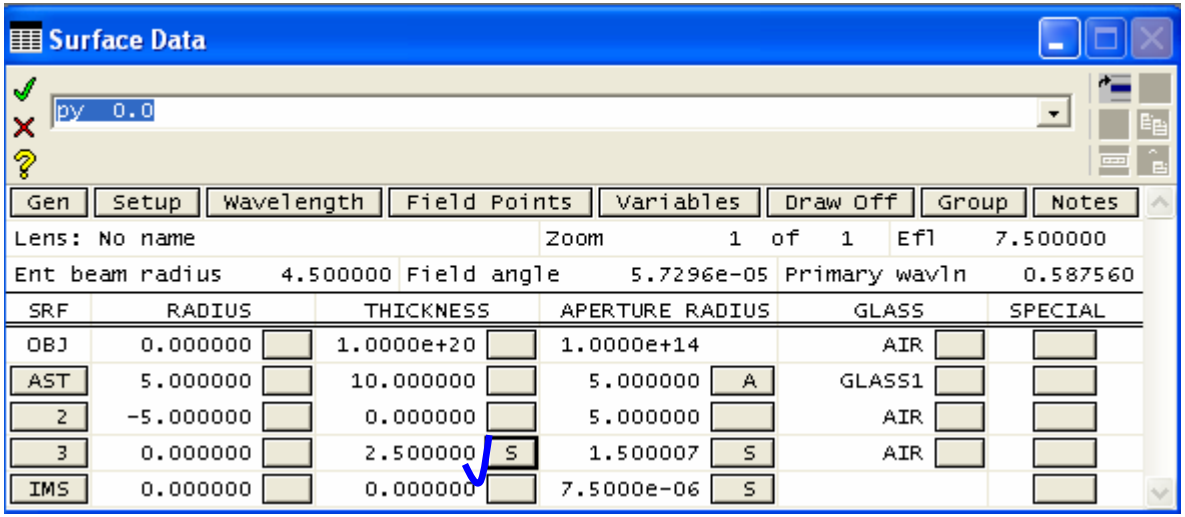
Obrazová hlavní rovina $(A = 1)$:

$$z_H' = \frac{\frac{2R}{n}}{\frac{2R}{n}K - 2}$$

Obrazová ohnisková vzdálenost:

$$f' = z_F' - z_H' = \frac{1}{K\left(2 - \frac{2R}{n}K\right)}$$

Fokusace svazku skleněnou kuličkou – program Oslo Premium



Surface Data

py 0.0

Gen | Setup | Wavelength | Field Points | Variables | Draw Off | Group | Notes

Lens: No name Zoom 1 of 1 Efl 7.500000

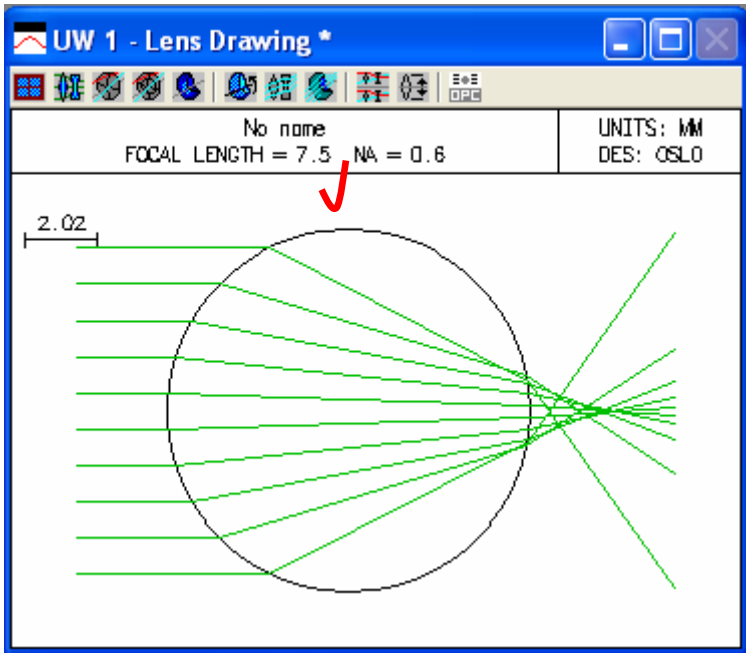
Ent beam radius 4.500000 Field angle 5.7296e-05 Primary wavln 0.587560

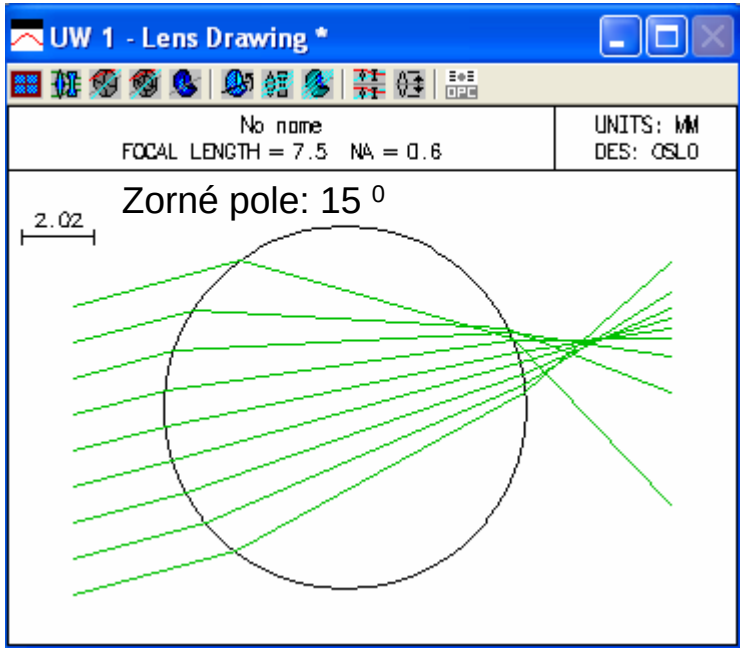
SRF	RADIUS		THICKNESS		APERTURE RADIUS		GLASS		SPECIAL
OBJ	0.000000		1.0000e+20		1.0000e+14		AIR		
AST	5.000000		10.000000		5.000000	A	GLASS1		
2	-5.000000		0.000000		5.000000		AIR		
3	0.000000		2.500000	S	1.500007	S	AIR		
IMS	0.000000		0.000000		7.5000e-06	S			

$$n = 3/2, \quad R = 5 \quad mm$$

$$z_F^{'} = 2.5 \quad mm$$

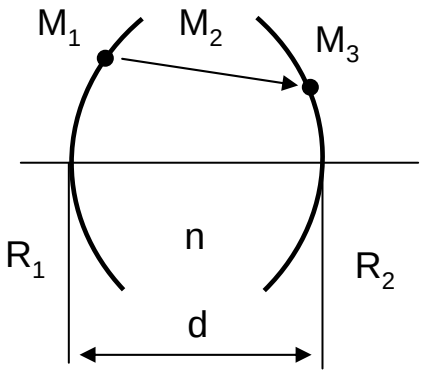
$$f^{'} = 7.5 \quad mm$$





Úloha II.2: Návrh afokální čočky

Zadání: Navrhněte optické parametry afokální čočky, která pracuje jako teleskop Keplerova typu s úhlovým zvětšením Γ = - 2 a Galileova typu Γ = 2. Čočka je vyrobena ze skla o indexu lomu n = 3/2 a je umístěna ve vzduchu.



$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = M_3 M_2 M_1$$

Postup návrhu:

- Volba poloměru R1

- Podmínka afokálnosti: C = 0
- Úhlové zvětšení: Γ = D

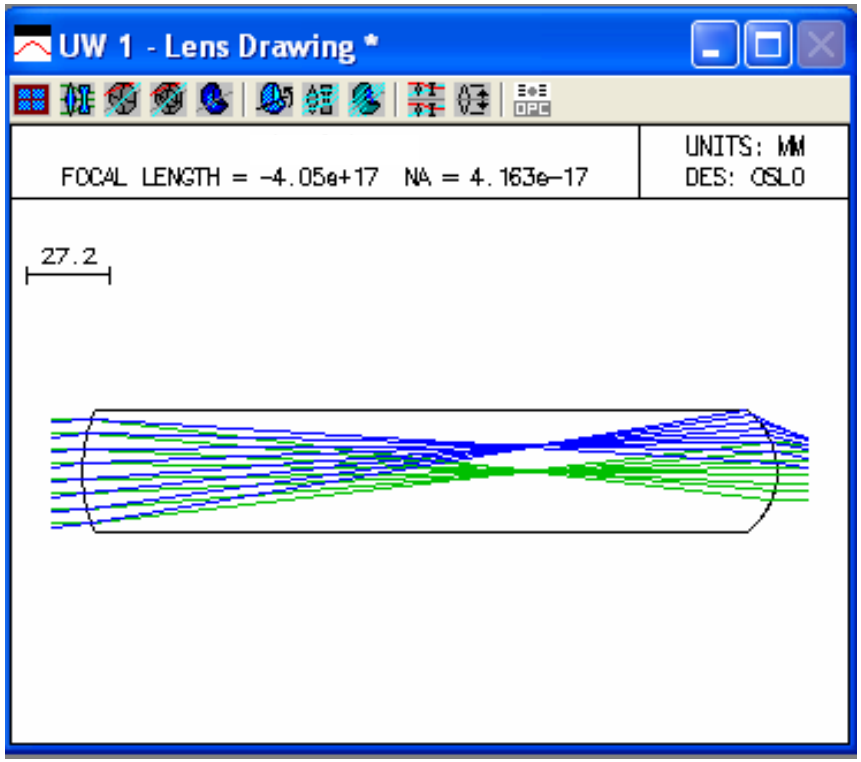
$$R_2 = \frac{R_1}{\Gamma},$$

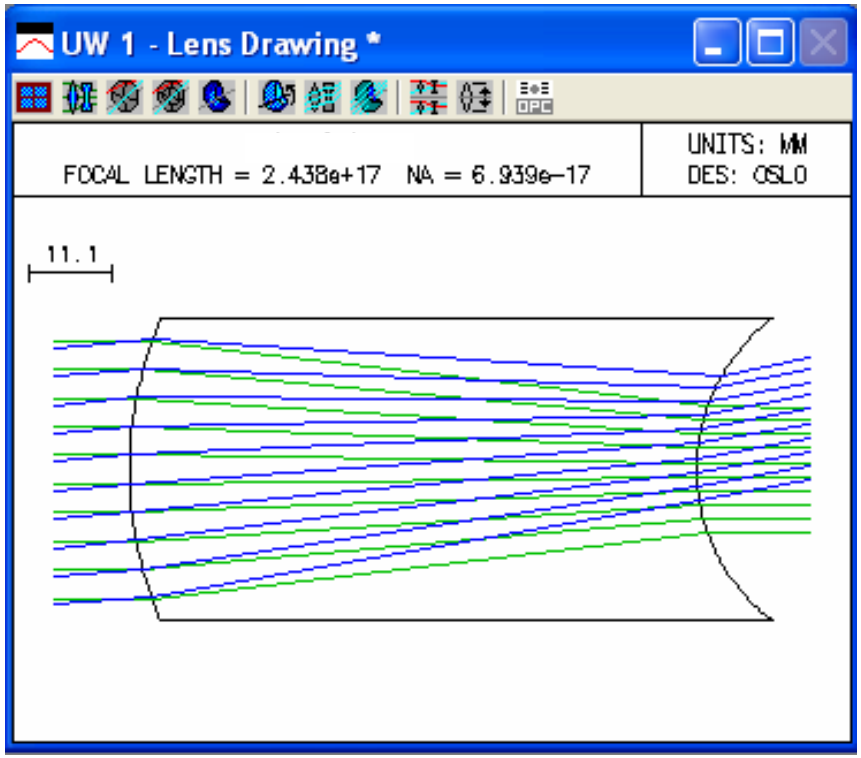
$$d = \frac{n(R_1 - R_2)}{n-1}.$$

Návrh afokální čočky

Afokální čočka Keplerova typu:
$n = 3/2$, $R_1 = 50$ mm, $\Gamma = -2$
$R_2 = -25$ mm, $d = 225$ mm

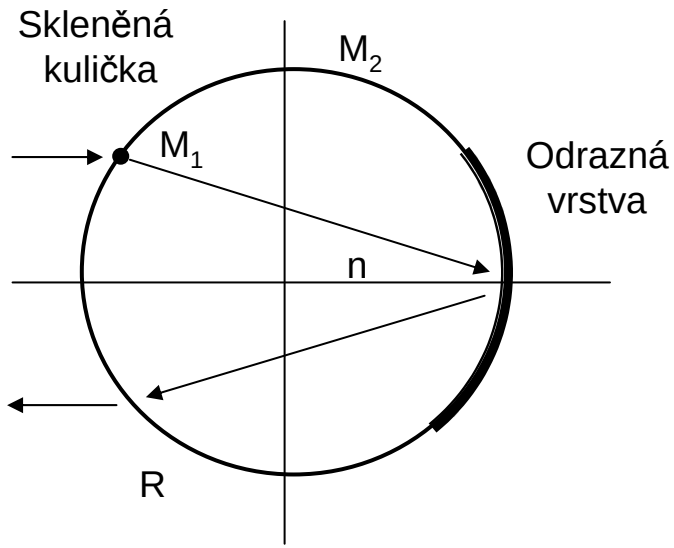
Afokální čočka Galileova typu:
$n = 3/2$, $R_1 = 50$ mm, $\Gamma = 2$
$R_2 = 25$ mm, $d = 75$ mm





Úloha II.3: Návrh kuličkového retroreflektoru

Zadání: Navrhněte poloměr a index lomu skleněné kuličky s odraznou vrstvou, která pracuje jako retroreflektor. Kulička je umístěna ve vzduchu.



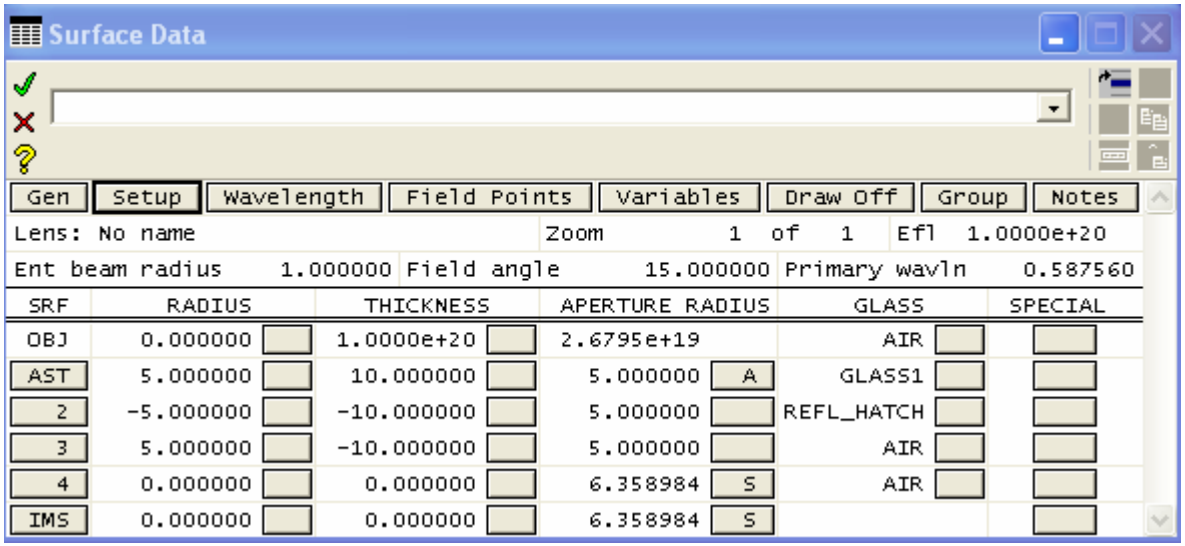
M_1 … průchod předním rozhraním
M_2 … šíření paprsku uvnitř kuličky

$$M = M_2 M_1 = \begin{bmatrix} \frac{2-n}{n} & \frac{2R}{n} \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

Podmínka fokusace A=0:

$\Rightarrow$ n=2

Kuličkový retroreflektor – program Oslo



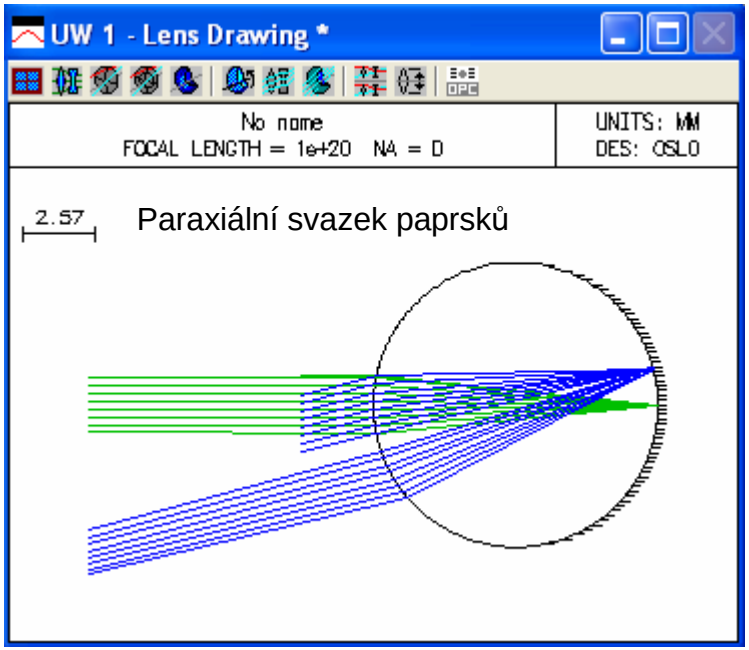
Surface Data

Gen | Setup | Wavelength | Field Points | Variables | Draw Off | Group | Notes

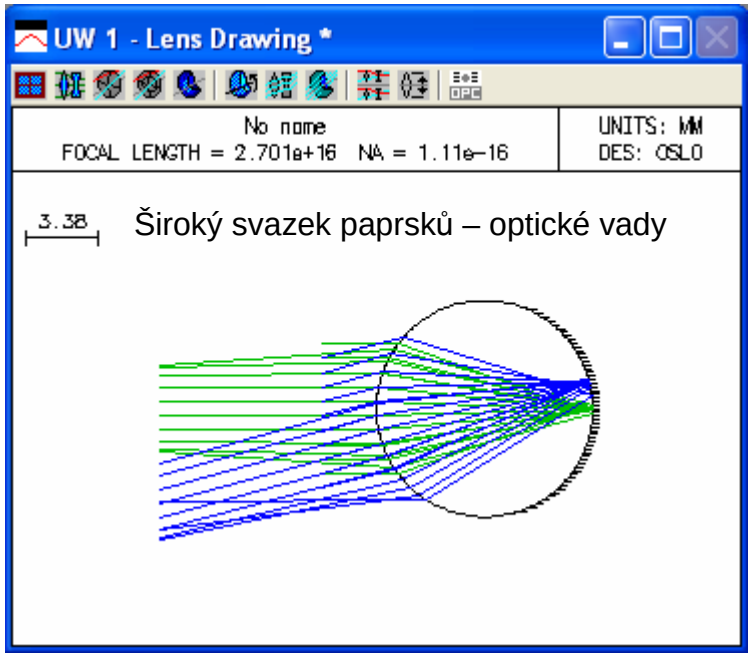
Lens: No name Zoom 1 of 1 Efl 1.0000e+20

Ent beam radius 1.000000 Field angle 15.000000 Primary wavln 0.587560

SRF	RADIUS	THICKNESS	APERTURE RADIUS		GLASS	SPECIAL
OBJ	0.000000	1.0000e+20	2.6795e+19		AIR	
AST	5.000000	10.000000	5.000000	A	GLASS1	
2	-5.000000	-10.000000	5.000000		REFL_HATCH	
3	5.000000	-10.000000	5.000000		AIR	
4	0.000000	0.000000	6.358984	S	AIR	
IMS	0.000000	0.000000	6.358984	S		



Paraxiální svazek paprsků



Široký svazek paprsků – optické vady

III. Gaussovský laserový svazek

Gaussovský svazek má kruhově symetrickou stopu - jeho intenzitní profil je určen Gaussovou funkcí. Je to základní typ svazku, který je vyzářen ideálním laserem.

Řešení Helmholtzovy rovnice v paraxiální aproximaci

Metody popisu gaussovského svazku

Zobecněná paraboloidní vlna (nahrazení souřadnice komplexním parametrem)

Rovinná vlna propuštěná gaussovskou amplitudovou maskou

Matematický popis gaussovského svazku

konstantní amplituda | osová amplituda | amplitudový profil | tvar vlnoplochy | Gouyův fázový posuv | oscilační členy

Komplexní amplituda: $$U(r,z) = A\frac{w_0}{w}\exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right)\exp\left(i\frac{kr^2}{2R}\right)\exp\left(i\,arctg\,\frac{z}{q_0}\right)\exp(i\omega t - ikz)$$

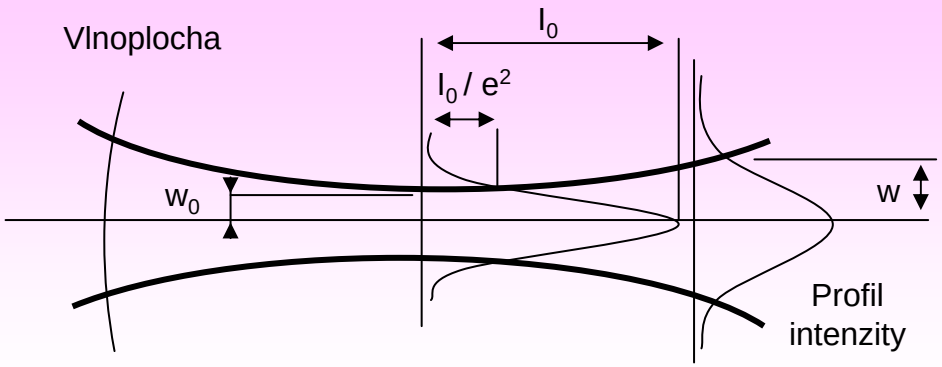
Intenzita: $$I(r,z) = I_0\frac{w_0^2}{w^2}\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)$$

Parametry svazku

w_0 …… pološířka (poloměr) pasu svazku
q_0 …… Rayleighova vzdálenost
w …… pološířka (poloměr) svazku ve vzdálenosti z od pasu
R ……. poloměr křivosti vlnoplochy
k ……. vlnové číslo
ω …… kruhová frekvence

$$q_0 = \frac{kw_0^2}{2} \qquad w = w_0\left(1+\frac{z^2}{q_0^2}\right)^{1/2} \qquad R = z\left(1+\frac{q_0^2}{z^2}\right)$$

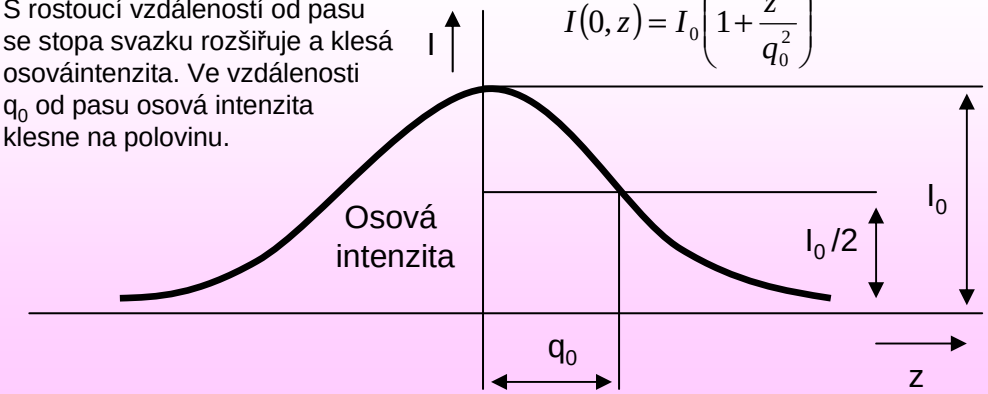
Znázornění gaussovského svazku



Poloměr pasu svazku je definován jako vzdálenost od osy ve které intenzita poklesne z hodnoty I_0 na hodnotu I_0/e^2.

S rostoucí vzdáleností od pasu se stopa svazku rozšiřuje a klesá osováintenzita. Ve vzdálenosti q_0 od pasu osová intenzita klesne na polovinu.

$$I(0,z) = I_0\left(1+\frac{z^2}{q_0^2}\right)^{-1}$$



Maticová transformace gaussovského svazku

Gaussovský svazek odpovídá paraxiální (paraboloidní) vlně u které je souřadnice *z* nahrazena komplexním parametrem $q=z+iq_0$.

Paraboloidní vlna

$$U = \frac{A}{z}\exp\left(-i\frac{kr^2}{2z}\right)$$

X

Gaussovský svazek

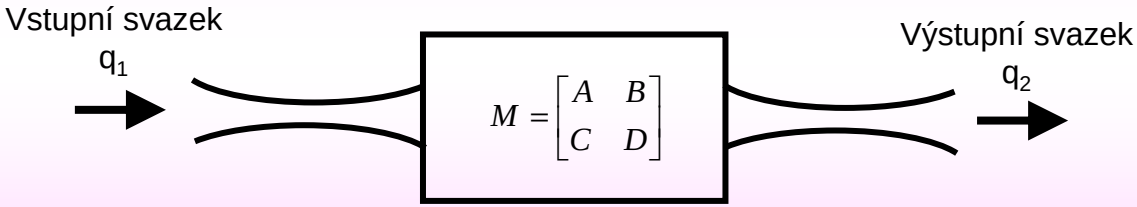
$$U = \frac{A}{q}\exp\left(-i\frac{kr^2}{2q}\right)$$

Komplexní parametr: $q = z + iq_0$

Vztah komplexního parametru a geometrických parametrů svazku

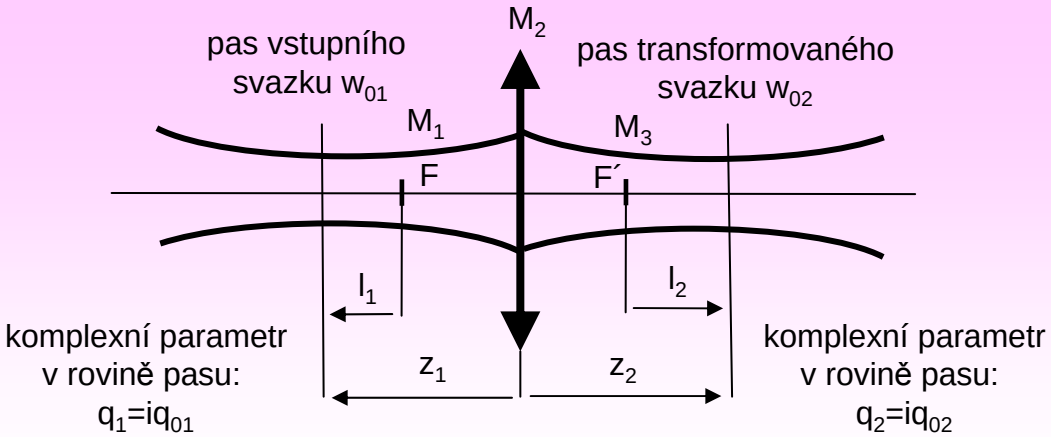
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i\frac{2}{kw^2}$$

Maticová transformace komplexního parametru



$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Transformace gaussovského svazku čočkou



Maticová transformace mezi rovinami pasu:

$$M \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = M_3 M_2 M_1$$

Vyjádření komplexního parametru transformovaného svazku v rovině pasu

$$q_2 = iq_{02} \quad \text{X} \quad q_2 = \frac{ACq_{01}^2 + BD + iq_{01}}{C^2 q_{01}^2 + D^2}$$

Porovnání reálné a imaginární části:

Reálná část → **určuje polohu pasu transformovaného svazku**

Imaginární část → **určuje poloměr pasu transformovaného svazku**

Výsledky transformace svazku čočkou

Poloha pasu transformovaného svazku

$$1+\frac{z_1}{f'}=\left[\left(1+\frac{z_1}{f'}\right)^2+\left(\frac{q_{01}}{f'}\right)^2\right]\left(1-\frac{z_2}{f'}\right)$$

Poloha pasu transformovaného svazku z_2 je určena polohou pasu vstupního svazku z_1 a jeho Rayleighovou vzdáleností q_{01}.

Poloměr pasu transformovaného svazku

$$w_{01}=w_{02}\left[\left(1+\frac{z_1}{f'}\right)^2+\left(\frac{q_{01}}{f'}\right)^2\right]^{1/2}$$

Poloměr pasu transformovaného svazku w_{02} je určen poloměrem pasu vstupního svazku w_{01} a jeho polohou z_1.

Zápis transformace pomocí příčného měřítka „m“

Přeznačení polohy pasu:
Poloha pasu vstupního svazku vzhledem k předmětovému ohniskovému bodu: $l_1 = f'+z_1$
Poloha pasu výstupního svazku vzhledem k obrazovému ohniskovému bodu: $l_2 = f'-z_2$

$$w_{02}=m\cdot w_{01},\qquad \theta_2=\frac{1}{m}\cdot\theta_1,$$

$$l_2=m^2\cdot l_1$$

$$m=\frac{f'}{\sqrt{l_1^2+q_{01}^2}}$$

Speciální případ:
Pas vstupního svazku je v předmětové ohniskové rovině čočky

$$l_1=0,\qquad l_2=0$$

$$m=\frac{f'}{q_{01}}$$

Úloha III.1: Volné šíření Gaussovského svazku

Zadání: Svazek He-Ne laseru (λ=632.8 nm) se šíří volným prostorem a ve vzdálenosti *L* od pasu vytváří na stínítku kolmém k ose svazku stopu s gaussovským profilem o poloměru *w*. Určete poloměr pasu svazku w_0 tak, aby stopa vytvořená na stínítku mělo co nejmenší poloměr. Výsledný vztah vyčíslete pro *L*=500 mm a ověřte ho s použitím programu Oslo Premium.

Poloměr svazku ve vzdálenosti z=L: $$w = w_0\sqrt{1+\frac{L^2}{q_0^2}}, \quad kde \quad q_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Podmínka minimalizace stopy svazku: $$\frac{\partial w}{\partial w_0} = 0$$

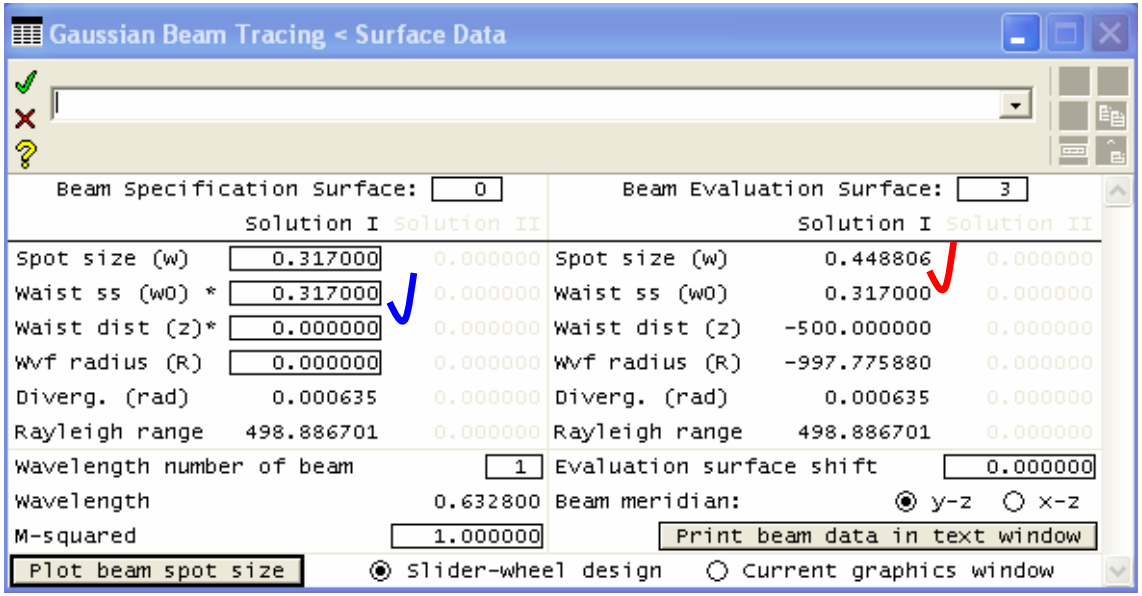
↓

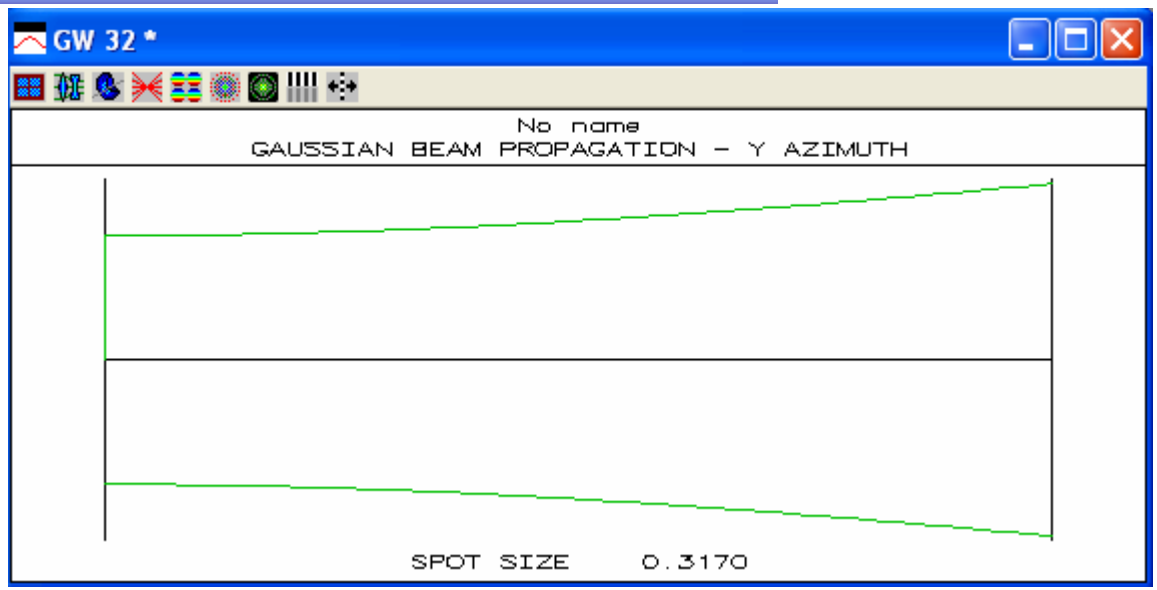
Optimální poloměr pasu svazku: $$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}}$$

Minimální poloměr stopy: $$w = \sqrt{2}w_0 = \sqrt{\frac{2\lambda L}{\pi}}$$

Volné šíření Gaussovského svazku

Parametry: λ=632.8 nm, L=500 mm $\longrightarrow$ $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}} = 0.317mm,$ $w = \sqrt{2}w_0 = 0.4488mm$





Úloha III.2: Obecná transformace gaussovského svazku čočkou

Zadání: Svazek laseru Verdi V2 (λ=532 nm) je transformován čočkou o ohniskové vzdálenosti f´=50 mm. Určete polohu a poloměr pasu transformovaného svazku, víte-li, že vstupní svazek má poloměr pasu w_{01}=0.2 mm a je umístěn do předmětové ohniskové roviny čočky. Vlastní výpočet ověřte pomocí programu Oslo Premium. Pro simulaci transformace použijte ideální čočku („Perfect Lens“).

Rayleighova vzdálenost vstupního svazku: $q_0 = \frac{\pi w_{01}^2}{\lambda} = 236.21mm$

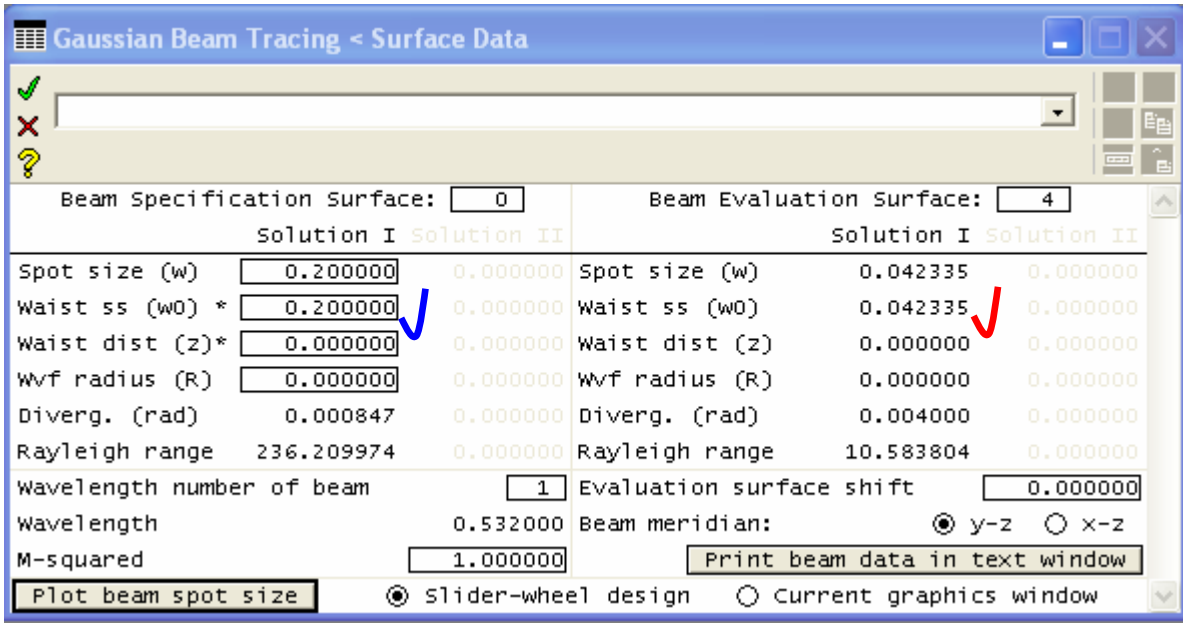
Příčné měřítko zobrazení: $m = \frac{f'}{q_0} = 0.2116$

Poloha pasu vstupního svazku: $l_1 = 0$

Poloha pasu transformovaného svazku: $l_2 = 0$

Poloměr pasu transformovaného svazku: $w_{02} = m w_{01} = 0.04232mm$

Obecná transformace gaussovského svazku čočkou

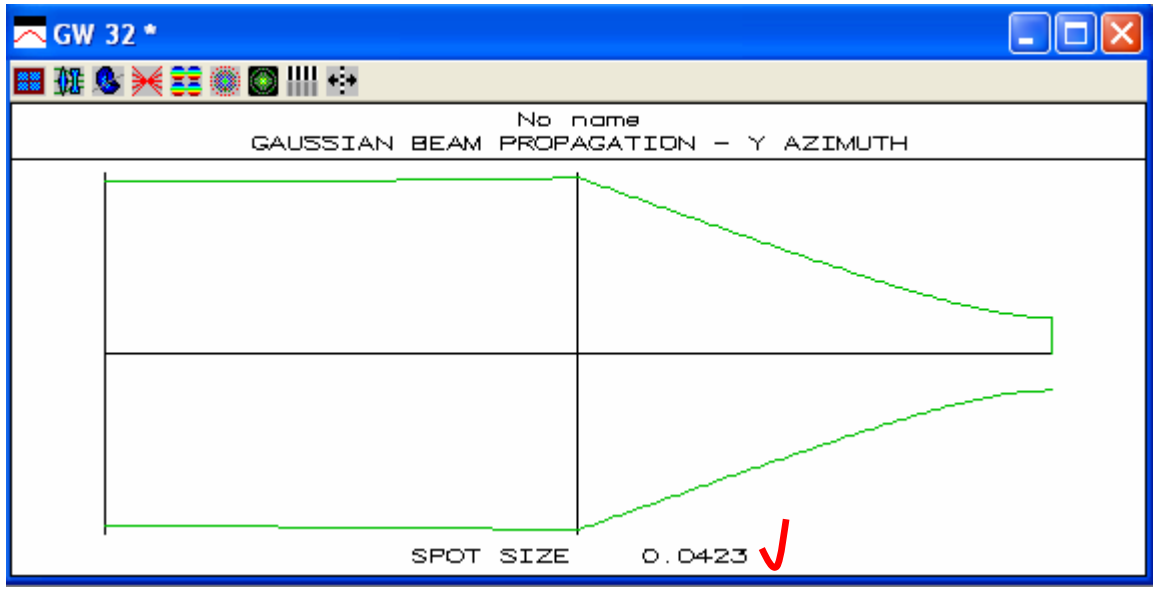


Vypočtené parametry:

w_{01}=0.2 mm

q_0=236.21 mm

w_{02}=0.04232 mm



Úloha III.3: Fokusace gaussovského svazku čočkou

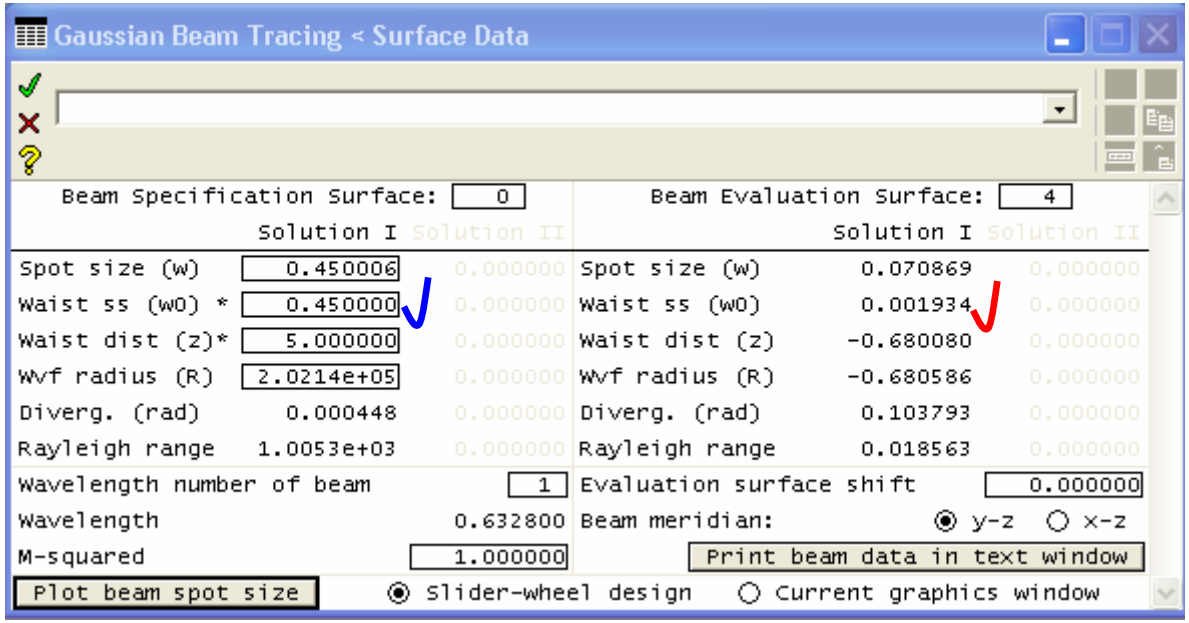
Zadání: Svazek He-Ne laseru, který má vlnovou délku λ=632 nm, výkon P=20 mW a poloměr pasu w_0=0.45 mm, má být navázán do optického vlákna o poloměru ρ=1.5 μm. Navázání se provede tak, že svazek je na čelo vlákna fokusován pomocí mikroskopového objektivu. Určete ohniskovou vzdálenost objektivu, při které za předpokladu ideální justáže zachytí čelo vlákna 70 % výkonu svazku dopadajícího na objektiv. Příčné omezení vstupního svazku objektivem neuvažujte. Fokusaci svazku ověřte v programu Oslo Premium.

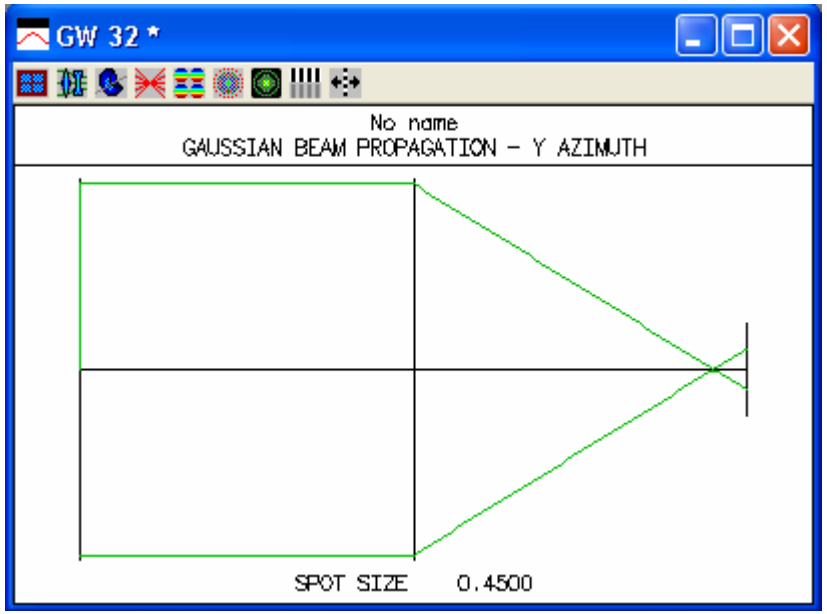
Výkon fokusovaného svazku zachycený čelem vlákna: $$P = P_0\left[1-\exp\left(-\frac{2\rho^2}{w_0'^2}\right)\right]$$

Poloměr pasu fokusovaného svazku pro zachycený výkon $\frac{P}{P_0}$: $$w_0' = \sqrt{-\frac{2\rho^2}{\ln\left(1-\frac{P}{P_0}\right)}}$$

Ohnisková vzdálenost objektivu (q_0>>f'): $$f' = \frac{\pi w_0 w_0'}{\lambda}$$

Fokusace gaussovského svazku čočkou – program Oslo Premium



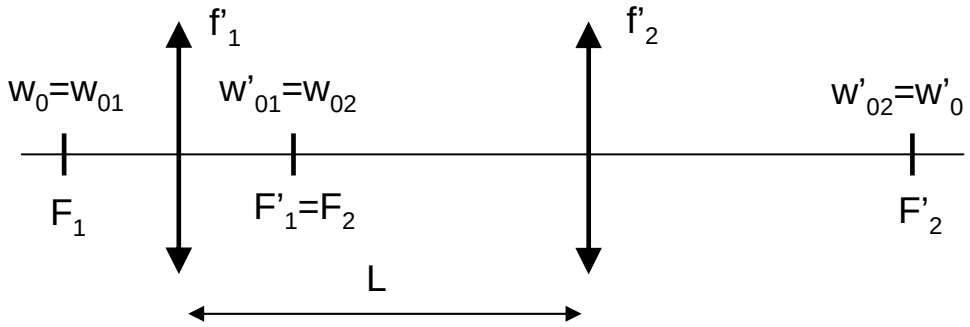


Zadané parametry:
λ=632,8 nm
w_0=0.45 mm
ρ=1.5 µm
P/P_0=0.7

Vypočtené parametry:
w'_0=1.93 µm
f'=4.32 mm

Úloha III.4: Návrh laserového rozšiřovače

Zadání: Gaussovský svazek He-Ne laseru o vlnové délce λ = 633 nm má poloměr pasu w_0=0.2 mm. Navrhněte dvoučlenné laserové rozšiřovače Keplerova a Galileova typu, které vstupní svazek transformují na svazek s Rayleighovou vzdáleností q'_0=1.8 m. Při návrhu systému respektujte podmínku, aby stavební délka systému byla L=200 mm. Funkčnost navrženého systému ověřte v programu OSLO Premium.



Rayleighova vzdálenost vstupního svazku: $q_0 = \dfrac{\pi w_0^2}{\lambda}$ Pološířka pasu svazku za rozšiřovačem: $w_0' = \sqrt{\dfrac{\lambda q_o'}{\pi}}$

Transformace pasu svazku 1. a 2. členem rozšiřovače: $w_{01}' = \dfrac{f_1'}{q_0} w_0 = w_{02}$, $w_0' = \dfrac{f_2'}{q_{02}} w_{02}$

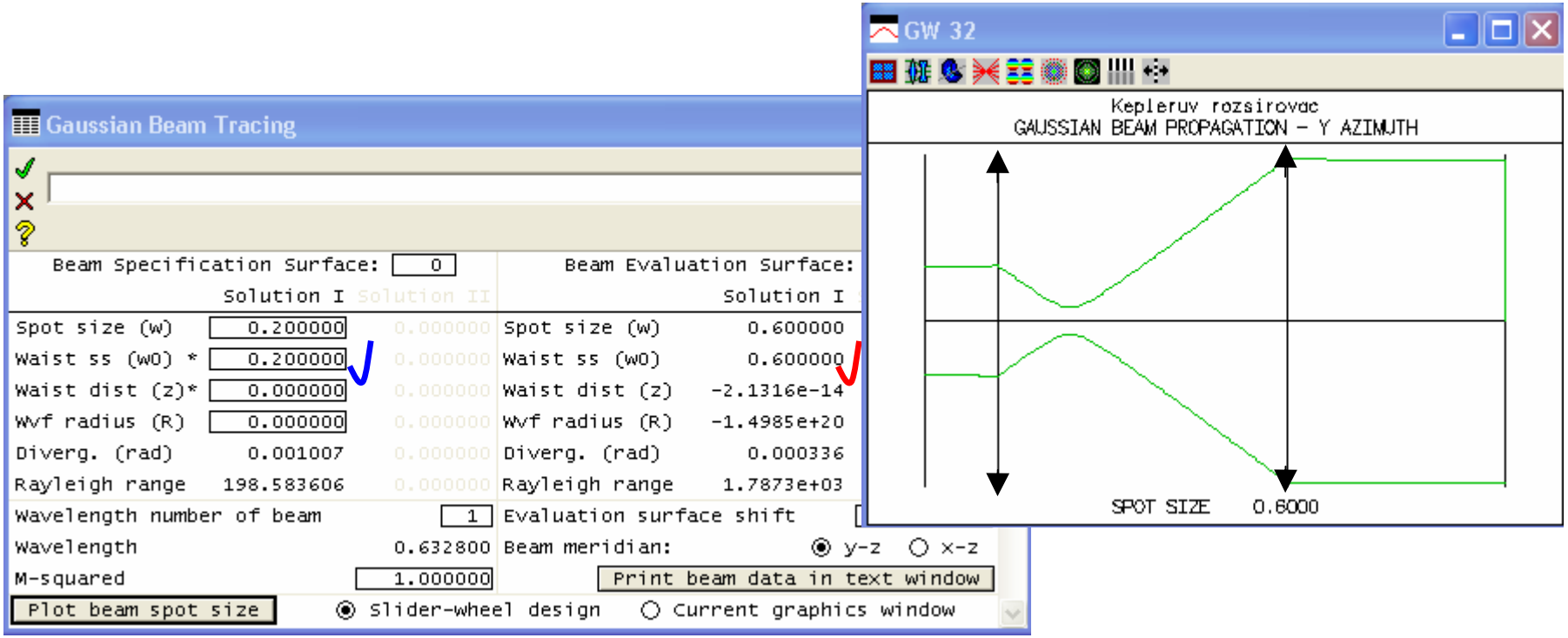
$$\Rightarrow \quad w_0' = \left|\frac{f_2'}{f_1'}\right| w_0, \qquad f_1' + f_2' = L$$

Návrh laserového rozšiřovače – program Oslo Premium

Rozšiřovač Keplerova typu $\left(f_1^{'} > 0\right)$

Požadavek: $L = 200 \quad mm, \quad w_0 = 0.2 \quad mm \quad q_0^{'} = 1.8 \quad m \Rightarrow w_0^{'} = 0.6 \quad mm$

$$\Longrightarrow \quad f_1^{'} = \frac{L w_0}{w_0 + w_0^{'}} = 50 \quad mm, \qquad f_2^{'} = \frac{L w_0^{'}}{w_0 + w_0^{'}} = 150 \quad mm$$

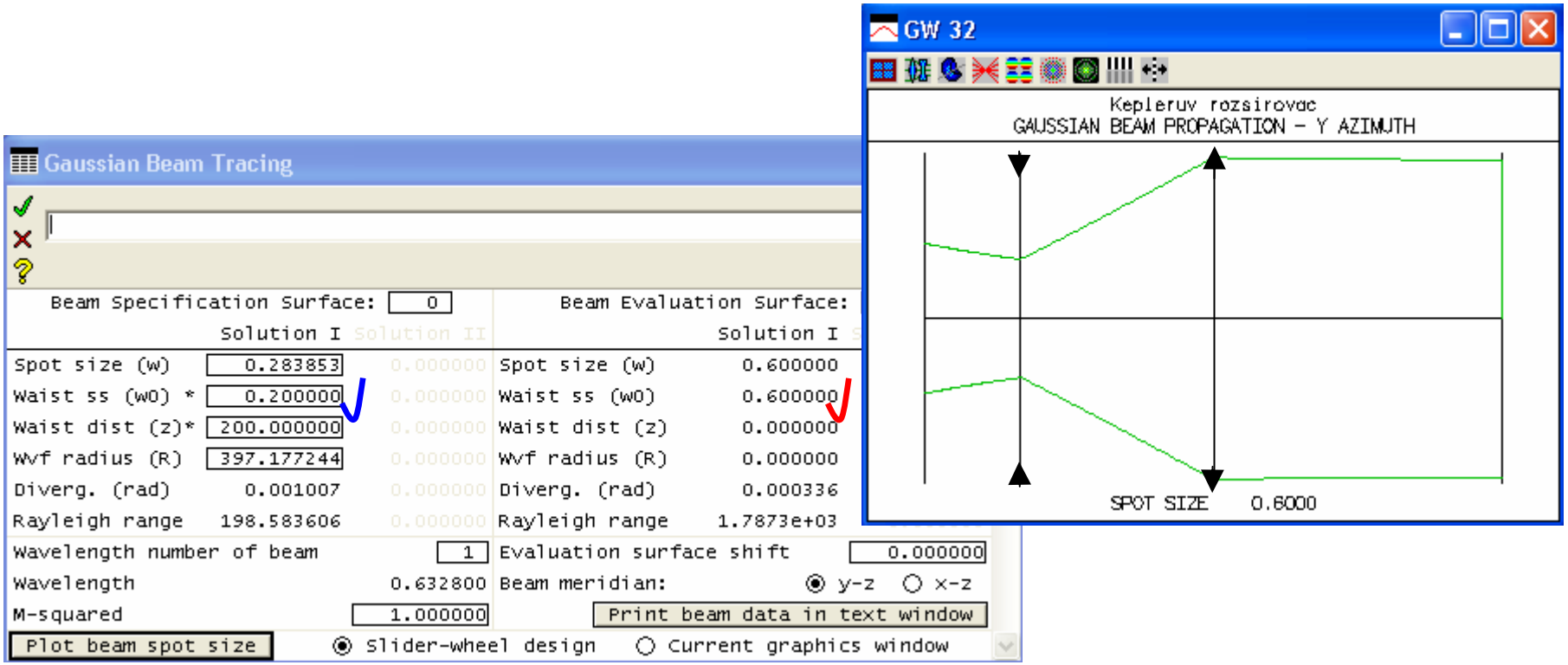


Návrh laserového rozšiřovače – program Oslo Premium

Rozšiřovač Galileova typu $\left(f_1^{'} > 0\right)$

Požadavek: $L = 200 \quad mm, \quad w_0 = 0.2 \quad mm \quad q_0^{'} = 1.8 \quad m \Rightarrow w_0^{'} = 0.6 \quad mm$

$$\Longrightarrow f_1^{'} = \frac{L w_0}{w_0 - w_0^{'}} = -100 \quad mm, \qquad f_2^{'} = \frac{L w_0^{'}}{w_0^{'} - w_0} = 300 \quad mm$$

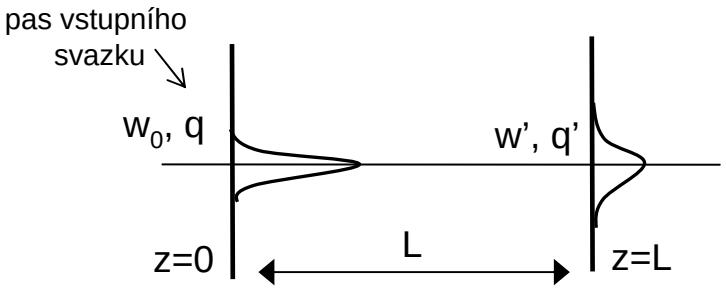


Úloha III.5: Šíření gaussovského svazku prostředím SELFOC

Zadání: Proveďte matematický popis šíření gaussovského svazku prostředím SELFOC s indexem lomu $n = n_0\left(1-\alpha^2 r^2/2\right)$, kde n_0 a α jsou reálné konstanty a $r^2=(x^2+y^2)$. Diskutujte podmínky šíření svazku v závislosti na jeho poloměru pasu. Gradientní prostředí je omezeno rovinnými plochami, na které svazek dopadá kolmo. Pas svazku leží na vstupní ploše prostředí, prostředí má tloušťku L. Úlohu řešte s použitím paraxiální aproximace.

Transformační matice pro SELFOC prostředí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha L) & \frac{1}{L}\sin(\alpha L) \\ -\alpha\sin(\alpha L) & \cos(\alpha L) \end{bmatrix}$$



Rovina z=0: $q = iq_0$ Rovina z=L: $\frac{1}{q'} = \frac{1}{R'} - i\frac{\lambda}{\pi w'^2}$ Maticová transformace: $q' = \frac{Aq+B}{Cq+D}$ ⇨

Parametry svazku v rovině z=L

Poloměr svazku w':

$$w' = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{\left(A^2q_0^2+B^2\right)}{q_0}}$$

Poloměr křivosti vlnoplochy R':

$$R' = \frac{A^2q_0^2+B^2}{ACq_0^2+BD}$$

Šíření gaussovského svazku prostředím SELFOC

Diskuze speciálních případů

Případ I. $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha\pi}}$

Pro libovolnou vzdálenost L platí:

$$w' = w_0$$
$$R' = \infty$$

→ Svazek má uvnitř gradientního prostředí konstantní poloměr a rovinnou vlnoplochu – šíří se bez difrakční rozbíhavosti.
Difrakce vstupního svazku je přesně kompenzována refrakcí prostředí.

Případ II. $w_0 < \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha\pi}}$

Pro vzdálenosti $z = \frac{m\pi}{\alpha}$:

$$w' = w_0$$
$$R' = \infty$$

Pro vzdálenosti $z = \frac{(2m+1)\pi}{2\alpha}$:

$$w' = \frac{\lambda}{\alpha\pi w_0} > w_0$$
$$R' = \infty$$

↓

Poloměr vstupního svazku je pro dané prostředí malý, takže se svazek nejprve difrakcí rozšiřuje a ve vzdálenosti $z=(2m+1)\pi/2\alpha$ dosahuje maximálního poloměru.
Pak se vlivem refrakce zúžuje až na původní poloměr w_0. Tento vývoj svazku se v prostředí periodicky opakuje.

Případ III. $w_0 > \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha\pi}}$

Pro vzdálenosti $z = \frac{m\pi}{\alpha}$:

$$w' = w_0$$
$$R' = \infty$$

Pro vzdálenosti $z = \frac{(2m+1)\pi}{2\alpha}$:

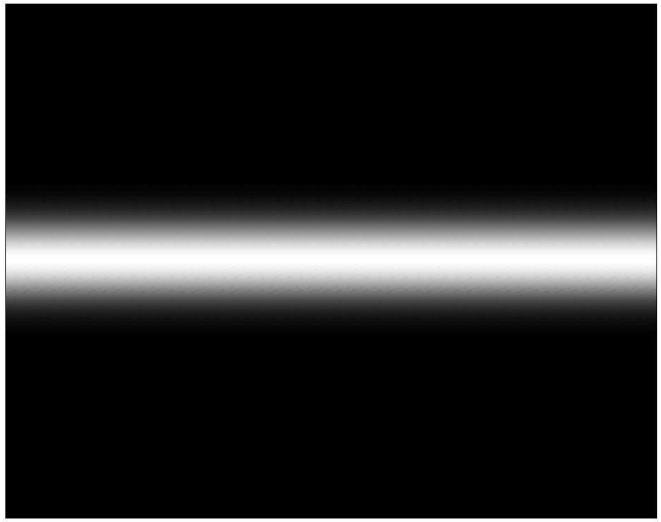
$$w' = \frac{\lambda}{\alpha\pi w_0} < w_0$$
$$R' = \infty$$

↓

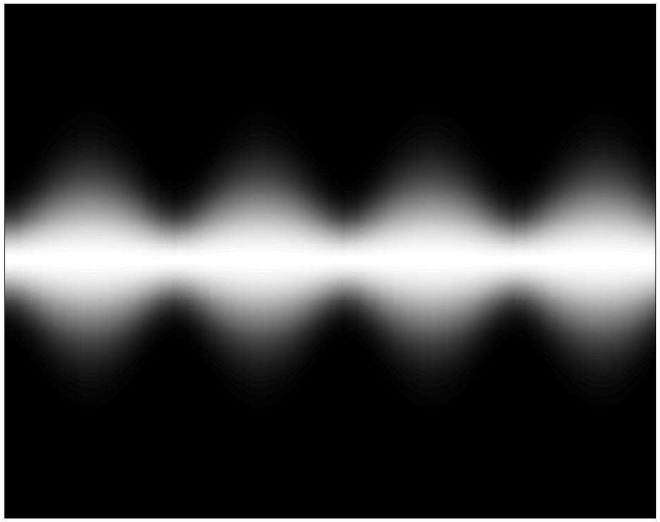
Poloměr vstupního svazku je pro dané prostředí velký, takže refrakce překonává difrakci a ve vzdálenosti $z=(2m+1)\pi/2\alpha$ fokusuje svazek do stopy s minimálním Poloměrem. Pak se svazek zase difrakcí rozšiřuje na původní poloměr w_0. Tento proces probíhá periodicky.

Šíření gaussovského svazku prostředím SELFOC – simulace MATLAB

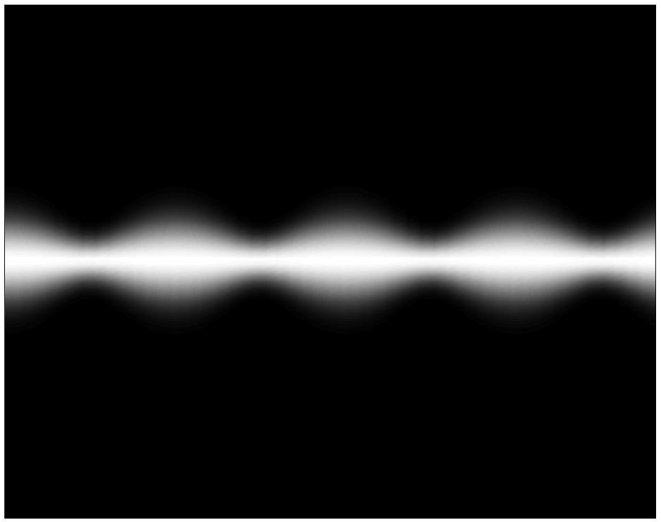
Případ I: Refrakce kompenzuje difrakci



Případ II:
Difrakce vstupního svazku silnější než refrakce



Případ III:
Refrakce silnější než difrakce vstupního svazku



Úloha III.6: Určení módů SELFOC prostředí

Zadání: Proveďte matematický popis monochromatických módů s obecným tvarem skalární komplexní amplitudy $U=u(x,y)\exp(i\omega t-i\beta z)$, které se šíří SELFOC prostředím s indexem lomu $n=n_0[1-\alpha^2(x^2+y^2)/2]$. Módy prostředí určete řešením Helmholtzovy rovnice. Podmínku pro existenci módů SELFOC prostředí porovnejte s podmínkou pro kompenzaci difrakce refrakcí, která byla stanovena pro gaussovský svazek použitím maticové metody .

Předpoklady:
- skalární aproximace
- zanedbání členu $\nabla\left(\nabla\varepsilon\cdot\vec{E}/\varepsilon\right)$
- separovatelnost u(x,y)

Helmholtzova rovnice :

$$\nabla^2 U+\omega^2\varepsilon\mu_0 U=0,\qquad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=n_0^2\left[1-\alpha^2\left(x^2+y^2\right)\right]$$

Označení:

$$k_0^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_0^2,\qquad \xi=x\sqrt{k_0\alpha},\qquad \eta=y\sqrt{k_0\alpha}$$

Separace proměnných:

$$u(\xi,\eta)=X(\xi)Y(\eta)$$

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}+\left(\Lambda_x-\xi^2\right)X=0,\qquad \Lambda=\Lambda_x+\Lambda_y$$

$$\frac{d^2Y}{d\eta^2}+\left(\Lambda_y-\eta^2\right)Y=0,\qquad \Lambda=\frac{k_0^2-\beta^2}{k_0\alpha}$$

Substituce:

$$X=\tilde{X}\exp\left(-\xi^2/2\right)$$
$$Y=\tilde{Y}\exp\left(-\eta^2/2\right)$$

$$\frac{d^2\tilde{X}}{d\xi^2}-2\xi\frac{d\tilde{X}}{d\xi}+\left(\Lambda_x-1\right)\tilde{X}=0$$

$$\frac{d^2\tilde{Y}}{d\eta^2}-2\eta\frac{d\tilde{Y}}{d\eta}+\left(\Lambda_y-1\right)\tilde{Y}=0$$

Řešení:

$$\tilde{X}\equiv H_m(\xi),\qquad m=\left(\Lambda_x-1\right)/2$$

$$\tilde{Y}\equiv H_n(\eta),\qquad n=\left(\Lambda_y-1\right)/2$$

$H_m, H_n\ldots$ Hermiteovy polynomy

Určení módů SELFOC prostředí

Hermiteovské - gaussovské módy pro SELFOC prostředí:

$$U_{mn} = H_m\left(x\sqrt{k_0\alpha}\right)H_n\left(y\sqrt{k_0\alpha}\right)\exp\left[-\frac{k_0\alpha}{2}\left(x^2+y^2\right)-i\beta_{mn}z\right],$$

kde $\beta_{mn} = k_0\sqrt{1-\frac{2\alpha(m+n+1)}{k_0}}$ $\longrightarrow$ módy mají rozdílné konstanty šíření – módová disperze

m=n=0: Gaussovský svazek

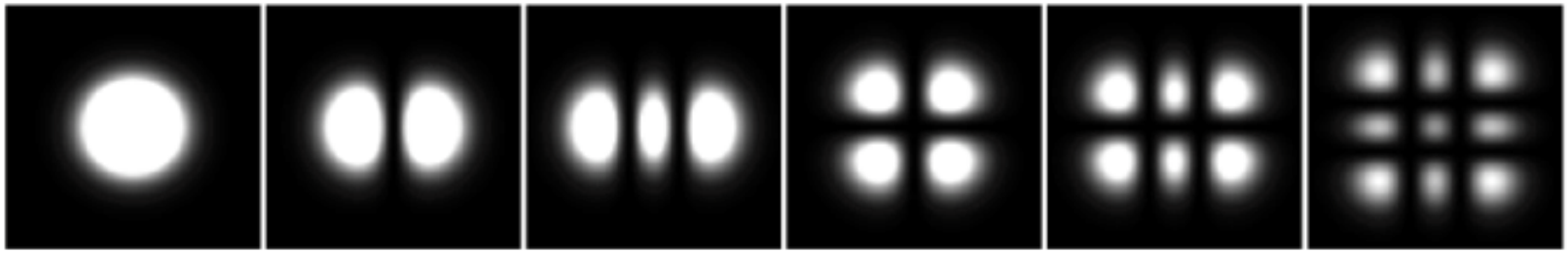
$$\exp\left[-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{w_0^2}\right] \equiv \exp\left[-\frac{k_0\alpha}{2}\left(x^2+y^2\right)\right] \longrightarrow \boxed{w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha\pi}}}$$

Gaussovský svazek se šíří SELFOC prostředím jako nedifraktující mód pouze tehdy, když je jeho poloměr pasu přizpůsoben vlnové délce a gradientu indexu lomu, který je vyjádřen pomocí konstanty α . V tomto případě je difrakční rozbíhavost kompenzována refrakcí prostředí. Identická podmínka pro poloměr pasu vedeného svazku byla získána pomocí maticového popisu šíření gaussovského svazku SELFOC prostředím.

Módy SELFOC prostředí – numerické vyhodnocení v programu MATLAB

Intenzita H-G módů

$$I_{mn} = \left|U_{mn}\right|^2$$



(0,0) (1,0) (2,0) (1,1) (2,1) (2,2)

Vyčíslení Hermiteových polynomů:

$$H_0(x) = 1,$$
$$H_1(x) = 2x,$$
$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$