INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přírodovědec – Rozvoj odborných kompetencí talentovaných studentů středních škol
ve vědecko výzkumné práci v oblasti přírodních věd
reg. č. CZ.1.07/2.3.00/09.0040

Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

ZAJÍMAVÉ ÚLOHY Z FYZIKY

Jan Říha a kolektiv

Olomouc 2012

Oponenti: Roman Kubínek
František Látal

Publikace byla připravena v rámci projektu „Přírodovědec – Rozvoj odborných kompetencí talentovaných studentů středních škol ve vědecko výzkumné práci v oblasti přírodních věd“, reg. č. CZ.1.07/2.3.00/09.0040. Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

1. vydání

ISBN 978-80-244-3014-0

Obsah

Úvod

Tato minisbírka je sestavena celkem ze 74 řešených úloh. První část tvoří 24 úloh pro nejmladší kategorii řešitelů z řad studentů ZŠ a nižších ročníků víceletých gymnázií, jež byly v minulých letech zadány v rámci okresních kol Archimédiády v Přerově. Každá ze šesti sad úloh je tématicky inspirována literárními či pohádkovými postavičkami, které je – jak věříme – pomohou přiblížit žákům a učinit přitažlivějšími.

Zbylých 50 úloh je určeno studentům SŠ. Tématicky jsou rozčleněny podle hlavních částí středoškolské fyziky, největší prostor přitom dostaly úlohy z mechaniky. Část problémů byla inspirována „Zadačnikem“ – dlouholetou rubrikou časopisu *Kvant*, autory některých úloh jsou bývalí studenti PřF UP Radek Horenský a Arnošt Žídek, kteří se v letech 1994–1998 podíleli na organizaci *Olomouckého fyzikálního korespondenčního semináře*; tato skutečnost je u jednotlivých úloh vždy uvedena v poznámce.

S nadějí, že zajímavých fyzikálních úloh není nikdy dost, doufáme, že naše sbírka si najde své čtenáře a řešitele. Přejeme jim hodně radosti a zábavy, uvítáme připomínky a upozornění na případné chyby a nepřesnosti.

V Olomouci 29. března 2012 Autoři

Kapitola 1

Úlohy Archimédiády

Soutěž ARCHIMÉDIÁDA alias kategorie G Fyzikální olympiády je určena žákům 7. ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Autorkou úloh v této části je RNDr. Dagmar Kaštilová, každá série je inspirována zadáním okresního kola soutěže v Přerově v uvedeném školním roce a má určité tématické zaměření.

1.1 Fyzika v pařezové chaloupce

Úlohy okresního kola Archimediády v Přerově ve školním roce 2004/2005.

Úloha 1.1

Křemílek a Vochomůrka se rozhodli, že postaví hráz na potoce. Nejdřív museli dovézt materiál. Na palouku v lese si nachystali 30 kamenů. Na odvoz kamenů měli vozík, na který se vešly vždy dva kameny. Křemílek změřil, že od okamžiku, kdy s prázdným vozíkem vyjeli od potoka k palouku pro kameny, až po okamžik, kdy u potoka vyložili poslední kámen, uplynula doba 4,7 h. Vochomůrka zase změřil, že s plným vozíkem se pohybují průměrnou rychlostí 1,1 m/s a jedna cesta s nákladem od palouku k potoku jim trvá 8 min. Na naložení nebo vyložení vozíku potřebovali vždy 2 min. Vypočítejte:

a) Jak daleko je od palouku k potoku?
b) Jakou průměrnou rychlostí se Křemílek s Vochomůrkou pohybovali s prázdným vozíkem?
c) Jak dlouho jeli po skončení práce s prázdným vozíkem k pařezové chaloupce, která je od potoku ve vzdálenosti 300 m. Všechny cesty Křemílka i Vochomůrky vedli po rovině.

Řešení:

Označíme zadané veličiny $n = 30$ (počet kamenů), $t = 4{,}7\,\mathrm{h} = 282\,\mathrm{min}$ (celková doba), $v_1 = 1{,}1\,\mathrm{m/s}$ (rychlost s plným vozíkem), $t_1 = 8\,\mathrm{min} = 480\,\mathrm{s}$ (doba jedné jízdy s plným vozíkem), $t_\mathrm{N} = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$ (doba nakládky nebo vykládky).

a) Vzdálenost od palouku k potoku: $s = v_1 \cdot t_1 = (1{,}1 \cdot 480)\,\mathrm{m} = 528\,\mathrm{m}$.
b) Určíme hledanou rychlost jízdy s prázdným vozíkem v_2. Protože se na vozík vešly 2 kameny, museli jet 15krát s plným i prázdným vozíkem a 15krát naložit i vyložit vozík. Vypočítáme postupně doby potřebné na jednotlivé činnosti.
Doba potřebná na 15 jízd s plným vozíkem je $t' = 15t_1 = 15 \cdot 8\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{min}$.

Doba potřebná na 15 naložení a vyložení vozíku je $t'_N = 15 \cdot 2 \cdot t_N = 15 \cdot 2 \cdot 2\,\text{min} = 60\,\text{min}$.

Doba potřebná na 15 jízd s prázdným vozíkem je $t'_2 = t - t' - t'_N = (282 - 120 - 60)\,\text{min} = 102\,\text{min}$.

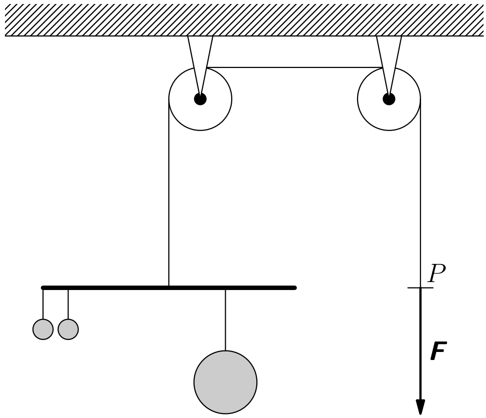
Doba jedné jízdy s prázdným vozíkem je $t_2 = t'_2/15 = 102\,\text{min}/15 = 6{,}8\,\text{min} = 408\,\text{s}$.

Rychlost jízdy s prázdným vozíkem vychází $v_2 = s_2/t_2 = 528\,\text{m}/408\,\text{s} = 1{,}3\,\text{m/s}$.

c) Vzdálenost od potoku k chaloupce měří $s_D = 300\,\text{m}$. Doba jízdy od potoku k chaloupce $t_D = s_D/v_2 = (300/1{,}3)\,\text{s} = 231\,\text{s} = 3{,}9\,\text{min}$.
Po skončení práce trvala cesta s prázdným vozíkem k pařezové chaloupce 3,9 min.

Úloha 1.2

Křemílek s Vochomůrkou chtěli určit hmotnost velkého kamene. Vyrobili si zařízení ze dvou pevných kladek, lana a tyče o délce 4 m. Lano uvázali ve středu tyče a vedli ho přes obě kladky (viz obr. 1.1). Na jednu stranu tyče zavěsili do vzdálenosti 0,8 m od středu tyče kámen, jehož hmotnost určovali. Na druhou stranu tyče zavěsili dva malé kameny, každý o hmotnosti 2 kg tak, že jeden visel na okraji tyče a druhý ve vzdálenosti 0,4 m od prvního malého kamene. Po zavěšení všech kamenů byla tyč ve vodorovné poloze.



Obr. 1.1: K zadání úlohy 1.2

Vypočítejte:

a) Jakou hmotnost má velký kámen?
b) Jakou silou F musí Křemílek a Vochomůrka působit na lano v bodě P, jestliže zanedbáme hmotnost tyče?
c) Jakou silou F' musí Křemílek a Vochomůrka působit na lano v bodě P, jestliže uvažujeme, že hmotnost tyče jsou 3 kg?

Řešení:

Označíme zadané veličiny $d = 4\,\text{m}$ (délka tyče), $x = 1{,}2\,\text{m}$ (vzdálenost velkého kamene od okraje), $m_1 = 2\,\text{kg}$ (hmotnost malého kamene), $a_1 = 2\,\text{m}$ (vzdálenost malého kamene od středu tyče), $a'_1 = 2\,\text{m} - 0{,}4\,\text{m} = 1{,}6\,\text{m}$ (vzdálenost druhého malého kamene od středu tyče).

a) Vypočítáme síly, kterými působí malé kameny na tyč $F_1 = F'_1 = m_1 \cdot g = 20\,\text{N}$. Tyč je v rovnováze (mohla by se otáčet kolem středu, kde je upevněno lano), proto se musí rovnat momenty sil působících na různých stranách od středu tyče.

$$M_1 = F_1 \cdot a_1 + F'_1 \cdot a'_1 = 20\,\text{N} \cdot 2\,\text{m} + 20\,\text{N} \cdot 1{,}6\,\text{m} = 72\,\text{N·m},$$
$$M_2 = M_1 = 72\,\text{N} \cdot \text{m}, \qquad M_2 = F_2 \cdot a_2.$$

Pro rameno síly, kterou působí na tyč velký kámen, dostáváme $a_2 = 2\,\mathrm{m} - 1{,}2\,\mathrm{m} = 0{,}8\,\mathrm{m}$, dále vychází $F_2 = M_2/a_2 = (72/0{,}8)\,\mathrm{N} = 90\,\mathrm{N}$ a $m_2 = F_2/g = 9\,\mathrm{kg}$.
Hmotnost velkého kamene je 9 kg.

b) $F = F_1 + F_1' + F_2 = 20\,\mathrm{N} + 20\,\mathrm{N} + 90\,\mathrm{N} = 130\,\mathrm{N}$.
Křemílek a Vochomůrka musí v bodě P působit na lano silou 130 N.

c) Hmotnost tyče je $m_\mathrm{t} = 3\,\mathrm{kg}$, síla, kterou působí samotná tyč na lano vychází $F_\mathrm{t} = m_\mathrm{t} \cdot g = 30\,\mathrm{N}$, $F' = F + F_\mathrm{t} = 130\,\mathrm{N} + 30\,\mathrm{N} = 160\,\mathrm{N}$.
Křemílek a Vochomůrka musí v tomto případě působit na lano silou 160 N.

Úloha 1.3

Když Křemílek s Vochomůrkou postavili hráz, vytvořilo se na potoce jezírko. Voda v jezírku, které dosahuje až po okraj hráze, má hmotnost 4 t a na hráz působí maximálním tlakem 9 kPa. Hustota vody je 1000 kg/m^3. Vypočítejte:

a) Jak dlouho trvalo, než se jezírko naplnilo až po okraj hráze, jestliže každou minutu přiteklo 8 l a zároveň odteklo 1,6 l vody?

b) Jaká je hloubka v jezírku u hráze?

c) Jakou tlakovou silou působí voda v plném jezírku na kámen, který leží na dně v místě, kde je hloubka jezírka o 0,3 m menší než hloubka u hráze? Dotyková plocha kamene s vodou má tvar obdélníku o rozměrech 15 cm × 20 cm.

Řešení:

Označíme zadané veličiny $m = 4\,\mathrm{t} = 4000\,\mathrm{kg}$, $p = 9\,\mathrm{kPa} = 9000\,\mathrm{Pa}$, $\varrho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

a) $V_\mathrm{p} = 8\,\mathrm{l}$, $V_0 = 1{,}6\,\mathrm{l}$, $V_1 = V_\mathrm{p} - V_0 = (8 - 1{,}6)\,\mathrm{l} = 6{,}4\,\mathrm{l}$. Pro objem vody v jezírku pak vychází $V = m/\varrho = 4000/1000\,\mathrm{m^3} = 4\,\mathrm{m^3} = 4000\,\mathrm{l}$. Doba, za kterou se naplní jezírko až po okraj hráze, je $t = V/V_1 = (4000/6{,}4)\,\mathrm{min} = 625\,\mathrm{min} = 10\,\mathrm{h}\ 25\,\mathrm{min}$.
Jezírko se naplnilo za 10 h 25 min.

b) Největší tlak na hráz je u dna. Platí $p = h \cdot \varrho \cdot g$, odkud plyne

$$h = \frac{p}{\varrho \cdot g} = \left(\frac{9000}{1000 \cdot 10}\right)\mathrm{m} = 0{,}9\,\mathrm{m}.$$

Hloubka u hráze je 0,9 m.

c) Hloubka pod vodou, v níž leží kámen je $h_2 = 0{,}9\,\mathrm{m} - 0{,}3\,\mathrm{m} = 0{,}6\,\mathrm{m}$, plocha kamene $S = 15\,\mathrm{cm} \times 20\,\mathrm{cm} = 300\,\mathrm{cm^2} = 0{,}03\,\mathrm{m^2}$, tlaková síla na kámen $F = S \cdot h_2 \cdot \varrho \cdot g = 0{,}03 \cdot 0{,}6 \cdot 1000 \cdot 10\,\mathrm{N} = 180\,\mathrm{N}$.
Na kámen působí tlaková síla 180 N.

Úloha 1.4

Když už Křemílek s Vochomůrkou měli na potoce jezírko, vyrobili si jedno užitečné zařízení, jehož název je ukryt v tajence. Až ho odhalíte, napište, k čemu toto zařízení Křemílek a Vochomůrka používali.

Návod na odhalení tajenky:
V následujících číselných řadách je vždy předposlední číslo nahrazeno hvězdičkou.

Každá řada je sestavena podle jiného pravidla. Objevte je a doplňte chybějící čísla. Nalezenému číslu přiřaďte písmeno podle tabulky T1. Toto písmeno doplňte do správného políčka tajenky. Odpovídající číselné řady a políčka v tajence jsou označeny stejnými římskými číslicemi.

I) 1, 4, 9, $*$, 25
II) 10, 12, 14, 16, $*$, 20
III) −7, −5, −3, −1, $*$, 3
IV) 7, 10, 13, 7, 10, $*$, 7
V) 729, 243, 81, 27, $*$, 3
VI) 15, 12, 9, 6, $*$, 0
VII) 625, 125, 25, $*$, 1

Tabulka T1:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Pomocná tabulka pro tajenku:

I	II	III	IV	V	VI	VII

Odpovězte na otázku: K čemu Křemílek a Vochomůrka zařízení z tajenky používali?

Řešení:

Správně doplněné řady:

I) 1, 4, 9, $\boxed{\mathbf{16}}$, 25
II) 10, 12, 14, 16, $\boxed{\mathbf{18}}$, 20
III) −7, −5, −3, −1, $\boxed{\mathbf{1}}$, 3
IV) 1, 3, 5, 7, 9, 11, $\boxed{\mathbf{13}}$, 15
V) 729, 243, 81, 27, $\boxed{\mathbf{9}}$, 3
VI) 15, 12, 9, 6, $\boxed{\mathbf{3}}$, 0
VII) 625, 125, 25, $\boxed{\mathbf{5}}$, 1

I	II	III	IV	V	VI	VII
P	R	A	M	I	C	E

Tajenka: PRAMICE
Odpověď: Křemílek s Vochomůrkou použijí pramici k dopravě po jezírku.
Doporučené bodování: Za každé správně nalezené číslo 1 bod, za správnou tajenku 2 body a za správnou odpověď 1 bod.

1.2 Fyzika u pejska a kočičky

Úlohy okresního kola Archimediády v Přerově ve školním roce 2005/2006.

Úloha 1.5

Pejsek s kočičkou šli na nedělní výlet do lesa. Nejprve šli 30 min rovnoměrným pohybem rychlostí o velikosti 8 km/h. Pak se zastavili, aby se nasvačili. Po 12 minutách odpočinku pejsek vyskočil a utíkal za zajícem. Pohyboval se rovnoměrně přímočaře rychlostí o velikosti 20 km/h a uběhl 6 km. Pak se obrátil a vracel se stejnou cestou zpět ke kočičce, která celou dobu čekala na stejném místě. Cesta ke kočičce trvala pejskovi o 3 minuty déle než cesta za zajícem. Když pejsek doběhl rovnoměrným pohybem ke kočičce, ihned se vydali domů. Vraceli se kratší cestou, šli rovnoměrným pohybem rychlostí o velikosti 10 km/h a domů došli za 15 min.
a) Sestrojte graf závislosti velikosti rychlosti pejska na čase.
b) Určete celkovou dráhu, kterou pejsek urazil během výletu.
c) Vypočítejte průměrnou rychlost pejska.

Řešení:

Označíme si zadané veličiny a dopočítáme chybějící údaje:
$v_1 = 8\,\mathrm{km/h}$, $t_1 = 30\,\mathrm{min} = 0{,}5\,\mathrm{h}$, $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 4\,\mathrm{km}$,
$v_2 = 0\,\mathrm{km/h}$, $t_2 = 12\,\mathrm{min} = 0{,}2\,\mathrm{h}$, $s_2 = 0\,\mathrm{km}$,
$v_3 = 20\,\mathrm{km/h}$, $s_3 = 6\,\mathrm{km}$,

$$t_3 = \frac{s_3}{v_3} = 0{,}3\,\mathrm{h} = 18\,\mathrm{min},$$

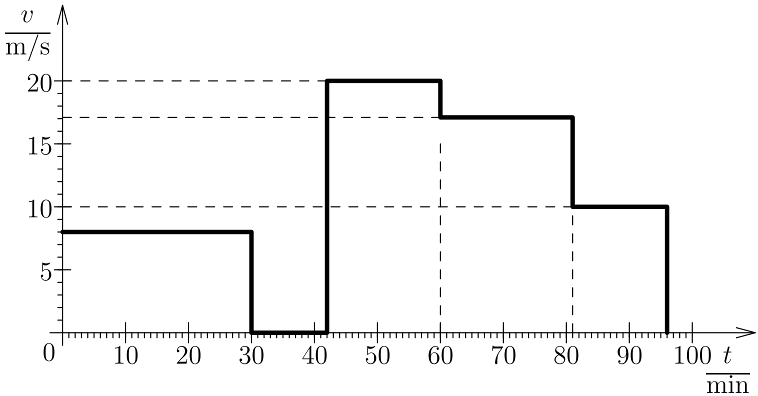
$s_4 = s_3 = 6\,\mathrm{km}$, $t_4 = t_3 + 3\,\mathrm{min} = 21\,\mathrm{min} = 0{,}35\,\mathrm{h}$,

$$v_4 = \frac{s_4}{v_4} = 17{,}1\,\mathrm{km/h},$$

$v_5 = 10\,\mathrm{km/h}$, $t_5 = 15\,\mathrm{min} = 0{,}25\,\mathrm{h}$, $s_5 = v_5 \cdot t_5 = 2{,}5\,\mathrm{km}$.
a) Graf závislosti velikosti rychlosti pejska na čase je na obr. 1.2.
b) Celkovou dráhu pejska určíme buď výpočtem nebo z grafu (v tomto případě je nutné osu času označit v hodinách); $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 18{,}5\,\mathrm{km}$. Pejsek urazil dráhu 18,5 km.
c) Celková doba pohybu $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 96\,\mathrm{min} = 1{,}6\,\mathrm{h}$. Průměrná rychlost

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = 11{,}6\,\mathrm{km/h}.$$

Průměrná rychlost pejska byla 11,6 km/h.



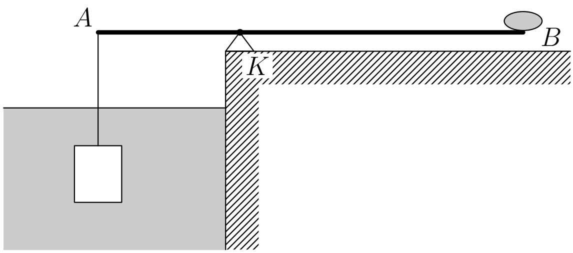
Obr. 1.2: K řešení úlohy 1.5

Úloha 1.6

V horkém létě si pejsek na břehu řeky vybudoval chladicí zařízení. Na ostrý kámen K (viz obr. 1.3), který byl těsně na břehu řeky, položil tyč o délce $d = 90\,\mathrm{cm}$ tak, že 1/3 délky přečnívala nad hladinu. Na konec A tyče upevnil lano a zavěsil na něj vodotěsný kanystr s nápojem tak, že celý kanystr byl pod vodou. Vnější objem kanystru je $V_0 = 5\,\mathrm{l}$, hmotnost kanystru s nápojem je $m_0 = 6{,}8\,\mathrm{kg}$. Na konec B tyče umístil pejsek vhodný kámen. Jaká musí být hmotnost tohoto kamene, aby tyč byla v rovnováze? Hmotnost tyče zanedbejte. Hustota vody v řece je $\varrho_\mathrm{v} = 1\,\mathrm{g/cm^3}$, $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Řešení:

Na kanystr působí vztlaková síla $F_\mathrm{vz} = V_0 \cdot \varrho_\mathrm{v} \cdot g = 50\,\mathrm{N}$ a tíhová síla $F_\mathrm{G} = m_0 \cdot g = 68\,\mathrm{N}$.
Na tyč v bodě A působí síla $F_1 = F_\mathrm{G} - F_\mathrm{vz} = 18\,\mathrm{N}$.
Na tyč v bodě B působí síla $F_2 = m \cdot g$, kde m je hmotnost kamene.



Obr. 1.3: K zadání úlohy 1.6

Rameno síly F_1 je $d_1 = d/3 = 0{,}3\,\mathrm{m}$, rameno síly F_2 je $d_2 = 2d/3 = 0{,}6\,\mathrm{m}$.
Moment síly F_1 je $M_1 = F_1 \cdot d_1 = 5{,}4\,\mathrm{N{\cdot}m}$ a platí $M_1 = M_2$. Pro sílu F_2 a hmotnost m dostáváme

$$F_2 = \frac{M_2}{d_2} = 9\,\mathrm{N}, \qquad m = \frac{F_2}{g} = 0{,}9\,\mathrm{kg}.$$

Hmotnost kamene musí být 0,9 kg.

Úloha 1.7

Pejsek měl narozeniny a kočička se rozhodla, že mu upeče dort. Do misky dala 300 g mouky, 150 g cukru, 3 vejce (každé o hmotnosti 50 g), 90 g tuku, 250 ml mléka (hustota mléka je 1,06 g/cm^3), 100 g hrozinek a 11 g prášku do pečiva. Všechny suroviny v misce promíchala a nalila na plech o hmotnosti 0,2 kg a dala do trouby péct. Při pečení se část tekutiny z těsta vypařila. Upečený dort měl o 1/6 menší hmotnost než těsto před pečením. Horký plech s dortem dala kočička vychladnout na drátěný tácek, který stál na 4 nožičkách, přičemž každá se dotýkala stolu plochou o obsahu $S_1 = 1{,}5\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítejte:

a) Jakým tlakem působí plech s dortem na povrch stolu?
b) Po vychladnutí dort pejsek s kočičkou rozkrájeli. První den snědli 1/4 dortu, druhý den snědli 1/3 zbytku a třetí den opět 1/3 ze zbylé části dortu. Jaká hmotnost jim zbyla na čtvrtý den?

Řešení:

a) Nejprve vypočítáme hmotnost mléka $m_\mathrm{m} = V_\mathrm{m} \cdot \varrho_\mathrm{m} = (250 \cdot 1{,}06)\,\mathrm{g} = 265\,\mathrm{g}$. Určíme celkovou hmotnost surovin

$$m = 300\,\mathrm{g} + 150\,\mathrm{g} + 3 \cdot 50\,\mathrm{g} + 90\,\mathrm{g} + 265\,\mathrm{g} + 100\,\mathrm{g} + 11\,\mathrm{g} = 1066\,\mathrm{g} = 1{,}066\,\mathrm{kg}.$$

Hmotnost dortu po upečení $m_\mathrm{d} = 5 \cdot m/6 = 888\,\mathrm{g} = 0{,}888\,\mathrm{kg}$.
Hmotnost dortu a plechu $m_\mathrm{c} = 0{,}888\,\mathrm{kg} + 0{,}2\,\mathrm{kg} = 1{,}088\,\mathrm{kg}$.
Určíme dotykovou plochu tácku a stolu $S = 4 \cdot S_1 = 6\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}0006\,\mathrm{m}^2$.
Vypočítáme tlak plechu s dortem

$$p = \frac{m_\mathrm{c} \cdot g}{S} = 18\,133\,\mathrm{Pa}.$$

b) $m_\mathrm{d} = 888\,\mathrm{g}$.
1. den snědli $888\,\mathrm{g} : 4 = 222\,\mathrm{g}$, zůstalo $888\,\mathrm{g} - 222\,\mathrm{g} = 666\,\mathrm{g}$.
2. den snědli $666\,\mathrm{g} : 3 = 222\,\mathrm{g}$, zůstalo $666\,\mathrm{g} - 222\,\mathrm{g} = 444\,\mathrm{g}$.
3. den snědli $444\,\mathrm{g} : 3 = 148\,\mathrm{g}$, zůstalo $444\,\mathrm{g} - 148\,\mathrm{g} = 296\,\mathrm{g}$.
Na 4. den zůstalo 296 g dortu.

Úloha 1.8

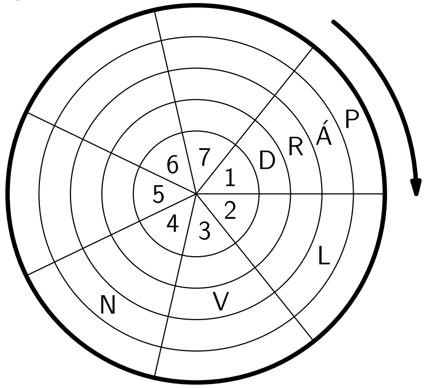
Kočička přichystala pejskovi k narozeninám jeden zvláštní dárek. O jaký dárek se jedná, zjistíte, když odhalíte tajenku v následující luštěnce. Napište, k čemu zařízení v tajence může sloužit.

Návod k luštění:
Do připraveného terče vepisujte slova o čtyřech písmenech tak, že začnete ve středu a píšete směrem k okraji terče. Jaká slova máte k jednotlivým číslům psát, vám prozradí očíslovaná legenda. První slovo už máte vyluštěné. Tajenku tvoří písmena na obvodu terče. Čtěte je ve směru šipky.

Legenda ke 4. úloze:

1. Část tlapy pejska
2. Dopravní prostředek
3. Velký a těžký hudební nástroj
4. Část domu
5. Jednotka délky ze soustavy SI
6. Oblak
7. Veličina, která je příčinou pohybu

Terč:



Tajenka: ....

K čemu se zařízení z tajenky může používat?

....

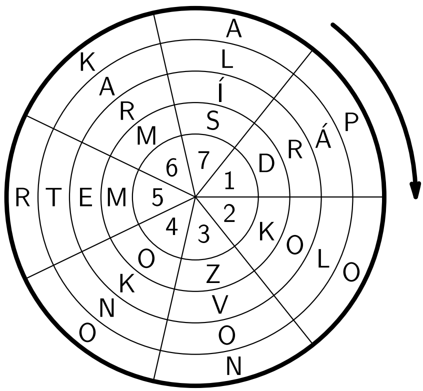
Poznámka: Vyplňujte slova, i když už znáte tajenku, za každé správně zapsané slovo máte bod.

Řešení:

Tajenka: PONORKA

Ponorka se může používat např. k dopravě pod vodou.

Návrh bodování: Za každé správně vyluštěné slovo 1 bod, správně určená tajenka 2 body, správná odpověď 2 body.



1.3 Za fyzikou ke krtkovi

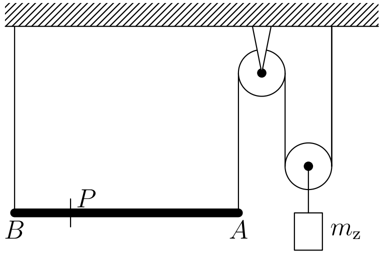
Úlohy okresního kola Archimediády v Přerově ve školním roce 2006/2007.

Úloha 1.9

Ve spižírně si krtek vyrobil polici na zásoby pomocí kladkostroje, tyče a pevných lan. Tyč o délce 2,4 m zavěsil na lana v bodech A, B (viz obr. 1.4). Hmotnost tyče je zanedbatelně malá. Krabici se zásobami umístil krtek do bodu P, který je ve vzdálenosti 0,6 m od bodu B. Aby byla tyč ve vodorovné poloze, musel krtek na volnou kladku o hmotnosti $m_\mathrm{k} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ zavěsit závaží o hmotnosti $m_\mathrm{z} = 2{,}8\,\mathrm{kg}$.

a) Vypočítejte hmotnost krabice se zásobami.

b) Určete, jakou silou je napínáno lano v bodě B.



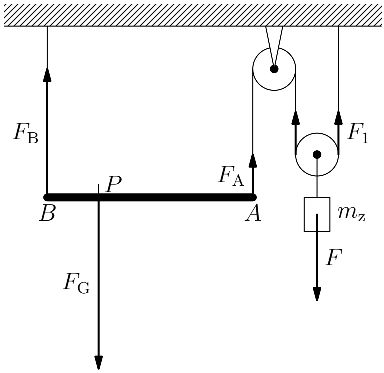
Obr. 1.4: K zadání úlohy 1.9

Řešení:

Při řešení využijeme obrázku 1.5. Označíme $d = 2{,}4\,\mathrm{m}$, $x = 0{,}6\,\mathrm{m}$, $F = (m_\mathrm{z} + m_\mathrm{k}) \cdot g = 30\,\mathrm{N}$.

a) $F_1 = F/2 = 15\,\mathrm{N}$, $F_\mathrm{A} = F_1 = 15\,\mathrm{N}$. Pro síly F_A a F_G nastala rovnováha momentů vzhledem k bodu B
$M_1 = F_\mathrm{A} \cdot d = 15 \cdot 2{,}4\,\mathrm{N\cdot m} = 36\,\mathrm{N\cdot m}$,
$M_2 = M_1$,
$M_2 = F_\mathrm{G} \cdot x \implies F_\mathrm{G} = M_2/x = (36/0{,}6)\,\mathrm{N} = 60\,\mathrm{N}$, $m = F_\mathrm{G}/g = 6\,\mathrm{kg}$.
Hmotnost krabice byla 6 kg.

b) $F_\mathrm{B} = F_\mathrm{G} - F_\mathrm{A} = 45\,\mathrm{N}$.
Lano je napínáno silou 45 N.



Obr. 1.5: K řešení úlohy 1.9

Poznámka: Úlohu lze řešit i tak, že nejprve vypočítáme F_A, F_B a teprve potom F_G.

Úloha 1.10

Při krupobití dopadla jedna kroupa na krtkovu hromádku a začala se z ní kutálet dolů tak, že v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ měla počáteční rychlost $v_0 = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$ a každou sekundu pohybu se její velikost zvětšila o 0,2 m/s. Po 3 s zrychleného pohybu se kroupa začala pohybovat po vodorovné rovině rovnoměrným přímočarým pohybem, který trval 5 s. Pak se kroupa dostala na písčitou cestičku a vlivem většího tření se začala pohybovat zpomaleným pohybem a zastavila se za 2 s.

a) Sestrojte graf závislosti velikosti rychlosti na čase.

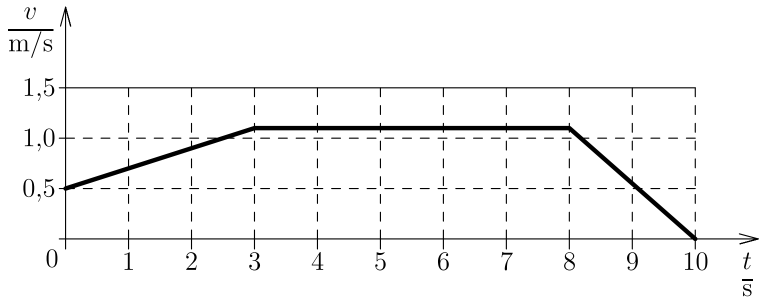
b) Z grafu určete, jakou rychlostí se kroupa pohybovala při rovnoměrném pohybu.

c) Vypočítejte dráhu, kterou kroupa urazila při rovnoměrném pohybu.

d) Z grafu určete dráhu kroupy při zrychleném a při zpomaleném pohybu.

e) Určete průměrnou rychlost pohybu kroupy.

Řešení:



Obr. 1.6: K řešení úlohy 1.10

a) Graf je na obr. 1.6.
b) Označme $t_1 = 3\,\mathrm{s}$, $t_2 = 5\,\mathrm{s}$, $t_3 = 2\,\mathrm{s}$, $v_1 = (v_0 + 3 \cdot 0{,}2)\,\mathrm{m/s} = 1{,}1\,\mathrm{m/s}$.
   Kroupa se při rovnoměrném pohybu pohybovala rychlostí 1,1 m/s.
c) $s_2 = v_1 \cdot t_2 = (1{,}1 \cdot 5)\,\mathrm{m} = 5{,}5\,\mathrm{m}$. Číselně je dráha rovna obsahu plochy pod grafem rychlosti v čase od 3. do 8. sekundy.
   Při rovnoměrném pohybu urazila dráhu 5,5 m.
d) Číselně je dráha s_1 při zrychleném pohybu rovna obsahu plochy trojúhelníka a obdélníka pod grafem rychlosti od 0. do 3. sekundy a při zpomaleném pohybu je dráha s_2 číselně rovna obsahu plochy pod grafem rychlosti od 8. do 10. sekundy.
   $s_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}5\right)\mathrm{m} = 2{,}4\,\mathrm{m}$, $s_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}1\right)\mathrm{m} = 1{,}1\,\mathrm{m}$.
   Při zrychleném pohybu urazila dráhu 2,4 m, při zpomaleném 1,1 m.
e) $v_\mathrm{p} = \dfrac{s_\mathrm{c}}{t_\mathrm{c}}$, kde s_c je celková dráha a t_c je celková doba pohybu.
   $s_\mathrm{c} = s_1 + s_2 + s_3 = 2{,}4\,\mathrm{m} + 5{,}5\,\mathrm{m} + 1{,}1\,\mathrm{m} = 9\,\mathrm{m}$,
   $t_\mathrm{c} = 10\,\mathrm{s}$, $v_\mathrm{p} = \dfrac{9}{10}\,\mathrm{m/s} = 0{,}9\,\mathrm{m/s}$.
   Průměrná rychlost kroupy byla 0,9 m/s.

Úloha 1.11

Krtek bydlel blízko rybníka. Hustota vody v rybníku je $\varrho_\mathrm{v} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Pro plavbu na rybníku používal krtek starou plastovou nádobu tvaru kvádru o vnějších rozměrech dna $a = 20\,\mathrm{cm}$, $b = 15\,\mathrm{cm}$, výšce $c = 18\,\mathrm{cm}$ a tloušťce stěn i dna $d = 5\,\mathrm{mm}$. Hustota plastu je $\varrho_p = 1200\,\mathrm{kg/m^3}$. Krtek měl hmotnost $m_\mathrm{k} = 0{,}8\,\mathrm{kg}$.

a) Vypočítejte hmotnost prázdné nádoby.
b) Vypočítejte hmotnost nákladu, který si s sebou může krtek vzít na plavbu, jestliže chce, aby se nádoba ponořila do poloviny výšky bočních stěn. Dno nádoby je při plavbě ve vodorovné poloze.

Řešení:

a) Objem dna vychází $V_\mathrm{D} = a \cdot b \cdot d = (0{,}2 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}005)\,\mathrm{m}^3 = 0{,}000\,15\,\mathrm{m}^3$.
Objem čelní stěny je $V_1 = a \cdot (c - d) \cdot d = (0{,}2 \cdot 0{,}175 \cdot 0{,}005)\,\mathrm{m}^3 = 0{,}000\,175\,\mathrm{m}^3$.
Objem boční stěny je $V_2 = (b - 2d) \cdot (c - d) \cdot d = (0{,}14 \cdot 0{,}175 \cdot 0{,}005)\,\mathrm{m}^3 = 0{,}000\,123\,\mathrm{m}^3$.
Objem materiálu kvádru je $V_\mathrm{p} = V_\mathrm{D} + 2V_1 + 2V_2 = 0{,}000\,746\,\mathrm{m}^3$.
Hmotnost prázdné nádoby bude $m_\mathrm{p} = V_\mathrm{p} \cdot \varrho_\mathrm{p} = (0{,}000\,746 \cdot 1200)\,\mathrm{kg} = 0{,}9\,\mathrm{kg}$.

b) Pro objem ponořené části hranolu při plavbě dostáváme

$$V = a \cdot b \cdot c/2 = (0{,}2 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}09)\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0027\,\mathrm{m}^3.$$

Vztlaková síla vychází

$$F_\mathrm{vz} = V \cdot \varrho_\mathrm{v} \cdot g = (0{,}0027 \cdot 1000 \cdot 10)\,\mathrm{m}^3 = 27\,\mathrm{N}.$$

Tíhová síla hranolu, krtka a nákladu pak bude rovna vztlakové síle $F_\mathrm{G} = F_\mathrm{vz}$. Dále postupně získáváme

$$F_\mathrm{G} = (m_\mathrm{p} + m_\mathrm{k} + m_\mathrm{n}) \cdot g = m \cdot g,$$

celková hmotnost $m = F_\mathrm{G}/g = 2{,}7\,\mathrm{kg}$ a hmotnost nákladu

$$m_\mathrm{n} = m - (m_\mathrm{p} + m_\mathrm{k}) = [2{,}7 - (0{,}9 + 0{,}8)]\ \mathrm{kg} = 1\,\mathrm{kg}.$$

Krtek si může na plavbu vzít náklad o hmotnosti 1 kg.

Úloha 1.12

V této úloze si pro vás krtek připravil fyzikální sudoku. Při řešení postupujte následovně. V prvním sloupci je pod sebou devět písmen, která jsou značkami určitých fyzikálních veličin. Nejprve zapište ke každé značce název odpovídající veličiny. První a poslední řádek už máte vyplněný. Nyní doplňte do prázdných políček v tabulce značky veličin tak, aby v každém řádku, v každém sloupci a v každém vyznačeném čtverci (3 × 3 políčka) byla právě jedna značka veličiny z nabídky v levém sloupci.

F síla
I ....
m ....
p ....
s ....
t ....
U ....
v ....
ϱ hustota

F	t	ϱ	v		p			s
m	v	s	F	U	ϱ	t		p
		p	s	m	t	F		ϱ
s	m	I	t	ϱ	v		F	U
U	ϱ		I		s		t	m
v	p		m	F	U	ϱ	s	I
ϱ		v	p	t	I	m		
p		m	U	v	F	s	ϱ	t
t		U	ϱ		m	I	p	v

Řešení:

F – síla
I – proud
m – hmotnost
p – tlak
s – dráha
t – čas nebo teplota
U – napětí
v – rychlost
ϱ – hustota

F	t	ϱ	v	I	p	U	m	s
m	v	s	F	U	ϱ	t	I	p
I	U	p	s	m	t	F	v	ϱ
s	m	I	t	ϱ	v	p	F	U
U	ϱ	F	I	p	s	v	t	m
v	p	t	m	F	U	ϱ	s	I
ϱ	s	v	p	t	I	m	U	F
p	I	m	U	v	F	s	ϱ	t
t	F	U	ϱ	s	m	I	p	v

1.4 Za fyzikou na ostrov

Úlohy okresního kola Archimediády v Přerově ve školním roce 2007/2008. Lev Alex, zebra Marty, žirafa Melman a hrošice Gloria jsou kamarádi, kteří většinu života strávili v ZOO. Nyní se dostali na ostrov do volné přírody, kde zažijí spoustu nečekaných situací.

Úloha 1.13

Zvířata cestovala na lodi ve dřevěných bednách. Při chybném manévru lodi spadly bedny do moře a začaly plavat. Bedna s hrošicí Glorií měla vnější rozměry dna $a = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $b = 1{,}5\,\mathrm{m}$ a výšku $h = 80\,\mathrm{cm}$. Prázdná bedna má hmotnost $m_\mathrm{B} = 150\,\mathrm{kg}$, samotná hrošice $m_\mathrm{H} = 1800\,\mathrm{kg}$. Hustota mořské vody je $\varrho = 1020\,\mathrm{kg/m^3}$. Bedna v moři plave tak, že dno je stále ve vodorovné poloze a na hladině nejsou žádné vlny.

a) Vypočítejte, jaká část hrany h vyčnívá nad hladinu, jestliže v bedně je jen hrošice.
b) Určete maximální hmotnost zásob, které si hrošice může vzít s sebou do bedny, aby se bedna nepotopila.

Řešení:

a) Určíme si hmotnost m bedny s hrošicí $m = m_\mathrm{B} + m_\mathrm{H} = (150 + 1800)\,\mathrm{kg} = 1950\,\mathrm{kg}$. Vypočítáme tíhovou sílu bedny s hrošicí $F_\mathrm{G} = m \cdot g = 19\,500\,\mathrm{N}$. Protože bedna plave a část jí vyčnívá nad hladinu je tíhová síly rovna vztlakové F_vz, která se vypočítá $F_\mathrm{vz} = V_1 \cdot \varrho \cdot g$, kde V_1 je objem ponořené části bedny.
Z rovnosti $F_\mathrm{vz} = F_\mathrm{G}$ vypočítáme objem ponořené části

$$V_1 = \frac{F_\mathrm{G}}{\varrho \cdot g} = \frac{19\,500}{1020 \cdot 10}\,\mathrm{m^3} = 1{,}91\,\mathrm{m^3}.$$

Vypočítáme plochu dna $S = a \cdot b = (2{,}5 \cdot 1{,}5)\,\mathrm{m}^2 = 3{,}75\,\mathrm{m}^2$. Ze vztahu $V_1 = S \cdot h_1$ vypočítáme h_1, což je hloubka, kam dosahuje dno bedny

$$h_1 = \frac{V_1}{S} = 0{,}51\,\mathrm{m}.$$

Pro hledanou výšku h_0, která je nad vodou, platí $h_0 = h - h_1 = 0{,}29\,\mathrm{m}$.

b) Bedna ještě plave, když je právě celá ponořená pod hladinu. Potom pro vztlakovou sílu platí $F_{\mathrm{vz2}} = V \cdot \varrho \cdot g$, kde V je objem celé bedny.

$$V = a \cdot b \cdot h = (2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}8)\mathrm{m}^3 = 3\,\mathrm{m}^3,$$
$$F_{\mathrm{vz2}} = V \cdot \varrho \cdot g = (3 \cdot 1020 \cdot 10)\mathrm{N} = 30\,600\,\mathrm{N}.$$

Pro tíhovou sílu platí $F_{\mathrm{G2}} = m_{\mathrm{c}} \cdot g$, kde m_{c} je hmotnost bedny s hrošicí a se zásobami. Z rovnosti $F_{\mathrm{vz2}} = F_{\mathrm{G2}}$ vypočítáme hmotnost m_{c}

$$m_{\mathrm{c}} = \frac{F_{\mathrm{G2}}}{g} = 3060\,\mathrm{kg}.$$

Pro hmotnost zásob m_{z} platí $m_{\mathrm{z}} = m_{\mathrm{c}} - m = (3060 - 1950)\,\mathrm{kg} = 1110\,\mathrm{kg}$.

Úloha 1.14

Po vylodění na ostrově se zvířata utábořila na pláži v místě A. Každý den musel někdo z nich jít pro pitnou vodu k prameni v místě B, které je od místa A ve vzdálenosti 30 km. Z místa A do místa B vede jen jediná cesta, která je rozdělena na tři nestejně dlouhé úseky. První úsek vede po pláži a jeho délka je rovna pětině délky celé cesty. Druhý úsek vede lesem a je nejdelší. Třetí úsek vede skalami a měří 10 km. Pohyb zvířat v jednotlivých úsecích považujte za rovnoměrně přímočarý.

První den šla pro vodu zebra Marty. Vyšla z místa A v 8 h ráno. První úsek urazila za 36 min, v druhém úseku se pohybovala rychlostí 40 km/h a poslední úsek urazila za 30 min.

Druhý den šla pro vodu žirafa Melman. Vyšla z místa A rovněž v 8 h ráno. V prvním úseku se pohybovala rychlostí 20 km/h, na překonání druhého úseku potřebovala 84 min a ve třetím úseku běžela rychlostí 40 km/h.

a) V kolik hodin a minut dorazila zebra a žirafa k místu B?
b) Jaké byly průměrné rychlosti zebry a žirafy na cestě z A do B?
c) Sestrojte grafy závislostí dráhy na čase zebry i žirafy do jednoho obrázku a z grafů určete, v jaké vzdálenosti x od bodu Aprocházela žirafa ve stejném čase jako zebra.

Řešení:

a) Vzdálenost bodu A od bodu B je $s = 30\,\mathrm{km}$. Délka prvního úseku $s_1 = \dfrac{s}{5} = 6\,\mathrm{km}$, délka třetího úseku je $s_3 = 10\,\mathrm{km}$, délka druhého úseku je $s_2 = s - (s_1 + s_3) =$

$= 14\,\mathrm{km}$. Určíme dobu, kterou zebra potřebuje k překonání jednotlivých úseků

$$t_1 = 36\,\mathrm{min} = 0{,}6\,\mathrm{h},$$
$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{14}{40}\mathrm{h} = 0{,}35\,\mathrm{h} = 21\,\mathrm{min},$$
$$t_3 = 30\,\mathrm{min} = 0{,}5\,\mathrm{h}.$$

Celková doba pohybu zebry je

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 1{,}45\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\ 27\,\mathrm{min}.$$

Tuto dobu přičteme k 8 h a vypočteme, že k prameni dorazila zebra v 9 h 27 min. Určíme dobu, kterou žirafa potřebuje k překonání jednotlivých úseků

$$t'_1 = \frac{s_1}{v'_1} = \frac{6}{20}\,\mathrm{h} = 0{,}3\,\mathrm{h},$$
$$t'_2 = 84\,\mathrm{min} = 1{,}4\,\mathrm{h},$$
$$t'_3 = \frac{s_3}{v'_3} = \frac{10}{40}\,\mathrm{h} = 0{,}25\,\mathrm{h}.$$

Celková doba pohybu žirafy je

$$t' = t'_1 + t'_2 + t'_3 = 1{,}95\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\ 57\,\mathrm{min}.$$

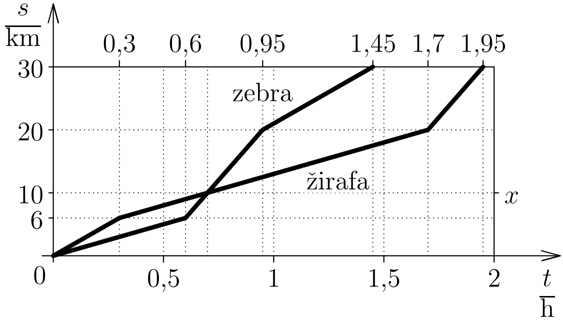
Tuto dobu přičteme k 8 h a vypočteme, že k prameni žirafa dorazila v 9 h 57 min.

b) Průměrné rychlosti určíme jako podíl celkové dráhy a celkové doby:

zebra: $v_\mathrm{p} = \dfrac{s}{t} = \dfrac{30}{1{,}45}\,\mathrm{km/h} = 20{,}7\,\mathrm{km/h}$,

žirafa: $v'_\mathrm{p} = \dfrac{s}{t'} = \dfrac{30}{1{,}95}\,\mathrm{km/h} = 15{,}4\,\mathrm{km/h}$.

Průměrná rychlost zebry byla 20,7 km/h, průměrná rychlost žirafy 15,4 km/h.

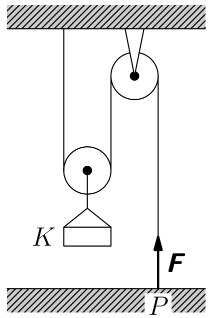


Obr. 1.7: K řešení úlohy 1.14

c) Z grafu na obr. 1.7 zjistíme, že $x = 10\,\mathrm{km}$.
Žirafa procházela ve stejném čase jako zebra ve vzdálenosti 10 km od bodu A.

Úloha 1.15

Lev Alex kromě vody potřebuje k životu i maso. Na ostrově si sehnal sušené ryby, které zavěsil v košíku K na větev stromu pomocí pevné a volné kladky tak, jak je vidět na obr. 1.8. Změřil, že lano působí na Zemi v místě P silou $F = 40\,\mathrm{N}$. Hmotnost prázdného košíku je $m_\mathrm{k} = 2\,\mathrm{kg}$, hmotnosti kladek a lana neuvažujte. Před večeří lev všechny ryby z košíku vybral a naskládal je těsně vedle sebe v několika řadách na obdélníkový plech o rozměrech $a = 18\,\mathrm{cm}$ a $b = 24\,\mathrm{cm}$. Hmotnost prázdného plechu je $m_\mathrm{p} = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Určete, jakým tlakem působí plech s rybami na podložku.



Obr. 1.8: K zadání úlohy 1.15

Řešení:

Z rovnováhy na volné kladce plyne pro tíhovou sílu košíku s rybami $F_\mathrm{G} = 2F = 80\,\mathrm{N}$. Hmotnost m košíku s rybami určíme ze vztahu

$$m = \frac{F_\mathrm{G}}{g} = \frac{80}{10}\mathrm{kg} = 8\,\mathrm{kg};$$

hmotnost samotných ryb $m_\mathrm{R} = m - m_\mathrm{k} = 6\,\mathrm{kg}$, hmotnost ryb na plechu $m_\mathrm{c} = m_\mathrm{R} + m_\mathrm{p} = (6 + 0{,}5)\mathrm{kg} = 6{,}5\,\mathrm{kg}$. Určíme plochu plechu

$$S = a \cdot b = (18 \cdot 24)\mathrm{cm}^2 = 432\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}0432\,\mathrm{m}^2.$$

Tíhová síla ryb a plechu je $F_\mathrm{GC} = m_\mathrm{c} \cdot g = 65\,\mathrm{N}$. Tlak plechu s rybami na podložku je

$$p = \frac{F_\mathrm{GC}}{S} = \frac{65}{0{,}0432}\mathrm{Pa} = 1505\,\mathrm{Pa}.$$

Plech s rybami působí na podložku tlakem 1505 Pa.

Úloha 1.16

a) V této úloze vám nabízíme několik slov. Tato slova nalezněte a vyškrtejte v připravené tabulce. Slova v tabulce hledejte v řádcích (zleva doprava) a ve sloupcích (shora dolů). Pozor! Některá slova se mohou překrývat, to znamená, že mají společná některá písmena. Písmeno CH je v jednom políčku. Nepřeškrtnutá písmena tvoří tajenku. Vypište je postupně tak, že půjdete z levého horního rohu směrem doprava a pak na další řádek,...
b) Z nabízených slov vypište ta, která jsou jmény fyziků nebo jiných vědců a pokud jsou po nich pojmenované fyzikální jednotky, zapište, ke které veličině patří.

Nabízená slova:
Ampér, Archimédes, Cvoček, Dolar, Chobot, Kapr, Kluk, Kladka, Koberec, Komora, Labe, Lék, Libela, Lom, Loutna, Mačeta, Míč, Nebe, Newton, Pascal, Páv, Perla, Rámeček, Stan, Tlapa, Volt.

K	L	U	K	K	T	L	A	P	A
L	É	K	L	O	U	T	N	A	M
A	R	CH	I	M	É	D	E	S	P
D	A	O	B	O	P	D	W	C	Á
K	O	B	E	R	E	C	T	A	V
A	D	O	L	A	R	V	O	L	T
M	S	T	A	N	L	O	N	A	K
P	G	L	A	M	A	Č	E	T	A
É	S	O	K	Í	B	E	B	A	P
R	Á	M	E	Č	E	K	E	R	R

Tajenka:

. . . .

Řešení:

Tajenka: MADAGASKAR
Jména vědců a fyziků:
Ampér – jednotka proudu
Archimédes – žádná jednotka
Newton – jednotka síly
Pascal – jednotka tlaku
Volt – jednotka napětí

1.5 Fyzika u Spejbla a Hurvínka

Úlohy okresního kola Archimediády v Přerově ve školním roce 2008/2009.

Úloha 1.17

Hurvínek s Máničkou a Žerykem šli na výlet na hrad. Vyšli společně v 8 hodin ráno z domu. První pětinu cesty ušli Hurvínek a Mánička za 36 min. Další dvě pětiny cesty se pohybovali průměrnou rychlostí 3 km/h. Pak se na 24 min zastavili, aby si odpočinuli. Poslední úsek cesty o délce 4,8 km ušli za 1,8 h. Vypočítejte:

a) Jak dlouhá byla cesta z domu na hrad?
b) V kolik hodin a minut došli na hrad?
c) Jaká byla průměrná rychlost Hurvínka a Máničky při cestě z domu na hrad?
d) Jakou vzdálenost celkem naběhal Žeryk, který se cestou honil za zajíci a pohyboval se průměrnou rychlostí 4 km/h? Neodpočíval a na hrad dorazil současně s Hurvínkem a Máničkou.

Řešení:

a) První a druhý úsek dohromady tvoří 3/5 cesty. Poslední úsek, který je dlouhý 4,8 km, odpovídá 2/5 cesty. Celá cesta je dlouhá $s = (2{,}4 + 4{,}8 + 4{,}8)\,\mathrm{km} = 12\,\mathrm{km}$

nebo $s = (5 \cdot 4{,}8/2)\mathrm{km} = 12\,\mathrm{km}$.
Cesta z domu na hrad byla dlouhá 12 km.

b) Určíme čas t_2, který potřebovali na ujití 2. úseku

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4{,}8}{3}\mathrm{h} = 1{,}6\,\mathrm{h}.$$

Celková doba pohybu a odpočinku v hodinách $t_\mathrm{c} = (0{,}6+1{,}6+0{,}4+1{,}8)\mathrm{h} = 4{,}4\,\mathrm{h}$.
Na hrad došli v čase $t_\mathrm{D} = (8 + 4{,}4)\mathrm{h} = 12{,}4\,\mathrm{h} = 12\,\mathrm{h}\ 24\,\mathrm{min}$.

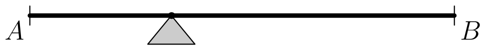
c) Průměrná rychlost Hurvínka a Māničky

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t_\mathrm{c}} = \frac{12}{4{,}4}\mathrm{km/h} \doteq 2{,}72\,\mathrm{km/h}.$$

d) Dráha Žeryka $s_\mathrm{Z} = v \cdot t_\mathrm{c} = (4 \cdot 4{,}4)\mathrm{km} = 17{,}6\,\mathrm{km}$.
Žeryk naběhal vzdálenost 17,6 km.

Úloha 1.18

Cestou na hrad nasbírali Hurvínek s Máničkou houby. Po návratu domů chtěli určit jejich hmotnost. K měření použili stejnorodou tyč o délce 90 cm a o hmotnosti 0,6 kg, která byla podepřená v jedné třetině od okraje A (viz obr. 1.9). Když do bodu A zavěsili prázdný košík, byla tyč v rovnováze. Když do košíku zavěšeného v bodě A nasypali všechny nasbírané houby, museli do bodu B tyče zavěsit závaží o hmotnosti 0,75 kg, aby byla tyč opět v rovnováze. Určete hmotnost hub bez košíku.



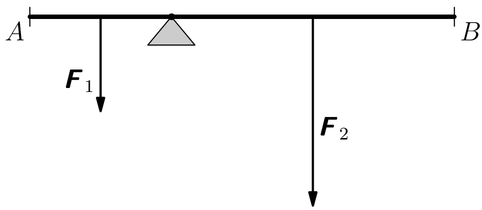
Obr. 1.9: K zadání úlohy 1.18

Řešení:

Jedná se o nerovnoramennou páku, u níž nelze zanedbat hmotnost. Protože tyč je stejnorodá, má kratší část hmotnost rovnou 1/3 hmotnosti celé tyče, tj. $m_1 = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ a delší část má hmotnost $m_2 = 0{,}4\,\mathrm{kg}$. Na každou část tyče od podpěry k okraji působí jiná gravitační síla, jejíž působiště je v těžišti této části (viz obr. 1.10). Délka kratší části tyče je $r_\mathrm{A} = 0{,}3\,\mathrm{m}$, délka delší části tyče je $r_\mathrm{B} = 0{,}6\,\mathrm{m}$.

Tíhové síly obou částí tyče $F_1 = m_1 \cdot g = 2\,\mathrm{N}$, $F_2 = m_2 \cdot g = 4\,\mathrm{N}$. Určíme odpovídající momenty

$$M_1 = F_1 \cdot r_1 = (2 \cdot 0{,}15)\,\mathrm{N{\cdot}m} = 0{,}3\,\mathrm{N{\cdot}m},$$
$$M_2 = F_2 \cdot r_2 = (4 \cdot 0{,}3)\,\mathrm{N{\cdot}m} = 1{,}2\,\mathrm{N{\cdot}m}.$$



Obr. 1.10: K řešení úlohy 1.18

Po zavěšení prázdného košíku bude v bodě A působit síla F_A, která způsobí moment M_A. Aby nastala rovnováha, musí platit $M_\mathrm{A} + M_1 = M_2$. Vypočítáme $M_\mathrm{A} = M_2 - M_1 = 0{,}9\,\mathrm{N{\cdot}m}$. Určíme sílu $F_\mathrm{A} = M_\mathrm{A}/r_\mathrm{A} = (0{,}9/0{,}3)\,\mathrm{N} = 3\,\mathrm{N}$. Hmotnost

prázdného košíku $m_0 = F_A/g = 0{,}3\,\mathrm{kg}$. Po naplnění košíku bude v bodě A působit síla F_K, která způsobí moment M_K. Po zavěšení závaží 0,75 kg do bodu B zde bude působit síla $F_B = 7{,}5\,\mathrm{N}$, která vyvolá moment $M_B = F_B \cdot r_B = (7{,}5 \cdot 0{,}6)\mathrm{N{\cdot}m} = 4{,}5\,\mathrm{N{\cdot}m}$. Aby nastala rovnováha, musí platit $M_K + M_1 = M_2 + M_B$. Vypočítáme $M_K = M_2 + M_B - M_1 = (1{,}2 + 4{,}5 - 0{,}3)\,\mathrm{N{\cdot}m} = 5{,}4\,\mathrm{N{\cdot}m}$. Určíme sílu $F_K = M_K/r_A = (5{,}4/0{,}3)\,\mathrm{N} = 18\,\mathrm{N}$. Hmotnost prázdného košíku $m_K = F_K/g = 1{,}8\,\mathrm{kg}$.
Hmotnost hub vychází $m = m_K - m_0 = (1{,}8 - 0{,}3)\,\mathrm{kg} = 1{,}5\,\mathrm{kg}$.

Úloha 1.19

Hurvínek s Máničkou měli dvě stejné nádoby tvaru kvádru o vnitřních rozměrech dna 15 cm × 20 cm. Hurvínek měl v nádobě kapalinu o hustotě 800 kg/m^3, která dosahovala do výšky 25 cm. Mánička měla v nádobě jinou kapalinu o hustotě 1200 kg/m^3, jejíž hladina dosahovala do výšky h. Obě kapaliny měly stejnou hmotnost. Určete:

a) Výšku h, do které dosahovala kapalina v nádobě Máničky.
b) Jaký tlak má každá kapalina u dna nádoby?

Řešení:

a) *1. způsob:* Objem kapaliny v Hurvínkově nádobě $V_1 = (0{,}15 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25)\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0075\,\mathrm{m}^3$. Hmotnost této kapaliny $m = V_1 \cdot \varrho_1 = 0{,}0075\,\mathrm{m}^3 \cdot 800\,\mathrm{kg/m}^3 = 6\,\mathrm{kg}$. Hmotnost kapaliny v nádobě Máničky je stejná. Vypočítáme objem kapaliny v nádobě Máničky $V_2 = m/\varrho_2 = (6/1200)\,\mathrm{kg/m}^3 = 0{,}005\,\mathrm{m}^3 = 5000\,\mathrm{cm}^3$. Výška hladiny

$$h = \frac{V_2}{a \cdot b} = \frac{5000}{15 \cdot 20}\mathrm{cm} \doteq 16{,}7\,\mathrm{cm}.$$

2. způsob: Protože kapaliny jsou ve stejných nádobách tvaru kvádru a mají stejnou hmotnost, musí na dno působit stejnou tlakovou silou, což při stejném plošném obsahu dna znamená, že na dnou působí v obou nádobách i stejný tlak. Protože kapaliny mají různé hustoty, platí

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{800}{1200} = 0{,}67.$$

Vypočítáme $h = 0{,}67 \cdot h_1 = 16{,}7\,\mathrm{cm}$.
V nádobě Máničky dosahovala kapalina do výšky 16,7 cm.

b) $p_1 = h_1 \cdot \varrho_1 \cdot g = 2000\,\mathrm{Pa}$; $p_2 = h \cdot \varrho \cdot g \doteq 2000\,\mathrm{Pa}$.
V první nádobě měla kapalina u dna tlak 2000 Pa, ve druhé 2000 Pa.

Úloha 1.20

Spejbl se dozvěděl, že rok 2009 je rokem .... (viz tajenka). Připravil proto pro Hurvínka a Máničku hádanku, aby si tajenku sami vyluštili. Můžete to zkusit také. Tajenku objevíte tak, že v připravené tabulce vyhledáte a přeškrtnete slova uvedená vedle tabulky. Slova hledejte v řádcích zleva doprava a ve sloupcích shora dolů. Některá písmena mohou být součástí dvou slov. Nepřeškrtnutá písmena tvoří tajenku. Vypište je tak, že začnete v prvním řádku vlevo a postupujete na konec řádku, pak pokračujete stejně v následujícím řádku. Za každá 3 správně nalezená slova máte jeden bod. Další 2 body získáte za tajenku a další 2 body, když Máničce a Hurvínkovi vysvětlíte, co slovo z tajenky znamená.

CÍL, CÍN, DRÁHA, GRAM, GRAVITACE, HŮL, LAVICE, LIBELA, METRO, MÍLE, NÁHON, OKAP, OLOVNICE, SÍLA, SÍTO, TELEVIZOR, ZLATO, ZVON

Tajenka: ....

Co znamená slovo z tajenky?

A	G	R	A	M	E	T	R	O
D	R	Á	H	A	S	C	Í	L
T	A	N	Á	H	O	N	R	O
Z	V	O	N	Ů	K	O	S	V
L	I	B	E	L	A	C	Í	N
A	T	N	M	O	P	M	T	I
T	A	S	Í	L	A	I	O	C
O	C	E	L	A	V	I	C	E
T	E	L	E	V	I	Z	O	R

Řešení:

Tajenka: ASTRONOMIE

Astronomie je nauka o vesmíru, zabývá se zkoumáním pohybu vesmírných objektů a příčinami těchto pohybů.

1.6 Fyzika u Pata a Mata

Úlohy okresního kola Archimediády v Přerově ve školním roce 2009/2010.

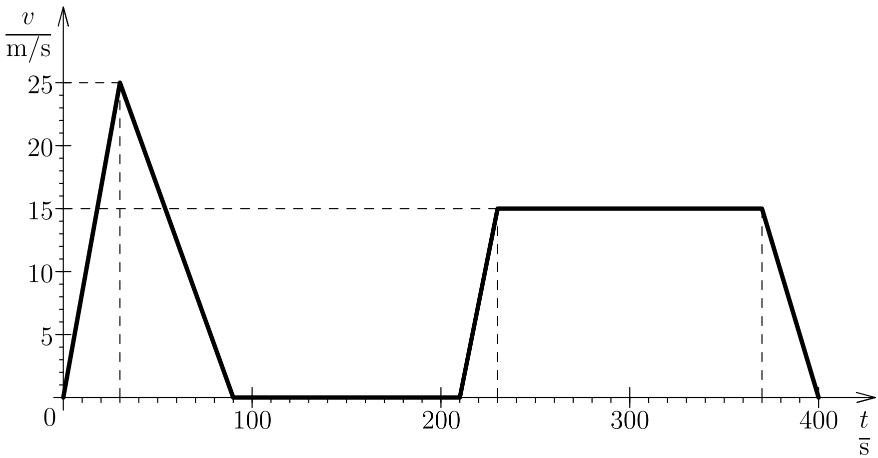
Úloha 1.21

Pat a Mat si sestrojili automobil na sluneční pohon a chtěli ho vyzkoušet. Nejprve vyjel Pat sám z bodu O zrychleným pohybem tak, že za 30 s dosáhl rychlosti 90 km/h. V tomto okamžiku začal brzdit a zastavil za 60 s. Stál a čekal na Mata 2 min. Potom vyjeli oba společně zrychleným pohybem tak, že za 20 s dosáhli rychlosti 54 km/h. Touto rychlostí se pohybovali rovnoměrně přímočaře a urazili dráhu 2,1 km. Potom začali opět brzdit a zastavili za 30 s v bodě X.

a) Narýsujte graf závislosti rychlosti automobilu na čase při jízdě z bodu O do bodu X.
b) Z grafu určete celkovou dráhu, kterou automobil urazil z bodu O do bodu X a vypočítejte jeho průměrnou rychlost.
c) Vypočítejte, jakou průměrnou rychlostí se Pat a Mat pohybovali při společné jízdě.
d) Jak dlouho by jeli společně, kdyby se pohybovali průměrnou rychlostí o 8 % větší, než jakou jste spočítali v bodě c)?

Řešení:

a) K sestrojení grafu závislosti rychlosti automobilu na čase (viz obr. 1.11) nejprve vypočítáme dobu, při níž se automobil pohyboval rovnoměrně $t_5 = \frac{s_5}{v_5} = 140\,\mathrm{s}$.



Obr. 1.11: K řešení úlohy 1.21

b) Dráha automobilu je číselně rovna obsahu plochy pod grafem. Celkovou dráhu určíme jako součet drah automobilu v jednotlivých úsecích.
$s_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 30\right)\,\mathrm{m} = 375\,\mathrm{m}$, $s_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 60\right)\,\mathrm{m} = 750\,\mathrm{m}$, $s_3 = 0\,\mathrm{m}$,
$s_4 = \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20\right)\,\mathrm{m} = 150\,\mathrm{m}$, $s_5 = 2100\,\mathrm{m}$, $s_6 = \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 30\right)\,\mathrm{m} = 225\,\mathrm{m}$.

$$s_\mathrm{c} = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = 3600\,\mathrm{m},$$
$$t_\mathrm{c} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 400\,\mathrm{s},$$
$$v_\mathrm{p} = \frac{s_\mathrm{c}}{t_\mathrm{c}} = \frac{3600}{400}\,\mathrm{m/s} = 9\,\mathrm{m/s}.$$

Automobil urazil dráhu 3600 m průměrnou rychlostí 9 m/s.

c) $t'_\mathrm{c} = 190\,\mathrm{s}$, $s'_\mathrm{c} = s_4 + s_5 + s_6 = 2475\,\mathrm{m}$,

$$v'_\mathrm{p} = \frac{2475}{190}\,\mathrm{m/s} = 13\,\mathrm{m/s}.$$

Při společné jízdě se pohybovali průměrnou rychlostí 13 m/s.

d) 100 % .... 13 m/s
108 % .... v''_p

$$v''_\mathrm{p} = 14\,\mathrm{m/s}, \quad t''_\mathrm{c} = \frac{2475}{14}\,\mathrm{s} = 177\,\mathrm{s}.$$

Pat a Mat by jeli společně 177 s.

Úloha 1.22

Pat a Mat uklízeli v kůlně a našli tam 5 hranolů z různých materiálů – železný, hliníkový, měděný, dřevěný a olověný. Všechny hranoly měly stejnou výšku $h = 20\,\mathrm{cm}$ a stejnou hmotnost $m = 9{,}36\,\mathrm{kg}$. Hustota železa je $7{,}8\,\mathrm{g/cm^3}$, hliníku $2{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$, mědi $8{,}9\,\mathrm{g/cm^3}$, dřeva $0{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$ a olova $11{,}3\,\mathrm{g/cm^3}$. Při všech následujících úlohách stojí hranoly na podlaze nebo na sobě na podstavě a výška je k ní kolmá.

a) Vypočítejte, jakým tlakem působil každý z hranolů na podlahu.

b) Pat a Mat postavili všechny hranoly na sebe tak, aby vzniklý sloup byl co nejstabilnější. Jakým tlakem působí sloup na podlahu? V jakém pořadí (od spodu nahoru) jsou hranoly na sobě naskládány?

c) Pat a Mat rozebrali sloup a rozdělili si hranoly. Pat si vybral dva hranoly tak, že když je postavil na sebe, tak působily na podlahu přibližně stejným tlakem jako zbylé tři hranoly, které na sebe postavil Mat. Určete, který hranol použil jako spodní Pat a který Mat. Ověřte výpočtem!

Řešení:

a) Protože všechny hranoly mají stejnou hmotnost a různou hustotu ϱ, liší se objemem $V = m/\varrho$. Protože mají stejnou výšku, musí se lišit obsahem podstavy $S = V/h$. Tlak na podlahu vypočteme $p = m \cdot g/S$.

Železný:
$V = \dfrac{9{,}36}{7800}\,\mathrm{m^3} = 0{,}0012\,\mathrm{m^3}$, $S = \dfrac{0{,}0012}{0{,}2}\,\mathrm{m^3} = 0{,}006\,\mathrm{m^2}$, $p = \dfrac{93{,}6}{0{,}006}\,\mathrm{Pa} = 15\,600\,\mathrm{Pa}$.

Hliníkový:
$V = \dfrac{9{,}36}{2700}\,\mathrm{m^3} = 0{,}0035\,\mathrm{m^3}$, $S = \dfrac{0{,}0035}{0{,}2}\,\mathrm{m^3} = 0{,}017\,\mathrm{m^2}$, $p = \dfrac{93{,}6}{0{,}017}\,\mathrm{Pa} = 5506\,\mathrm{Pa}$.

Měděný:
$V = \dfrac{9{,}36}{8900}\,\mathrm{m^3} = 0{,}0011\,\mathrm{m^3}$, $S = \dfrac{0{,}0011}{0{,}2}\,\mathrm{m^3} = 0{,}005\,\mathrm{m^2}$, $p = \dfrac{93{,}6}{0{,}005}\,\mathrm{Pa} = 18\,720\,\mathrm{Pa}$.

Dřevěný:
$V = \dfrac{9{,}36}{700}\,\mathrm{m^3} = 0{,}013\,\mathrm{m^3}$, $S = \dfrac{0{,}013}{0{,}2}\,\mathrm{m^3} = 0{,}067\,\mathrm{m^2}$, $p = \dfrac{93{,}6}{0{,}067}\,\mathrm{Pa} = 1400\,\mathrm{Pa}$.

Olověný:
$V = \dfrac{9{,}36}{11300}\,\mathrm{m^3} = 0{,}0008\,\mathrm{m^3}$, $S = \dfrac{0{,}0008}{0{,}2}\,\mathrm{m^3} = 0{,}004\,\mathrm{m^2}$, $p = \dfrac{93{,}6}{0{,}004}\,\mathrm{Pa} = 23\,400\,\mathrm{Pa}$.

Železný hranol působil tlakem $15\,600\,\mathrm{Pa}$, hliníkový $5506\,\mathrm{Pa}$, měděný $18\,720\,\mathrm{Pa}$, dřevěný $1400\,\mathrm{Pa}$ a olověný $23\,400\,\mathrm{Pa}$.

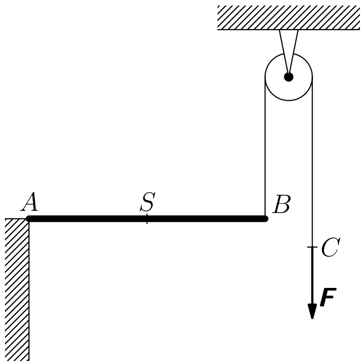
b) Aby byl sloup co nejstabilnější, musí se podstavy hranolů odspodu nahoru zužovat. Pořadí hranolů proto bylo: dřevěný, hliníkový, železný, měděný a olověný.

$$p = \frac{5 \cdot 9{,}36 \cdot 10}{0{,}069}\,\mathrm{Pa} = (5 \cdot 1357)\,\mathrm{Pa} = 6783\,\mathrm{Pa}.$$

Sloup bude působit na podlahu tlakem 6783 Pa.

c) Pat použil jako spodní olověný a Mat použil jako spodní železný hranol. Ověříme

$$\text{Pat: } p = \frac{2 \cdot 9{,}36 \cdot 10}{0{,}004}\,\text{Pa} = 46\,800\,\text{Pa},$$
$$\text{Mat: } p = \frac{3 \cdot 9{,}36 \cdot 10}{0{,}006}\,\text{Pa} = 46\,800\,\text{Pa}.$$



Obr. 1.12: K zadání úlohy 1.23

Úloha 1.23

Pat a Mat chtěli zjistit, kolik každý z nich váží, a proto si vyrobili zajímavou váhu. Trámek o délce 5 m a hmotnosti $m_1 = 15\,\text{kg}$ opřeli v bodě A o kamennou zítku. V bodě B upevnili lano, které vedli přes pevnou kladku (viz obr. 1.12). Do bodu S ve středu trámku zavěsili sedačku o hmotnosti $m_2 = 5\,\text{kg}$ a na ni se posadil Pat. Mat táhl za konec lana v bodě C směrem dolů tak, aby trámek s Patem byl vodorovný.

a) Určete hmotnost Pata, jestliže víte, že Mat působil na lano silou $F = 400\,\text{N}$.

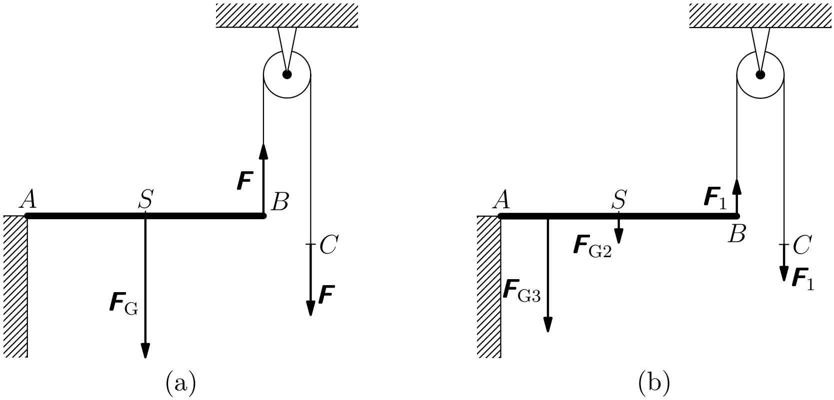
b) Jakou silou by musel působit Mat na lano, kdyby se Pat posunul i se sedačkou do bodu D, který je ve vzdálenosti 1 m od bodu A?

Řešení:

a) Označme $|AB| = a_1 = 5\,\text{m}$, $|AS| = a_2 = 2{,}5\,\text{m}$ (viz obr. 1.13a), $m_1 = 15\,\text{kg}$, $m_2 = 5\,\text{kg}$, m_p hmotnost Pata.

Platí rovnováha momentů sil $M_1 = M_2$

$$M_1 = F \cdot a_1 = (400 \cdot 5)\,\text{N·m} = 2000\,\text{N·m},$$
$$M_2 = G \cdot a_2 \implies G = \frac{M_2}{a_2} = \frac{2000}{2{,}5}\,\text{N} = 800\,\text{N}.$$



Obr. 1.13: K řešení úlohy 1.23

Je-li tíhová síla trámku a sedačky a Pata $F_G = m_c \cdot g$, potom

$$m_c = \frac{F_G}{g} = \frac{800}{10}\,\mathrm{kg} = 80\,\mathrm{kg},$$

$$m_p = m_c - m_1 - m_2 = (80 - 15 - 5)\,\mathrm{kg} = 60\,\mathrm{kg}.$$

Pat má hmotnost 60 kg.

b) Označme $|AB| = a_1 = 5\,\mathrm{m}$, $|AS| = a_2 = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $AD = a_3 = 1\,\mathrm{m}$ (viz obr. 1.13b), $m_1 = 15\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$, $m_p = 60\,\mathrm{kg}$.
Dále je tíhová síla trámku $F_{G2} = m_1 \cdot g = 150\,\mathrm{N}$, tíhová síla sedačky a Pata $F_{G3} = (m_2 + m_p) \cdot g = 650\,\mathrm{N}$. Platí $M_1 = M_2 + M_3$ a také

$$M_2 = F_{G2} \cdot a_2 = (150 \cdot 2{,}5)\,\mathrm{N{\cdot}m} = 375\,\mathrm{N{\cdot}m},$$

$$M_3 = F_{G3} \cdot a_3 = (650 \cdot 1)\,\mathrm{N{\cdot}m} = 650\,\mathrm{N{\cdot}m},$$

$$M_1 = (375 + 650)\,\mathrm{N{\cdot}m} = 1025\,\mathrm{N{\cdot}m},$$

$$M_1 = F_1 \cdot a_1, \implies F_1 = \frac{M_1}{a_1} = \frac{1025}{5}\,\mathrm{N} = 205\,\mathrm{N}.$$

Mat musí působit silou 205 N.

Úloha 1.24

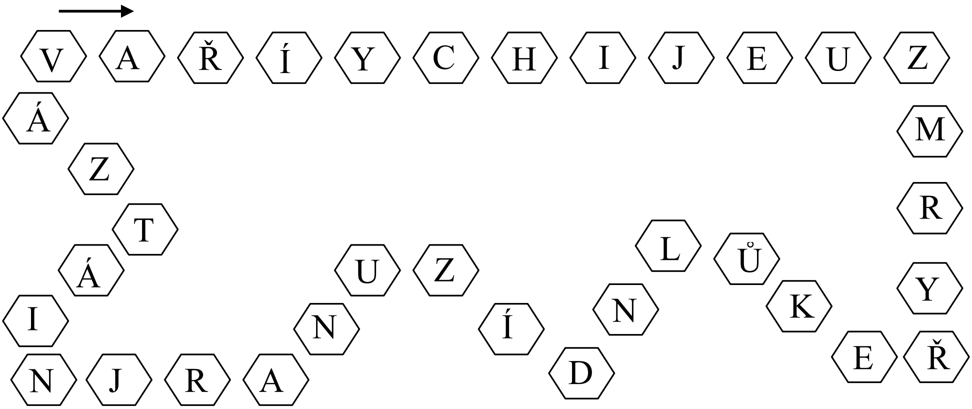
Poslední úkol vám Pat a Mat zašifrovali. Tajenku vyluštíte tak, že začnete od písmene V v levém horním rohu obrazce vytvořeného z šestiúhelníků a budete postupovat ve směru šipky. Vždy každé čtvrté písmeno zapíšete do tajenky a přeškrtnete, abyste ho v dalším okruhu přeskočili a nepočítali. Písmena vybírejte tak dlouho, dokud máte ještě nějaká neškrtnutá písmena. Prvním písmenem tajenky je písmeno V.

Až vyluštíte tajenku, tak splňte, co vám ukládá. Potom napište celé jméno a národnost fyzika, který popsal princip, na kterém pracují objekty z tajenky.

Tajenka: ....

Řešení tajenky: ....

Jméno a národnost fyzika: ....



Řešení:

Tajenka: VYJMENUJ TŘI RŮZNÁ HYDRAULICKÁ ZAŘÍZENÍ
Řešení tajenky: Hydraulický lis, hydraulický zvedák, hydraulické brzdy, ...
Jméno a národnost fyzika: Blaise Pascal, Francouz

Kapitola 2

Mechanika

2.1 Základy kinematiky a dynamiky

Úloha 2.1[1]

V půvabné knížce Ondřeje Sekory *Ferda cvičí mraveniště* se dočteme o celé řadě sportovních disciplín, které se náš neúnavný hrdina snažil naučit své mravenčí kamarády. Jednoho dne mravenečci trénovali sbíhání dolů z mraveniště a Ferda je pozoroval z vrcholu. Zjistil, že rychlost každého člena jeho sportovního družstva je nepřímo úměrná vzdálenosti od středu mraveniště. Ve vzdálenosti $l_1 = 1\,\mathrm{m}$ od středu změřil brouk Pytlík rychlost mravenců $v_1 = 2\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. Za jak dlouho doběhne mravenec nejkratší cestou ke slečně Píďalce, která odpočívá v bodě B nacházejícím se ve vzdálenosti $l_2 = 2\,\mathrm{m}$ od středu mraveniště?

Řešení:

Podle zadání závisí rychlost mravenců na vzdálenosti r od středu mraveniště

$$v = \frac{k}{r};$$

je zřejmé, že tímto vztahem nelze popsat rychlost mravenců ve středu mraveniště. Snadno určíme i hodnotu konstanty $k = 0{,}02$. Krátký úsek v radiálním směru Δr mezi body ve vzdálenostech r a $r + \Delta r$ urazí mravenec za dobu

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{v} = \frac{r\Delta r}{k}$$

nebo v diferenciálním tvaru

$$\mathrm{d}t = \frac{r\,\mathrm{d}r}{k}.$$

Pro hledaný čas potřebný k překonání vzdálenosti mezi stanovišti brouka Pytlíka a slečny Píďalky vychází

$$T = \int\limits_{l_1}^{l_2} \frac{r\,\mathrm{d}r}{k} = \frac{1}{2k}\left(l_2^2 - l_1^2\right) = 75\,\mathrm{s}.$$

Úloha 2.2

Student 1. ročníku gymnázia v Kotěhůlkách, mladý nadějný fyzik Jirka, měl minulou středu smolný den. Předcházející večer se začetl do nové knížky o vývoji vesmíru,

[1] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

kterou dostal k narozeninám, a usnul až hodně dlouho po půlnoci. Přitom si zapomněl natočit budík a ráno sotva vstal, musel bez snídaně rychle utíkat na vlak. Když doběhl na nádraží, vlak se už rozjížděl a zlomyslný výpravčí Troubalík Jirkovi nedovolil nastoupit. Co tedy Jirkovi zbývalo? Alespoň chtěl zjistit, o kolik se opozdil. Pomocí svých hodinek se stopkami zjistil, že předposlední vagón kolem něho projel během 10 s a poslední během 8 s; vlak se rozjížděl rovnoměrně zrychleně. Po přejezdu posledního vagónu ukazovaly hodinky přesně minutu po odjezdu vlaku podle jízdního řádu. O kolik sekund měl Jirka doběhnout dříve? Odjížděl vlak načas?

Řešení:

Jde o pohyb rovnoměrně zrychlený a víme, že všechny vagóny mají stejnou délku l. Při pohybu s konstantním zrychlením vlak za čas Δt změní rychlost z počáteční rychlosti v_0 na $v_0 + a\Delta t$ a urazí dráhu

$$s = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{v_0 + (v_0 + a\Delta t)}{2}\,\Delta t = \frac{v_{\text{počáteční}} + v_{\text{konečná}}}{2}\,\Delta t.$$

Použijme odvozené vztahy na časové intervaly t_1 a t_2 kdy Jirku míjel předposlední a poslední vagón. Označíme-li l délku každého z vagónů, pak pro předposlední vagón platí

$$l = \frac{at + a(t + t_1)}{2}\,t_1,$$

pro poslední

$$l = \frac{a(t + t_1) + a(t + t_1 + t_2)}{2}\,t_2,$$

kde t je čas, který uplynul od okamžiku, kdy se vlak začal rozjíždět do doby, kdy Jirku začal míjet předposlední vagón. Dostáváme tedy

$$t = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 31\,\mathrm{s}.$$

O tolik sekund měl Jirka doběhnout dříve, aby vlak stihl – snad se mu to příště podaří. Vlak sice vyjížděl se zpožděním $(60 - 31 - 10 - 8) = 11\,\mathrm{s}$, ale Jirka se možná příliš spoléhal, že zpoždění bude jako obvykle mnohem větší.

Úloha 2.3[2]

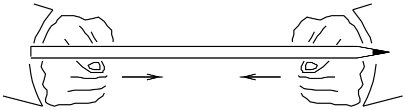
Vezměte dlouhou tužku a položte ji na vodorovně natažené ukazováčky obou rukou (obr. 2.1). Přibližujte ukazováčky k sobě tak, aby tužka zůstávala stále ve vodorovné poloze. Tužka bude klouzat nejprve po jednom ukazováčku, potom po druhém a tak střídavě dále. Použijete-li namísto tužky dlouhou, rovnou tyč, bude se vše opakovat mnohokrát po sobě. Vysvětlete tento jev.

Řešení:

Součinitel klidového tření f_0 je větší než součinitel tření za pohybu f, tj. platí

$$\frac{f}{f_0} < 1.$$

[2] Zpracováno podle časopisu *Kvant.*



Obr. 2.1: K zadání úlohy 2.3

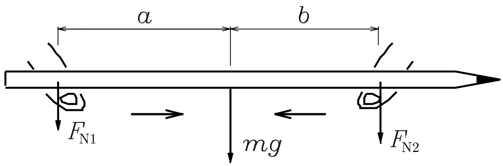
Síla tření F_t je úměrná tlakové síle F_N, kterou působí pravítko na prst a tím i reakci, jíž působí prst na pravítko. Je zřejmé, že málokdy položíme pravítko na natažené prsty tak, aby na každý z nich působila stejná tlaková síla F_N. Na prst, jenž je dále od těžiště pravítka působí menší tlaková síla a proto také síla tření bude v tomto místě menší. Po tomto ukazováčku začne pravítko klouzat. Začne-li se tužka pohybovat např. po levém prstu, bude v tomto místě třecí síla $F_\mathrm{t1} = fF_\mathrm{N1}$ menší než na pravé straně, kde $F_\mathrm{t2} = f_0F_\mathrm{N2}$. Tužka bude po levém prstu klouzat až do okamžiku, kdy

$$fF_\mathrm{N1} = f_0F_\mathrm{N2}. \tag{2.3.1}$$

Protože pro síly $F_\mathrm{N1,2}$ platí (viz obr. 2.2)

$$\frac{F_\mathrm{N2}}{F_\mathrm{N1}} = \frac{a}{b},$$

bude podmínka (2.3.1) splněna, jestliže



$$\frac{a}{b} = \frac{f}{f_0}.$$

Obr. 2.2: K řešení úlohy 2.3

Poté si oba prsty vymění roli a tužka začne klouzat po pravém prstu až do okamžiku, kdy naopak

$$\frac{b}{a} = \frac{f}{f_0}.$$

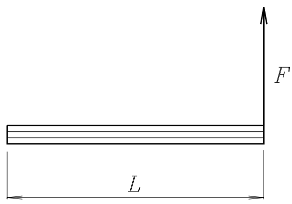
Střídání prstů se opakuje, až se oba setkají.

Je zajímavé srovnat tuto situaci se vzdalováním prstů od sebe. I tehdy začne tužka klouzat po tom z prstů, na který působí menší tlakovou silou F_N a kde je menší třecí síla. Protože vzdálenost tohoto prstu od těžiště roste, klesá F_N i F_t a tužka klouže stále po tomto prstu – k žádnému střídání nedojde.

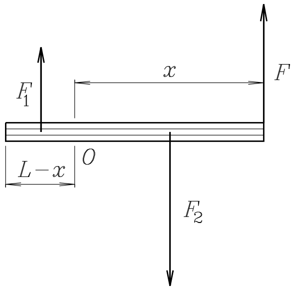
Úloha 2.4[3]

Hranatá tužka o hmotnosti $M = 20\,\mathrm{g}$ leží na vodorovné desce stolu se součinitelem smykového tření $\mu = 0{,}05$. Na jednom konci působíme silou $\boldsymbol{F}$ ve vodorovné rovině kolmo k tužce (obr. 2.3 – pohled shora). Jestliže velikost síly postupně zvětšujeme, začne tužka prokluzovat po stole. Při jaké velikosti síly $\boldsymbol{F}$ k tomu dojde? Který z bodů tužky zůstane na místě? Můžete si pomoci vhodným pokusem. Tužku považujte za stejnorodé těleso.

[3]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.



Obr. 2.3: K zadání úlohy 2.4



Obr. 2.4: K řešení úlohy 2.4

Řešení:

Označme O bod tužky, který neprokluzuje a zůstává na místě (obr. 2.4), $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ třecí síly působící na jednotlivé části tužky na opačných stranách od bodu O. Třecí síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ jsou konstantní (na počátku je tužka v klidu, takže se jedná o tření statické, při pohybu potom budou pochopitelně o něco menší), mají opačný směr, jsou úměrné hmotnostem a tím i délkám těchto částí a působí vždy ve středu daného úseku tužky. Při hledané minimální velikosti síly F budou všechny působící síly v rovnováze, tzn. celková síla i celkový moment sil musí být rovny nule

$$F + F_1 = F_2, \qquad Fx = F_1\frac{L-x}{2} + F_2\frac{x}{2},$$

kde

$$F_1 = \mu Mg\frac{L-x}{L}, \qquad F_2 = \mu Mg\frac{x}{L}.$$

Z prvních dvou rovnic vyloučením F získáme

$$F_2 x = F_1(L+x)$$

a dosazením za F_1 i F_2 dále kvadratickou rovnici pro x

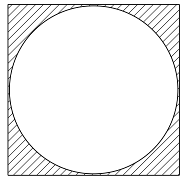
$$x^2 = (L-x)(L+x),$$

jejímž řešením je $x = L/\sqrt{2}$. Pro sílu F pak vychází

$$F = F_2 - F_1 = \mu Mg(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}004\,\mathrm{N}.$$

Úloha 2.5[4]

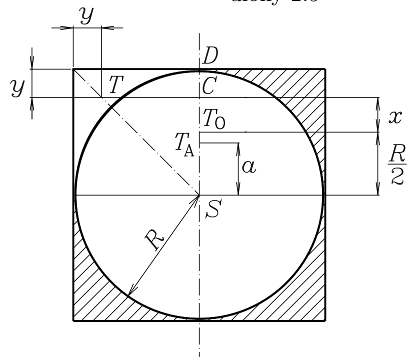
Ze stejnorodé čtvercové desky o hraně d vyřezali v dílně kruh o maximálním možném průměru. Zůstaly čtyři stejné části při vrcholech čtverce (viz obr. 2.5). Najděte těžiště jednoho takového rohového odřezku, víte-li, že těžiště půlkruhové desky o poloměru R je ve vzdálenosti $a = 4R/(3\pi)$ od středu půlkruhu.



Obr. 2.5: K zadání úlohy 2.5

Řešení:

Maximální kruhová deska, kterou lze ze čtverce vyříznout je ohraničena kružnicí vepsanou čtverci; její poloměr označme R. Čtvercovou desku pomyslně rozdělíme na dva stejné obdélníky o stranách R a $2R$ podle obr. 2.6. Těžiště T_{O} takového obdélníku leží ve vzdálenosti $R/2$ od středu kruhu. Označme x vzdálenost hledaného těžiště rohových odřezků od bodu T_{O} měřenou podél osy obdélníka (obr. 2.6), tj. $x = |CT_{\mathrm{O}}|$. U stejnorodé desky jsou hmotnosti jednotlivých částí úměrné obsahu příslušných ploch. Uvažovaný obdélník si lze představit jako útvar složený z půlkruhu a dvou uvažovaných rohových odřezků. Protože známe i polohu těžiště půlkruhu T_{A}, zapišme momenty působících sil vzhledem k bodu T_{O}



Obr. 2.6: K řešení úlohy 2.5

$$\left(2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}\right) x = \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{R}{2} - a\right).$$

Odtud vyjádříme

$$x = \frac{\pi\,(R/2 - a)}{4 - \pi} = \frac{R\,(\pi - 8/3)}{2(4 - \pi)} \approx 0{,}277\,R.$$

Bod C je vzdálen od bodu D na hraně obdélníku o vzdálenost

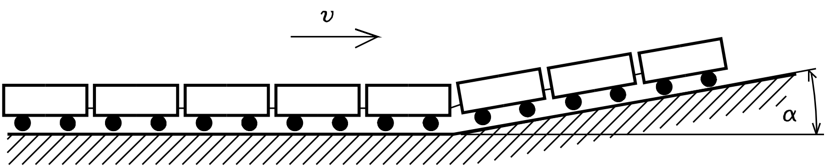
$$y = R - R/2 - 0{,}277\,R = 0{,}223\,R.$$

Protože odřezky jsou symetrické, pomocí Pythagorovy věty nyní snadno určíme, že těžiště odřezku leží na jeho geometrické ose ve vzdálenosti $\sqrt{2}y =$ $= \sqrt{2} \cdot 0{,}223\,R \approx 0{,}315\,R$ od vrcholu pravého úhlu.

[4] Zpracováno podle časopisu *Kvant.*

Úloha 2.6[5]

Souprava nákladních železničních vagónů se pohybuje setrvačností a najíždí na svah, svírající s vodorovnou rovinou úhel α (obr. 2.7). V okamžiku, kdy se zastavila, byla na svahu právě polovina soupravy. Jaká doba uplynula od okamžiku, kdy první vagón začal stoupat do zastavení? Délka soupravy je L, hmotnost M, vozy jsou naloženy rovnoměrně a mezery mezi nimi jsou zanedbatelné, tření neuvažujte.



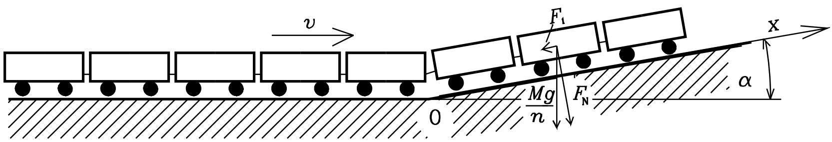
Obr. 2.7: K zadání úlohy 2.6

Řešení:

Zvolme osu x souřadnicové soustavy podle obr. 2.8 ve směru vzhůru po svahu. Je-li hmotnost soupravy M a mezery mezi vagóny jsou zanedbatelné, bude hmotnost části soupravy o délce x, která už je na svahu, Mx/L. Z fyzikálního hlediska je svah nakloněnou rovinou, takže na část soupravy na svahu působí složka tíhové síly

$$F_1 = -\frac{Mgx\sin\alpha}{L}.$$

Tato síla udílí vlaku zrychlení a, takže platí



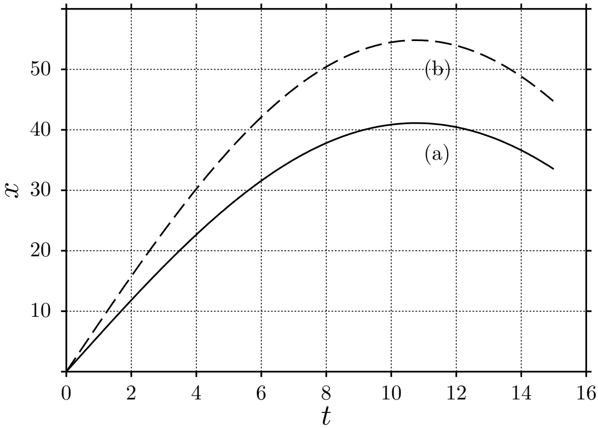
Obr. 2.8: K řešení úlohy 2.6

$$Ma = M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Mg\sin\alpha}{L}x. \tag{2.6.1}$$

Tato rovnice není ničím jiným, než rovnicí harmonických kmitů s úhlovou frekvencí $\omega = g\sin\alpha/L$ a periodou $T = 2\pi\sqrt{L/g\sin\alpha}$. Čas t, za který vyjede souprava nejvýše a zastaví se, bude pak roven jedné čtvrtině doby kmitu, tj.

$$t = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}}.$$

[5] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.



Obr. 2.9: K řešení úlohy 2.6

Dodejme, že souprava pochopitelně nebude konat harmonické kmity, neboť rovnice (2.6.1) platí pouze tehdy, jestliže se alespoň část soupravy nachází na svahu. Pokud je ovšem celý vlak na vodorovné rovině, pak na něho nepůsobí žádná síla a pohybuje se pouze setrvačností. Je také zřejmé, že čas t, za který vlak zastaví, nezávisí na tom, jaká část vlaku vyjede na svah (předpokládáme-li, že platí $x < L$). To, že na svahu měla být polovina soupravy je dáno počáteční rychlostí (z hlediska řešení diferenciální rovnice (2.6.1) se jedná o počáteční podmínky).

Chceme-li nalézt alespoň jeden případ, kdy bude tato podmínka splněna, musíme zvolit konkrétní hodnoty a použít k řešení např. počítač. Na obr. 2.9 je znázorněna situace pro soupravu o délce $L = 80\,\mathrm{m}$ najíždějící na svah svírající úhel $10°$ s vodorovnou rovinou pro počáteční rychlosti $6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Vidíme, že v případě (a) maximální hodnota x o málo přesahuje $40\,\mathrm{m}$, tzn. že na svahu by v okamžiku zastavení bylo o něco více než právě polovina soupravy.

2.2 Mechanická práce a energie

Úloha 2.7[6]

Cestující ve vlaku, který se rozjíždí se stálým zrychlením o velikosti a, se rozhodl navštívit přítele v prvním vagóně. Jde stále stejnou rychlostí u vzhledem ke stěnám vagónu, musí však překonávat setrvačnou sílu, snažící se vrátit ho zpět. Cestující proto nutně koná práci. Čím se tato práce projeví? Prověřte, zdali není narušen zákon zachování energie.

---

[6]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Řešení:
Zadání úlohy možná na první pohled svádí k odpovědi, že práce, kterou cestující při chůzi vykoná, se projeví změnou kinetické energie celého vagónu a že tato změna je vzhledem k celkové kinetické energii jedoucího vagónu zanedbatelně malá, takže ji nepozorujeme. Je sice pravda, že cestující bude podle zákona akce a reakce působit na vagón silou rovnou setrvačné síle, která na něho při rovnoměrně zrychleném pohybu vlaku působí, ale stejnou silou by podle téhož zákona na vagón působil i kdyby zůstal sedět. Práci, kterou při chůzi vykoná, spotřebuje „sám na sebe“.

Úlohu je výhodné řešit z hlediska pozorovatele stojícího vedle jedoucího vlaku, tj. ve vztažné soustavě spojené s povrchem Země. Označme a zrychlení vlaku. Za čas Δt se rychlost vlaku zvětší z hodnoty v na $v + a\Delta t$ a kinetická energie cestujícího o hmotnosti m sedícího v kupé se zvětší o

$$\Delta E_1 = \frac{m(v + a\Delta t)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left[(v + a\Delta t)^2 - v^2\right].$$

Pohybuje-li se člověk vzhledem k vagónu rychlostí u, bude přírůstek jeho kinetické energie za stejný čas

$$\begin{aligned}\Delta E_2 &= \frac{m(v + a\Delta t + u)^2}{2} - \frac{m(v+u)^2}{2} = \frac{m}{2}\left[(v + a\Delta t)^2 - v^2\right] + mua\Delta t = \\ &= \Delta E_1 + mua\Delta t.\end{aligned}$$

Přírůstek ΔE_2 zahrnuje přírůstek kinetické energie ΔE_1 sedícího cestujícího, jenž je výsledkem práce vykonané motorem lokomotivy. Zbývající část $mau\Delta t$ připadá na práci svalů člověka. Skutečně, překonává-li setrvačnou sílu ma, která na něho působí, a za čas Δt ujde rychlostí u dráhu $u\Delta t$, vykoná práci $mau\Delta t$. Práce svalů tak „zabezpečuje“, že přírůstek kinetické energie cestujícího, jenž prochází vagónem, je ve srovnání se sedícími spolucestujícími větší. Jak jsme očekávali, zákon zachování energie neselhal ani tentokrát.

Úloha 2.8[7]

Ježibaba Zubolavá, hrdá majitelka perníkové chaloupky v údolí o nadmořské výšce 220 m nad mořem, se rozhodla přestěhovat chaloupku na kopec o nadmořské výšce 420 m nad mořem, aby měla dobrý výhled do širokého okolí. Proto se rozhodla odchycené děti Jeníčka a Mařenku odložit na pozdější konzumaci a využít je jako pracovní síly při stavbě svého nového domu. Kolik sklenic Nutelly o hmotnosti 400 g a využitelné energii 8908 kJ spotřebovala ježibaba k výživě Jeníčka a Mařenky při transportu 1200 perníkových tvárnic o rozměrech $30 \times 20 \times 15$ cm na vrchol kopce? Hustota perníku je $380\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Řešení:
Práce, kterou Jeníček s Mařenkou vykonají, se spotřebuje minimálně na změnu potenciální energie tvárnic. Energii, kterou k vykonání práce budou potřebovat,

[7] Autorem úlohy je Arnošt Žídek.

načerpají z výživné Nutelly. Tato práce W je tedy rovna $W = nE_{\text{využ}}$, kde $E_{\text{využ}}$ je využitelná energie jedné 400gramové sklenice Nutelly a n je počet sklenic, které Jeníček s Mařenkou zkonzumují. Změna potenciální energie tvárnic je rovna

$$\Delta E_{\text{p}} = mg\Delta h = NMg\Delta h = N\varrho Vg\Delta h, \tag{2.8.1}$$

kde Δh je rozdíl nadmořských výšek, N počet tvárnic, M hmotnost jedné tvárnice, ϱ hustota perníku a V objem jedné perníkové tvárnice.

Zákon zachování energie můžeme zapsat ve tvaru

$$nE_{\text{využ}} = N\varrho Vg\Delta h \tag{2.8.2}$$

a pro počet sklenic Nutelly, které Jeníček s Mařenkou snědí, vychází

$$n = \frac{N\varrho Vg\Delta h}{E_{\text{využ}}}.$$

Po dosazení hodnot ze zadání získáváme výsledný počet sklenic Nutelly $n = 0{,}904 \approx 1$, což znamená, že Jeníček s Mařenkou jsou velmi levnou pracovní silou a Ježibaba si snadno dopomůže k novému bydlení i bez stavebního spoření.

V předcházejících úvahách jsme samozřejmě nebrali v úvahu, že Mařenka s Jeníčkem nejsou nehmotné bytosti a spotřebují energii i na přemisťování sebe sama. K přesnějšímu řešení by bylo nutné vědět, kolik tvárnic Mařenka s Jeníčkem unesou při jedné cestě. Pokud by Jeníčkova „přepravní kapacita“ byla 4 a Mařenčina 2 tvárnice, museli by cestu nahoru absolvovat 200krát. Na změnu jejich potenciální energie by bylo nutné vykonat práci $W_1 = 200\,(M_{\text{j}} + M_{\text{m}})g\Delta h$ a množství spotřebovaných sklenic Nutelly by bylo dáno vztahem

$$n = \frac{W + W_1}{E_{\text{využ}}} = \frac{[N\varrho V \ + 200(M_{\text{j}} + M_{\text{m}})]\,g\Delta h}{E_{\text{využ}}}.$$

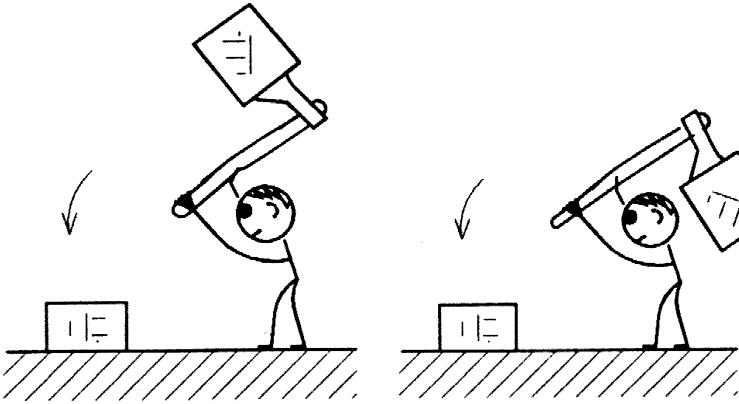
Při hmotnostech Jeníčka a Mařenky $M_{\text{j}} = 40\,\text{kg}$ a $M_{\text{m}} = 30\,\text{kg}$ by Ježibaba musela obětovat necelé 4 a při hmotnostech $M_{\text{j}} = 100\,\text{kg}$ a $M_{\text{m}} = 80\,\text{kg}$ dokonce téměř 9 sklenic Nutelly. S vykrmováním obětí by proto ježibaba měla začít určitě až po stěhování.

Ani tento odhad samozřejmě není ještě úplně správný. Nezanedbatelné množství energie je např. potřeba na udržení metabolismu lidského těla; jistě sami přijdete i na další faktory, jejichž vliv jsme nevzali v úvahu.

Úloha 2.9[8]

Většina z nás jistě alespoň někdy v životě štípala dřevo. Jestliže se nám podaří sekeru pevně zatnout do dřeva, postupujeme dále většinou buď podle obr. 2.10a nebo obr. 2.10b, zejména narazíme-li na suk. Který z obou způsobů je z fyzikálního hlediska efektivnější?

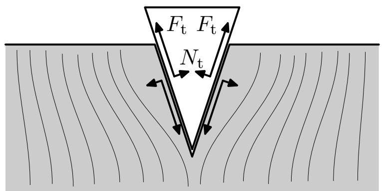
[8] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.



(a) (b)

Obr. 2.10: K zadání úlohy 2.9

Řešení:
Při zatnutí sekery do dřeva působí rozštípnuté části polena na sekeru tlakovými silami kolmými ke stěnám železného klínu (obr. 2.11). Stejně velikými silami působí pochopitelně i sekera na dřevo. V důsledku toho vznikají ve dřevě pružné deformace a k úplnému rozštípnutí polena dojde, když napětí vzniklé v důsledku těchto deformací dosáhne mezní hodnoty.



Obr. 2.11: K řešení úlohy 2.9

Předpokládejme, že sekera s polenem budou mít při dopadu na špalek v obou případech stejnou energii E. Při nárazu se část energie mění v teplo. V prvním případě (na špalek dopadne poleno – obr. 2.10a) se jedná o náraz skoro nepružný, ve druhém (na špalek dopadne sekera – obr. 2.10b) téměř pružný. Ztráty energie ΔE přeměnou na teplo budou proto ve druhém případě menší. Zbývající část energie se spotřebuje:
a) na práci A proti silám tření při vzájemném pohybu polena a železného klínu sekery (obr. 2.11),
b) na potenciální energii pružných deformací ve dřevě U.
Platí tedy

$$E_1' = E - \Delta E_1 = A_1 + U_1,$$

$$E_2' = E - \Delta E_2 = A_2 + U_2.$$

Jak již víme, $E_2' > E_1'$, takže

$$A_2 + U_2 > A_1 + U_1.$$

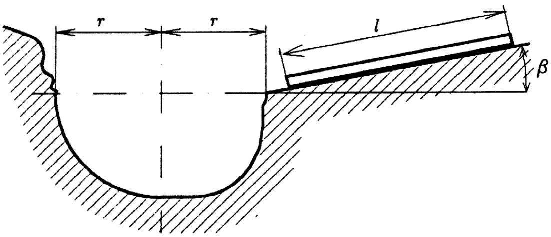
Práce A, potřebná na překonání sil tření, se mění v závislosti na tom, jak hluboko je sekera zatnutá ve dřevě, konkrétně na síle reakce N_t, jíž jsou síly tření úměrné (obr. 2.11). Energie U odpovídá práci normálové tlakové síly ve dřevě, která je vždy rovna síle reakce N_t. Z toho je zřejmé, že veličiny A a U jsou přímo úměrné a podmínka $A_2 + U_2 > A_1 + U_1$ je ekvivalentní podmínkám $A_2 > A_1$ $U_2 > U_1$. Druhý způsob je tedy zřejmě efektivnější, neboť při stejné počáteční energii E je energie U a tím i napětí vzniklé deformací dřeva větší.

Máte-li praktické zkušenosti ze štípání dřeva, nebudete možná s výše uvedeným zjednodušeným vysvětlením spokojeni. Problematikou se důkladně zabýval kapitán Flint již v roce 1732 (podrobněji viz [4]) a dospěl k závěru, že nejefektivnější je opomenutý způsob (c), při němž dostatečně velkou a silnou sekerou rozštípneme poleno napoprvé prudkým úderem do středu letokruhů. Vraťme se však k možnostem diskutovaným v zadání úlohy.

Je zřejmé, že způsob (b) je zcela nepoužitelný ke štípání tenkých třísek, závisí tedy určitě na poměru hmotnosti sekery a štípaného polena. Předpokládáme-li, že v obou případech (a) a (b) sekera s polenem na špalek stejnou rychlostí, bude způsob (b) efektivnější pouze pokud je poleno těžší než sekera.

Úloha 2.10

Ze svahu svírajícího s vodorovnou rovinou úhel β velice zvolna sjíždí kláda o délce $l = 6\,\mathrm{m}$ do vyschlého říčního koryta, jehož levá polovina má kruhový průřez o poloměru $r = 2\,\mathrm{m}$ (obr. 2.12). Za předpokladu, že po stěnách koryta klouže kláda bez tření, zjistěte, jaký úhel α s vodorovným směrem bude kláda svírat, až se zastaví? Kládu považujte po celé délce za homogenní těleso, jehož zbývající rozměry jsou vzhledem k délce l zanedbatelné.



Obr. 2.12: K zadání úlohy 2.10

Řešení:

Klíčem k vyřešení této úlohy je princip, s jehož projevy se v přírodě setkáváme velmi často: kláda se ustálí v poloze, ve které bude její energie minimální. Jedinou silou, která na kládu o hmotnosti m působí, je tíhová síla mg. Naším úkolem je proto nalézt polohu, ve které bude potenciální energie klády minimální, jinými slovy polohu, při které bude její těžiště nejníže. Zaveďme vztažnou soustavu podle obr. 2.13.

Zanedbáme-li všechny ostatní rozměry klády kromě její délky, potom pro y-ovou souřadnici těžiště y_T vychází

$$y_\mathrm{T} = r - r\sin 2\alpha + \frac{l}{2}\sin\alpha.$$

Minimum této funkce najdeme pomocí 1. derivace

$$\frac{\mathrm{d}y_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = -2r\cos 2\alpha + \frac{l}{2}\cos\alpha = 0.$$

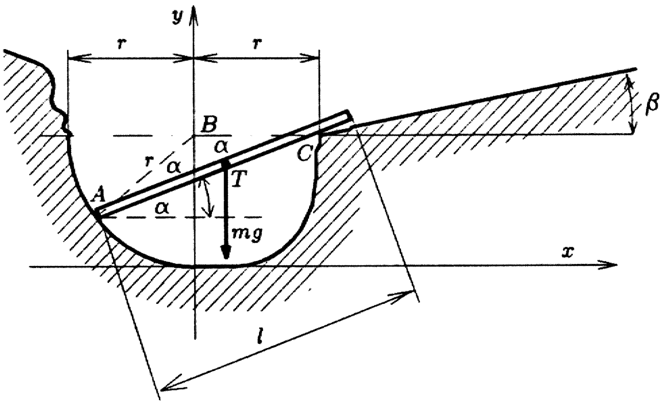
Použijeme-li goniometrického vzorce $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, dostáváme kvadratickou rovnici pro $\cos\alpha$

$$-4r\cos^2\alpha + 2r + \frac{l}{2}\cos\alpha = 0,$$

jejímž řešením vychází

$$\cos\alpha = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 128r^2}}{16r}.$$

Ze zadání úlohy je zřejmé, že nemá smysl uvažovat úhly $\alpha > 90°$, pro něž $\cos\alpha < 0$.



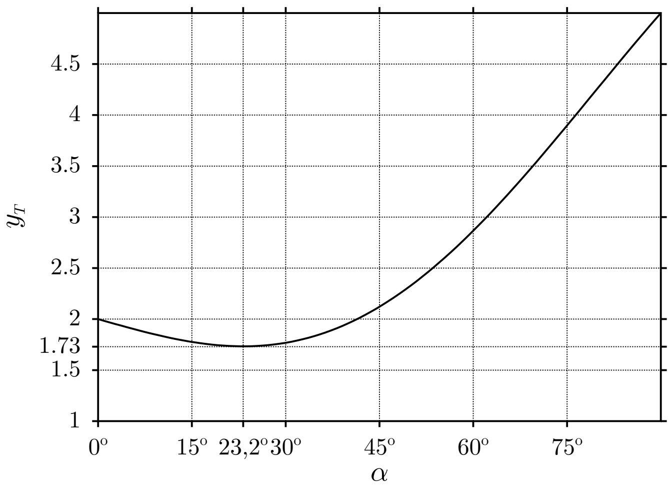
Obr. 2.13: K řešení úlohy 2.10

Budeme proto dále počítat pouze s kladným kořenem. Pro zadané hodnoty $l = 6\,\mathrm{m}$ a $r = 2\,\mathrm{m}$ obdržíme

$$\cos\alpha = \frac{6 + \sqrt{36 + 512}}{32} = 0{,}919\,043\,7,$$

$$\alpha = 23{,}213\,318° \approx 23°\,13'.$$

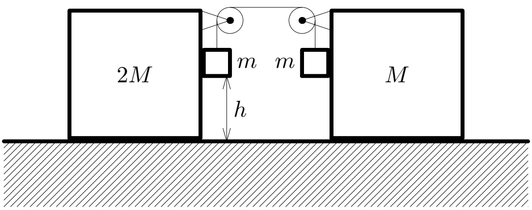
Chceme-li se vyhnout použití derivace, můžeme velikost úhlu α odhadnout z grafu funkce $y_\mathrm{T}(\alpha)$ na obr. 2.14, který lze snadno získat pomocí vhodného počítačového programu. Vychází přibližně rovněž $\alpha = 23{,}2°$. Pro úplnost dodejme, že náš výpočet lze použít pouze za podmínky $\alpha > \beta$.



Obr. 2.14: Závislost $y_\mathrm{T} = y_\mathrm{T}(\alpha)$

Úloha 2.11[9]

V soustavě na obr. 2.15 jsou hmotnosti obou závaží $m = 200\,\mathrm{g}$ a hmotnosti krychlových kostek $M = 1\,\mathrm{kg}$ a $2M = 2\,\mathrm{kg}$. Na počátku udržujeme soustavu v klidu tak, že nitě se závažími jsou přesně svislé a závaží se dotýkají stěn kostek ve výšce $h = 15\,\mathrm{cm}$. Poté soustavu uvolníme. Jakou rychlost bude mít těžší kostka v okamžiku, kdy závaží, které se jí dotýká, dopadne na stůl? Tření zanedbejte.



Obr. 2.15: K zadání i řešení úlohy 2.11

Řešení:

Nechť $\boldsymbol{V}$ je rychlost kostky o hmotnosti $2M$ a $\boldsymbol{v}$ rychlost kostky o hmotnosti M. Souvislost obou rychlostí je dána zákonem zachování hybnosti $(2M + m)\boldsymbol{V} = -(M + m)\boldsymbol{v}$, z něhož pro velikosti rychlostí plyne

$$v = V\,\frac{2M + m}{M + m} = V\,\frac{2 + \gamma}{1 + \gamma}, \tag{2.11.1}$$

[9]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

kde $\gamma = m/M = 0{,}2$. Horizontální část nitě se zkracuje rychlostí $V + v$ a obě závaží klesají stejnou rychlostí (na obě krychle působí stejná síla), tzn. dotknou se desky stolu v jeden okamžik. Zapíšeme nyní zákon zachování energie pro tuto soustavu

$$\underbrace{\frac{1}{2}(2M+m)V^2 + \frac{1}{2}(M+m)v^2}_{\text{pohyb ve vodorovném směru}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{V+v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{V+v}{2}\right)^2}_{\text{pohyb ve svislém směru}} = 2mgh$$

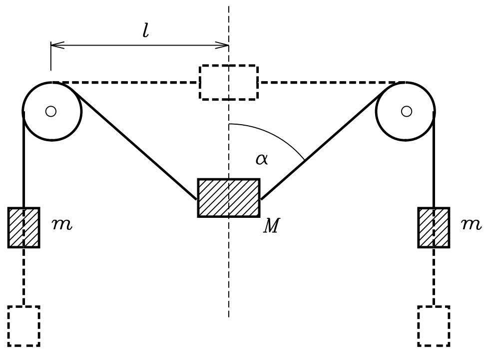
a dosadíme za v z (2.11.1). Odtud po úpravách dostaneme hledanou rychlost:

$$V = \sqrt{\frac{8gh\gamma(1+\gamma)^2}{(3+2\gamma)(4\gamma^2+9\gamma+4)}}.$$

Po dosazení zjistíme, že kostka o hmotnosti $2M$ bude mít v daném okamžiku rychlost $V = 0{,}41\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Úloha 2.12[10]

Závaží o hmotnosti M spojené se závažími o hmotnosti m nitěmi konstantní délky bylo na počátku v klidu v poloze znázorněné čárkovanou čarou na obr. 2.16. Po uvolnění se závaží M začalo pohybovat dolů ve svislém směru. Určete rychlost závaží M v okamžiku, kdy nitě svírají úhel α se svislým směrem. Za jaké podmínky bude soustava konat kmity? Rozměry závaží považujte za velmi malé ve srovnání se vzdáleností l.

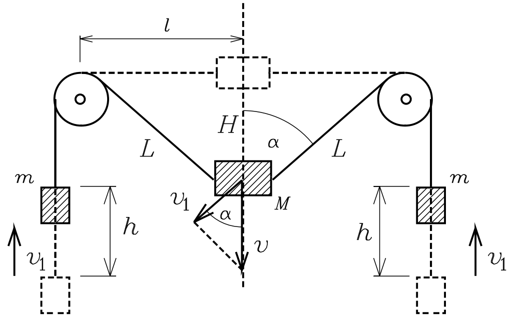


Obr. 2.16: K zadání úlohy 2.12

[10] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Řešení:

V poloze, kdy nit svírá se svislým směrem úhel α (viz obr. 2.17) bude závaží M oproti počáteční poloze níže o vzdálenost $H = l \operatorname{cotg} \alpha$, každé ze závaží m vystoupilo o $h = l/\sin\alpha - l$. Podle zákona zachování energie musí být součet celkové kinetické energie všech závaží a změny jejich potenciální energie roven nule, neboť na počátku byla soustava v klidu. Označíme-li v rychlost závaží M, v_1 rychlost závaží m, platí



Obr. 2.17: K řešení úlohy 2.12

$$\frac{Mv^2}{2} + 2\frac{mv_1^2}{2} + 2mgh - MgH = 0. \tag{2.12.1}$$

Najděme dále vztah mezi v a v_1. Z obr. 2.17 zřejmě plyne

$$l^2 + H^2 = L^2$$

a derivováním této rovnice podle času obdržíme

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} + 2H\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 2L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}.$$

Protože vzdálenost l je konstantní, bude $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t = 0$ a tedy

$$2H\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 2L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}.$$

Podle definice rychlostí v a v_1 však můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = v_1$$

a dále také (podle obr. 2.17)

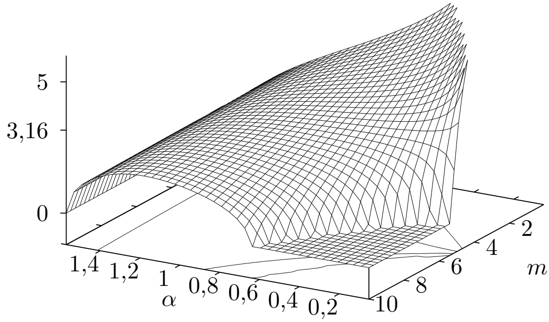
$$\frac{H}{L} = \cos\alpha.$$

Po dosazení z předcházejících rovnic dostáváme hledaný vztah mezi v_1 a v

$$v_1 = v\cos\alpha, \tag{2.12.2}$$

který je možné odvodit i pomocí geometrických úvah. Z rovnic (2.12.1) a (2.12.2) pak po dosazení za H i h po úpravě dostaneme

$$v = \sqrt{2gl\frac{M\cos\alpha + 2m(\sin\alpha - 1)}{\sin\alpha(M + 2m\cos^2\alpha)}}. \tag{2.12.3}$$



Obr. 2.18: Závislost $v = v(m,\alpha)$

Předpokládáme-li, že nitě jsou dostatečně dlouhé, můžeme provést i diskusi získaného řešení (konečná délka lan představuje ve skutečnosti významné omezení pohybu). Podmínka $v = 0$ vede k rovnici

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2m \pm M}{2m + M},$$

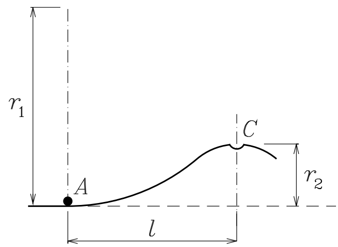
kde kladné znaménko odpovídá počáteční poloze $\alpha = 90\ ^0$. Protože má smysl uvažovat úhly $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle = \langle 0\,\text{rad}, \pi/2\,\text{rad} \rangle$, musí nutně $\operatorname{tg}\alpha/2 > 0$ a pouze pro $M < 2m$ existuje taková poloha, v níž se závaží zastaví a začne se vracet zpět – soustava bude konat kmity. Pro $M > 2m$ se bude rychlost závaží stále zvyšovat a teoreticky při $\alpha \to 0°$ bude rychlost v velmi vysoká ($v \to \infty$) o čemž se můžeme snadno přesvědčit prostřednictvím rovnice (2.12.3). Při $M = 2m$ je soustava blízko stavu rovnováhy a pro $\alpha \to 0$, kdy zrychlení jednotlivých závaží jsou téměř nulová, dosahuje v limitní hodnoty $\sqrt{gl}$. Důkaz tohoto tvrzení však vyžaduje znalost diferenciálního počtu a l'Hopitalova pravidla.

Alespoň kvalitativní představu si lze vytvořit na základě konkrétní volby hodnot. Závislost v na $m \in \langle 0,\ 10\,\text{kg} \rangle$ a $\alpha \in \langle 0,\ \pi/2\,\text{rad} \rangle$ pro $M = 10\,\text{kg}$ a $l = 1\,\text{m}$ je znázorněna na obr. 2.18 spolu s vrstevnicemi pro hodnoty rychlosti $v = 0\,\text{m·s}^{-1}$, $\sqrt{10}/2\,\text{m·s}^{-1}$, $\sqrt{10}\,\text{m·s}^{-1}$ a $3\sqrt{10}/2\,\text{m·s}^{-1}$. Pro $m \in (5\,\text{kg},\ 10\ kg\rangle$ bude $2m - M > 0$ a lze nalézt takový úhel $\alpha \in \langle 0,\ \pi/2\,\text{rad})$, pro který $v = 0$. Pro $m \in \langle 0,\ 5\ kg)$ se při $\alpha = 0$ rychlost v blíží k nekonečnu. Konečně pro $m = 5\ kg$ bude $M = 2m$ a pro $\alpha = 0$ dostáváme $v = \sqrt{10}\,\text{m·s}^{-1}$. K vykreslení grafu bylo použito volně šiřitelného programu *Gnuplot.*

Připomeňme, že díky zákonu zachování mechanické energie jsme vůbec nemuseli počítat se silou, napínající nit. Tato úloha je zároveň příkladem soustavy, v níž poloha ani rychlost jednotlivých částic (závaží) nejsou zcela libovolné, ale jsou vázány určitými vztahy souvisejícími s geometrickými omezeními pohybu. Takovýmto soustavám říkáme *soustavy podrobené vazbám.*

Úloha 2.13

Při minigolfu měl hráč odpálit míček z bodu A do jamky v bodě C po trajektorii, kterou tvoří dvě hladce na sebe navazující válcové plochy o poloměrech $r_1 = 200\,\text{cm}$ a $r_2 = 60\,\text{cm}$ (obr. 2.19). Vodorovná vzdálenost obou míst je $l = 167\,\text{cm}$. V jakém intervalu musí být rychlost, kterou golfista míčku udělí, aby spadl do jamky? Moment setrvačnosti míčku o poloměru R a hmotnosti m je $I = 2mR^2/5$, odpor vzduchu a ztráty energie třením neuvažujte.



Obr. 2.19: K zadání úlohy 2.13

Řešení:

Nejprve určíme minimální rychlost, kterou musí golfista míčku udělit, aby spadl do jamky. Využijeme přitom zákon zachování energie. Zvolme nulovou hladinu potenciální energie v bodě A (obr. 2.20), potom bude mít míček v tomto bodě potenciální energii

$$E_{\text{pA}} = mgR.$$

Po úderu musí získat takovou kinetickou energii, aby celková mechanická energie byla alespoň rovna potenciální energii míčku v jamce. Kinetická energie bude součtem kinetické energie E_{pos} posuvného a kinetické energie E_{ot} otáčivého pohybu míčku kolem osy procházející těžištěm

$$E_{\text{k}} = E_{\text{pos}} + E_{\text{ot}},$$

kde

$$E_{\text{pos}} = \frac{1}{2}mv_1^2, \qquad E_{\text{ot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\frac{v_1^2}{R^2} = \frac{1}{5}mv_1^2;$$

v_1 značí rychlost míčku v bodě A. Vidíme, že celková kinetická energie míčku v bodě A je

$$E_{\text{k}} = \frac{7}{10}mv_1^2.$$

Pro potenciální energii míčku v jamce (bod C) platí

$$E_{\text{p}} = mg(r_2 + R),$$

kinetická energie v tomto mezním případě bude nulová (míček se v bodě C zastaví). Ze zákona zachování energie plyne

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gr_2} \approx 2{,}90\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Při výpočtu maximální rychlosti míčku vyjdeme z následující úvahy: v bodě P (obr. 2.20), v němž přechází jedna válcová plocha v druhou (tzv. inflexním bodě) se nesmí vlivem odstředivé síly míček „odlepit“ od podložky – odstředivá síla F_o působící na míček v bodě P muže být maximálně rovna tlakové síle F_n působící kolmo na podložku.

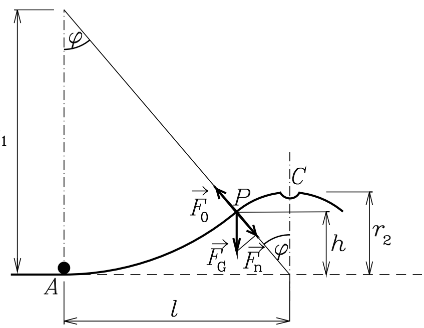
Nejprve určíme, v jaké výše h se nachází těžiště míčku v okamžiku, kdy se dotýká podložky v bodě P. Z obr. 2.20 vidíme, že

$$\cos\varphi = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

a pro výšku h získáme vztah

$$h = (r_2 + R)\cos\varphi = \frac{r_1(r_2 + R)}{r_1 + r_2}.$$

Pro maximální rychlost v_P míčku v bodě P musí být splněno



Obr. 2.20: K řešení úlohy2.13

$$F_\mathrm{o} = F_\mathrm{n}, \qquad F_\mathrm{o} = m\frac{v_\mathrm{P}^2}{(r_2 + R)}, \qquad F_\mathrm{n} = mg\cos\varphi,$$

odkud snadno vyjádříme

$$v_\mathrm{P} = \sqrt{g\,(r_2 + R)\cos\varphi}.$$

Nyní již známe rychlost míčku v bodě P a zbývá určit odpovídající rychlost v_2 v bodě A, která představuje maximální rychlost, při níž ještě míček může spadnout do jamky. K výpočtu použijeme opět zákon zachování energie

$$\frac{7}{10}mv_2^2 + mgR = mgh + \frac{7}{10}mv_\mathrm{P}^2.$$

Po dosazení za h, v_P a $\cos\varphi$ a úpravě dostáváme

$$v_2^2 = \frac{g}{7(r_1 + r_2)}\left[17r_1r_2 + R(7r_1 - 10r_2)\right].$$

Poloměr R míčku je přibližně $2\,\mathrm{cm}$ a tudíž $R \lll r_1, r_2$ a také $R(7r_1 - 10r_2) \lll 17r_1r_2$. Pro rychlost v_2 tak můžeme psát

$$v_2 \approx \sqrt{\frac{17}{7}g\frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}} \approx 3{,}31\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Má-li míček spadnout do jamky, musí mu golfista udělit rychlost v intervalu $\langle 2{,}90\,\mathrm{m\cdot s^{-1}},\ 3{,}31\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\rangle$.

Úloha 2.14[11]

Automobil značky Škoda 100L o hmotnosti $m = 1000\,\mathrm{kg}$ byl v rámci důkladné kontroly technického stavu podroben následujícímu testu: rozjížděl se po kruhové

[11] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

dráze autodromu o poloměru $R = 100\,\mathrm{m}$. Koeficient tření mezi asfaltem a pneumatikami je $\mu = 0{,}7$. Jaký musí být výkon motoru při nejrychlejším možném rozjezdu? Kolika „koním pod kapotou“ tento výkon odpovídá?

Řešení:

Na úplném začátku rozjezdu má třecí síla směr rychlosti (právě díky ní se automobil může vůbec rozjet), ale výkon není velký, neboť rychlost je velmi malá. Při dosažení maximální rychlosti v_0, při které se ještě škodovka může pohybovat po kruhové dráze ($v_0^2/R = \mu g$), je třecí síla v podstatě kolmá na vektor rychlosti a výkon automobilu proto opět nebude velký. Je tedy zřejmé, že maximální výkon musí automobil vyvinout mezi těmito dvěma stavy, v okamžiku, kdy bude průmět rychlosti na složku třecí síly tečnou k trajektorii maximální.

Normálová (tj. dostředivá) složka třecí síly má v každém okamžiku velikost mv^2/R, pro složku ve směru tečny k trajektorii potom vychází

$$F_\mathrm{t} = \sqrt{(\mu m g)^2 - \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2}$$

a potřebný výkon $P = F_\mathrm{t} v$. Maximum této funkce nalezneme standardním způsobem pomocí derivace; protože se však jedná o funkci nezápornou, můžeme si výpočet značně zjednodušit umocněním na druhou, hodnota argumentu, pro který dostaneme maximální hodnotu, bude stejná. Zbývá tak derivovat funkci

$$A = (\mu m g)^2 v^2 - \left(\frac{m}{R}\right)^2 v^6 .$$

Maximum vychází

$$v_\mathrm{m}^2 = \frac{\mu g R}{\sqrt{3}} \approx 19{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

a hledaný maximální výkon

$$P_\mathrm{m} = \sqrt{A_\mathrm{m}} = \mu g m \sqrt{\frac{2\mu g R}{3\sqrt{3}}} \approx 112\,\mathrm{kW}.$$

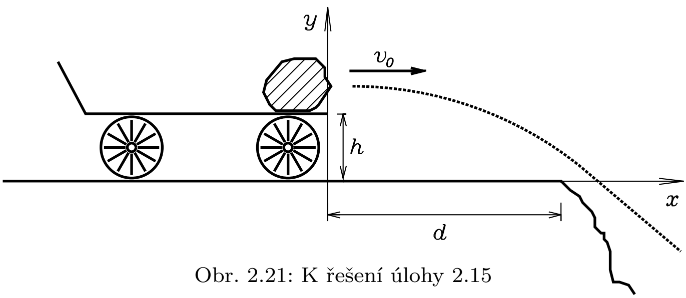
Uvážíme-li, že podle převodních vztahů 1 kůň $\approx 766\,\mathrm{W}$, odpovídá vypočtený výkon asi 146 koním. Jak dodává k této úloze pan Vítězslav Kuda, automobil Škoda 100L takového výkonu nemůže dosáhnout, neboť podle technického průkazu je maximální dosažitelný výkon pouze 35 kW.

2.3 Gravitační pole

2.3.1 Vrhy v homogenním tíhovém poli

Úloha 2.15[12]

Roku 1856 došlo v jisté francouzské věznici ke vzpouře vězňů. Všem dozorcům se podařilo utéct i se zbraněmi a vzápětí i s posilami obklíčit celou věznici. Ta byla umístěna na vysoké skalní plošině, kolem níž byl navíc hluboký příkop. Vězňům tedy nestačilo shazovat obrovské kameny dolů ze skály. Jeden z nich však objevil způsob, jak i velké balvany vrhat ze skály do větší vzdálenosti. Stačilo kámen umístit ve výšce 1,2 m nad zemí na přední konec vozu, ten roztlačit, aby dosáhl určité rychlosti a pak ho prudce zabrzdit. Kámen letí dále sám vlivem setrvačnosti. Jakou maximální rychlost mohli vězňové udělit vozu, aby ze skály spadl jen kámen a nikdy vůz, jestliže velikost zrychlení při brzdění byla rovna čtvrtině tíhového zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$? Tření zanedbejte.



Obr. 2.21: K řešení úlohy 2.15

Řešení:

Situace je znázorněna na obr. 2.21. Od okamžiku, kdy vůz začne brzdit, pohybuje se kámen setrvačností dál rychlostí v_0 ve vodorovném směru. Zároveň však na něj působí tíhová síla ve svislém směru $\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = m\boldsymbol{g}$. Výsledný pohyb je tedy složením rovnoměrného pohybu ve směru osy x a volného pádu z výšky $h = 2\,\mathrm{m}$ nad povrchem skály – jedná se o vodorovný vrh. Platí pro něj

$$x = v_0 t, \qquad y = h - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2.15.1}$$

Označme d vzdálenost místa, kde vůz začne brzdit, od okraje skály. Má-li kámen proletět těsně kolem okraje, pak $x = d$ a $y = 0$. Z rovnice

$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

[12] Autorem úlohy je Radek Horenský.

určíme $t = \sqrt{2h/g}$ a po dosazení do (2.15.1) dostaneme

$$d = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{2.15.2}$$

Vzdálenost d však můžeme vyjádřit i jinak. Víme, že vůz, pohybující se na počátku rychlostí v_0, musel na dráze d zabrzdit a že mohl mít zrychlení o velikosti nejvýše $a = g/4$. Označíme-li t' čas, během něhož vůz zastaví, můžeme psát

$$t' = \frac{0 - v_0}{-a} = \frac{4v_0}{g}.$$

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb platí

$$s \ = v_0t - \frac{1}{2}at^2 = v_0t - \frac{g}{8}t^2.$$

V našem konkrétním případě $s = d$ a $t = t' = 4v_0/g$, takže

$$d = v_0\frac{4v_0}{g} - \frac{g}{8}\frac{16v_0^2}{g^2} = \frac{4v_0^2}{g} - \frac{2v_0^2}{g} = \frac{2v_0^2}{g}. \tag{2.15.3}$$

Porovnáním (2.15.2) a (2.15.3) pak vychází

$$v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2v_0^2}{g},$$

neboli

$$v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

Po dosazení numerických hodnot

$$v_0 = \sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \ \cdot \ 1{,}2\,\mathrm{m}}{2}} = 2{,}426\,108\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx \ 2{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Úloha 2.16[13]

Zpráva z tisku: „Fotbalista Radek Drulák v poslední minutě zápasu vsítil gól, když z pětadvaceti metrů z přímého kopu střelou přes zeď hostujících hráčů vymetl šibenici branky.“ Jestliže míč proletěl hráčům těsně nad hlavami (ve výšce 1,90 m nad zemí), určete, jakou rychlostí byl vykopnut. Sami si zjistěte další potřebné údaje – rozměry branky a správnou vzdálenost zdi hráčů při přímém kopu. Odpor vzduchu a rozměry míče neuvažujte.

[13] Autorem úlohy je Radek Horenský.

Řešení:

Označme $h = 1{,}9\,\mathrm{m}$ výšku zdi, $h_1 = 2{,}44\,\mathrm{m}$ výšku branky, $l = 9\,\mathrm{m}$ vzdálenost Radka Druláka od zdi hráčů a $l_1 = 25\,\mathrm{m}$ jeho vzdálenost od branky (obr. 2.22). Míč koná šikmý vrh vzhůru s počáteční rychlostí v_0, kterou máme vypočítat. Při elevačním úhlu α můžeme psát

$$\begin{aligned} l &= v_0 t_1 \cos\alpha, \qquad h = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_1^2, \\ l_1 &= v_0 t_2 \cos\alpha, \qquad h_1 = v_0 t_2 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_2^2, \end{aligned}$$

kde t_1 je čas, za který doletí míč ke zdi, a t_2 čas, za který doletí k brance. Z prvních dvou rovnic vyloučením t_1 získáme

$$v_0 = \sqrt{\frac{l^2 g}{2\cos^2\alpha (l \operatorname{tg}\alpha - h)}} \tag{2.16.1}$$

a z druhé dvojice rovnic

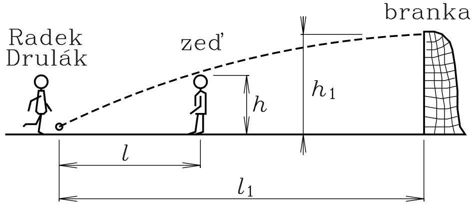
$$h_1 = l_1 \operatorname{tg}\alpha - \frac{l_1^2 g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{2.16.2}$$

Protože podle rovnice (2.16.1) také platí

$$2 v_0^2 \cos^2\alpha = \frac{l^2 g}{l \operatorname{tg}\alpha - h};$$

dosazením do (2.16.2) dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{h_1 l^2 - h l_1^2}{l_1 l^2 - l_1^2 l} \approx 0{,}27, \\ \alpha &\approx 15{,}37^\circ. \end{aligned}$$

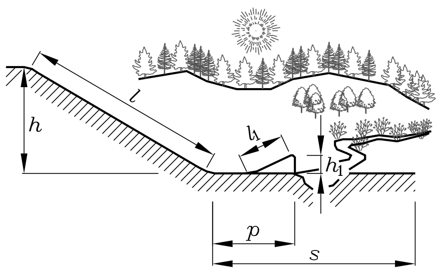


Obr. 2.22: K řešení úlohy 2.16

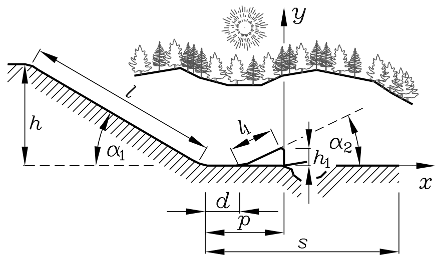
Z (2.16.1) pak po dosazení za $\operatorname{tg}\alpha$ a $\cos\alpha$ vychází hodnota (pro $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) $v_0 = 27{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ neboli $98{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Úloha 2.17

Chlapci chodili v zimě lyžovat na svah délky $l = 100\,\mathrm{m}$ s převýšením $h = 30\,\mathrm{m}$. Ve vzdálenosti $p = 16\,\mathrm{m}$ od úpatí svahu byla říčka, přes níž bylo za velkých mrazů možné přejet na druhý břeh. Chlapci jezdili zásadně „šusem“ (bez brzdění) a zastavili se pokaždé přibližně ve vzdálenosti $s = 30\,\mathrm{m}$ od úpatí kopce. Koncem února říčka částečně rozmrzla a aby ji mohli překonat, postavili si lyžaři malý nájezdový můstek o délce $l_1 = 7\,\mathrm{m}$ a výšce $h_1 = 1{,}5\,\mathrm{m}$ (obr. 2.23). Jak může být říčka nejvíce široká, aby nikdo z chlapců nespadl do vody? Odpor vzduchu neuvažujte, koeficient smykového tření považujte za konstantní. Tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Obr. 2.23: K zadání úlohy 2.17



Obr. 2.24: K řešení úlohy 2.17

Řešení:

Nejprve určíme příslušné úhly (viz obr. 2.24)

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{h}{l}\right) = \arcsin 0{,}300 \approx 17{,}45^\circ, \tag{2.17.1}$$

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{h_1}{l_1}\right) = \arcsin 0{,}214 \approx 12{,}37^\circ \tag{2.17.2}$$

a vzdálenost mezi úpatím svahu a hranou nájezdového skokanského můstku $d = p - l_1 \cos\alpha_2$.

Koeficient smykového tření vypočteme pomocí zákona zachování energie pro případ, kdy řeka byla zamrzlá a chlapci bez problémů přejížděli na druhý břeh

$$mgh = \mu mgl\cos\alpha_1 + \mu mgs, \tag{2.17.3}$$

odkud vychází

$$\mu = \frac{h}{l\cos\alpha_1 + s} \approx 0{,}24. \tag{2.17.4}$$

Rychlost v lyžaře v nejvyšším bodě vybudovaného můstku určíme ze zákona zachování energie

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_1 + \mu mg\left(l\cos\alpha_1 + d + l_1\cos\alpha_2\right). \tag{2.17.5}$$

Pro rychlost v potom dostáváme

$$v = \sqrt{2g\left[h - h_1 - \mu\left(l\cos\alpha_1 + d + l_1\cos\alpha_2\right)\right]} \approx 6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad (2.17.6)$$

Následující pohyb lyžaře pak odpovídá šikmému vrhu ze zmíněného nejvyššího bodu můstku, tudíž v soustavě souřadnic podle obr. 2.24 platí

$$\begin{aligned} x &= vt\cos\alpha_2, \\ y &= h_1 + vt\sin\alpha_2 - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \qquad (2.17.7)$$

Vyloučením parametru t z těchto rovnic pak získáme výslednou rovnici trajektorie pohybu lyžaře (tj. paraboly)[14]

$$y = h_1 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha_2} = h_1 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \frac{gx^2}{2v^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha_2\right).$$

V okamžiku dopadu lyžaře za říčku se y-ová souřadnice rovná nule a dostáváme kvadratickou rovnici

$$\frac{g(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha_2)}{2v^2}\,x^2 - x\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 - h_1 = 0,$$

z jejíchž kořenů má fyzikální smysl pouze kladný

$$x = v^2\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2 + \sqrt{\mathrm{tg}^2\,\alpha_2 + 2g\dfrac{h_1}{v^2}(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha_2)}}{g(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha_2)}.$$

Místo, kde lyžař dopadne na zem určuje zároveň i hledanou maximální možnou šířku říčky. Po dosazení číselných hodnot vychází $x = 4{,}1\,\mathrm{m}$.

[14] Při úpravě zde bylo použito známého a užitečného goniometrického vzorce $1/\cos^2\gamma = 1 + \mathrm{tg}^2\,\gamma$, který lze snadno odvodit z identity $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$ vydělením obou stran rovnice výrazem $1/\cos^2\gamma$.

2.3.2 Pohyb v radiálním gravitačním poli

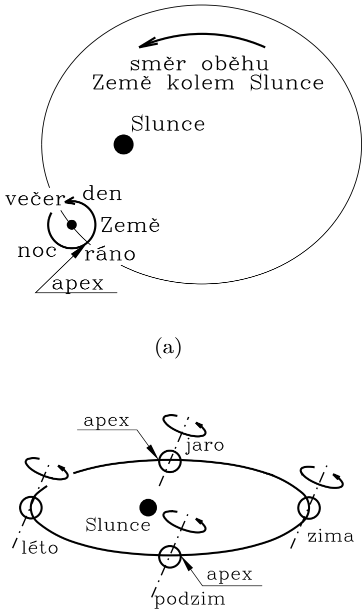
Úloha 2.18[15]

Proč pozorujeme více meteoritů v době od půlnoci do svítání než od západu do půlnoci?

Řešení:

Nejprve si připomeňme směr otáčení Země kolem své osy. Zatímco Slunce na obloze přes den putuje od východu na západ, směr otáčení Země je právě opačný – od západu na východ (obr. 2.25a).

Tzv. denní variaci výskytu meteorů (a i meteoritů) snadno pochopíme kombinací pohybu Země kolem Slunce a pohybu meteorů. Z obr. 2.25a vidíme, že Země v daném okamžiku směřuje „do míst, kde je ráno“. Přesněji řečeno, tzv. *apex*, tj. bod, do kterého Země směřuje, leží na obloze nad poledníkem, na němž je 6 hodin místního času (např. v období, kdy používáme středoevropský čas, je u nás tento bod každý den okolo šesté hodiny ráno přesně na jihu, jeho úhlová vzdálenost od obzoru je dána rovinou ekliptiky v daném ročním období). Protože meteory přilétají zhruba se stejnou pravděpodobností ze všech stran, dochází pochopitelně k většímu počtu srážek „na čelní straně“ z hlediska pohybu Země.



(a)

(b)

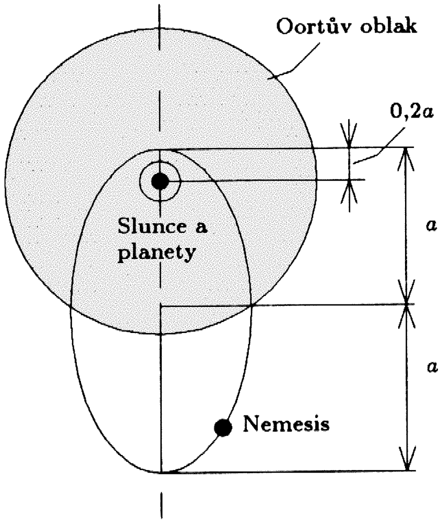
Obr. 2.25: K řešení úlohy 2.18

Dodejme, že kromě této denní variace výskytu meteorů jejich četnost kolísá i během roku. Zde máme samozřejmě na mysli meteory *sporadické*, které nepatří k žádnému meteorickému roji. V případě meteorických rojů totiž Země na své dráze prochází oblastmi s větším množstvím meteorického materiálu (pocházejících s největší pravděpodobností z komet) a to způsobí i častější výskyt meteorů. U sporadických meteorů je četnost výskytu spojená opět s *apexem*, tentokráte s jeho výškou nad obzorem v místě pozorování. V našich zeměpisných šířkách je nejvýše na podzim (obr. 2.25b), tehdy je také výskyt sporadických meteorů častější než na jaře, kdy je *apex* nad obzorem nejníže.

[15] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Úloha 2.19[16]

Koncem 70. let se někteří paleontologové domnívali, že k vymírání živočišných druhů na Zemi dochází obzvláště intenzivně v periodicky se opakujících obdobích, trvajících zhruba 7 miliónů let. Podle jedné z hypotéz by mohlo být spojeno s existencí trpasličí hvězdy zvané *Nemesis* (v antické mytologii tak byla nazývána bohyně pomsty), obíhající kolem Slunce po velmi protáhlé elipse (obr. 2.26). Polovina oběžné dráhy Nemesis by měla ležet v tzv. „Oortově oblaku“, který je považován za „zásobárnu“ kometárních jader.

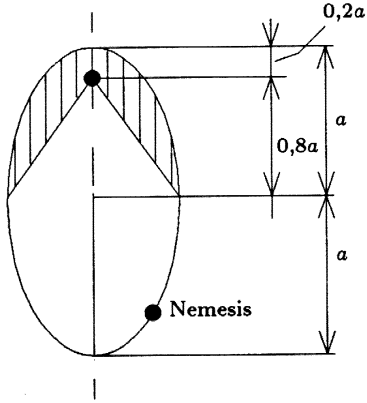


Obr. 2.26: K zadání úlohy 2.19

Při průchodu „Oortovým oblakem“ by Nemesis vychýlila tato jádra z oběžných drah a vyvolala „déšť komet“ trvající po dobu, kdy by se Nemesis nacházela uvnitř oblaku. Komety, jejichž rozpadlá jádra by zasáhla zemský povrch by pak mohly být příčinou rozsáhlých katastrof a tím i vymírání živočichů. Určete velikost a velké poloosy oběžné dráhy Nemesis a její dobu oběhu kolem Slunce, jestliže perihelium se podle předpokladů nachází ve vzdálenosti $0{,}2a$ od Slunce. Obsah elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší b je $S = \pi ab$.

Řešení:

Za dobu $T_1 = 7$ milionů let, po kterou má hypotetická Nemesis být v Oortově oblaku, opíše průvodič vycházející ze středu Slunce plochu vyšrafovanou na obr. 2.27. Obsah této plochy je dán rozdílem obsahů poloviny elipsy ($S_1 = \pi ab/2$) a trojúhelníka o základně $2b$ a výšce $0{,}8a$ ($S_2 = \frac{1}{2}\, 2b \cdot 0{,}8a = 0{,}8ab$), tedy



Obr. 2.27: K řešení úlohy 2.19

$$\Delta S = S_1 - S_2 = \frac{\pi ab}{2} - 0{,}8ab = \left(\frac{\pi}{2} - 0{,}8\right) ab.$$

Podle druhého Keplerova zákona je plošná rychlost, tj. plocha opsaná průvodičem za jednotku času konstantní a za celou periodu T opíše průvodič plochu rovnou obsahu

[16] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

elipsy $S = \pi ab$. Doba T_1, po kterou Nemesis pobývá v Oortově oblaku je úměrná výše uvedené ploše na obr. 2.27 a platí

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\Delta S}{\pi ab} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0{,}8\right) \approx 0{,}245$$

Odtud snadno nalezneme periodu T

$$T = T_1 \frac{S}{\Delta S} \approx 28{,}53\,\text{milionů let.}$$

K určení hlavní poloosy oběžné dráhy Nemesis použijeme 3. Keplerův zákon ve tvaru

$$a = \left(\frac{T}{T_{\text{Země}}}\right)^{2/3} a_{\text{Země}} = 93\,369{,}6\,\text{AU} \approx 14{\cdot}10^{12}\,\text{km},$$

kde $T_{\text{Země}} = 1\,\text{rok}$ je doba oběhu Země kolem Slunce a $a_{\text{Země}} = 1\,\text{AU}$ poloměr její oběžné trajektorie, tzv. astronomická jednotka ($1\,\text{AU}{=}150{\cdot}10^6\,\text{km}$).

Dodejme, že ačkoliv na počátku 70. let měla hypotéza o existenci Nemesis značný počet zastánců, dnes se k ní naprostá většina astrofyziků staví odmítavě. Důvodů je hned několik, uveďme alespoň nejdůležitější z nich. Oběžná dráha Nemesis by byla ovlivněna gravitačním působením blízkých hvězd a byla by proto velmi nestabilní – Nemesis by se na ní udržela pravděpodobně pouze několik oběhů. Podrobnějším rozbor paleontologických výzkumů také ukázal, že období vymírání živočišných druhů nevykazují přesnou periodicitu, takže zmizel hlavní důvod, kvůli kterému byla hypotéza o Nemesis vyslovena.

Úloha 2.20[17]

V roce 1844 vynikající německý matematik a astronom Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) zjistil, že nejjasnější hvězda na obloze, Sírius ze souhvězdí Velkého psa (u nás je dobře pozorovatelný v zimních měsících), mění svou polohu na obloze s periodou $T = 50\,\text{let}$, maximální úhlová výchylka od střední polohy přitom činí $\alpha = 2{,}3''$. Bessel vysvětlil tento pohyb existencí další hvězdy – hvězdného souputníka, se kterou Sírius obíhá kolem společného těžiště. O 18 let později americký optik Alvan Clark (1804–1887), zakladatel známé firmy na výrobu objektivů a dalekohledů, při zkoušce jednoho z objektivů tuto druhou hvězdu skutečně našel a potvrdil, že Sírius je ve skutečnosti dvojhvězdou. Hvězdný průvodce Síria označovaný jako Sírius B se stal prvním známým *bílým trpaslíkem*, tj. velmi slabě zářící, kompaktní hvězdou (jeho hustota se dnes odhaduje na $1{,}25{\cdot}10^8\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^{-3}$). Jaká je hmotnost m_{SB} Síria B, jestliže hmotnost „hlavní“ hvězdy, Síria A je $m_{\text{SA}} = 2{,}3\,M_{\odot}$? Vzdálenost Země–Slunce je ze Síria vidět pod úhlem $\beta = 0{,}376''$. Trajektorie obou hvězd považujte za kružnice, předpokládejte, že rovina jejich pohybu je kolmá na spojnici Síria A a sluneční soustavy.

[17] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Řešení:

Vzdálenost l dvojhvězdy určíme z úhlu β; $\operatorname{tg}\beta = 1\,\mathrm{AU}/l$ a proto $l = 1\,\mathrm{AU}/\operatorname{tg}\beta \approx 549\,000\,\mathrm{AU} \approx 8{,}69\,\mathrm{ly} \approx 8{,}23{\cdot}10^{16}\,\mathrm{m}$. Obíhají-li obě hvězdy kolem společného těžiště po kruhových trajektoriích, plní úlohu dostředivé síly vzájemné gravitační působení obou hvězd. Porovnáním velikostí dostředivé a gravitační síly pro pohyb Síria A dostáváme

$$m_{\mathrm{SA}}\omega^2 r_{\mathrm{SA}} = \frac{\varkappa m_{\mathrm{SA}} m_{\mathrm{SB}}}{r^2}, \tag{2.20.1}$$

kde $\omega = 2\pi/T$ je úhlová rychlost, s níž obě hvězdy obíhají okolo společného těžiště, r_{SA}, resp. r_{SB} (použito dále), značí vzdálenosti Síria A, resp. Síria B od tohoto těžiště a $r = r_{\mathrm{SA}} + r_{\mathrm{SB}}$ vzdálenost obou hvězd. Zároveň platí

$$\frac{r_{\mathrm{SA}}}{r_{\mathrm{SB}}} = \frac{m_{\mathrm{SB}}}{m_{\mathrm{SA}}}$$

a také

$$r = \frac{m_{\mathrm{SA}} + m_{\mathrm{SB}}}{m_{\mathrm{SB}}} r_{\mathrm{SA}}.$$

Dosazením do (2.20.1) a po úpravě vychází

$$\omega^2 r_{\mathrm{SA}}^3 \left(m_{\mathrm{SA}} + m_{\mathrm{SB}}\right)^2 = \varkappa m_{\mathrm{SB}}^3.$$

Označíme-li $k = m_{\mathrm{SB}}/m_{\mathrm{SA}}$ poměr hmotností obou hvězd, získáme kubickou rovnici

$$a\left(1+k\right)^2 = k^3, \tag{2.20.2}$$

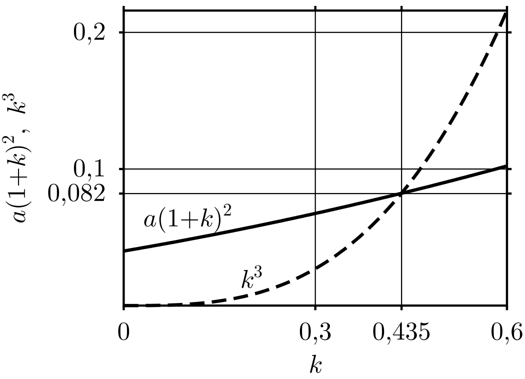
kde

$$a = \frac{\omega^2 r_{\mathrm{SA}}^3}{m_{\mathrm{SA}}\varkappa}.$$

K určení konstanty a zbývá vypočítat poloměr kružnice, po níž se pohybuje Sírius A, tj. r_{SA}. Jeho velikost určuje úhel α, neboť $\operatorname{tg}\alpha = r_{\mathrm{SA}}/l$, takže $r_{\mathrm{SA}} \approx 6{,}12\,\mathrm{AU} \approx 9{,}18{\cdot}10^{11}\,\mathrm{m}$. Po dosazení potom dostáváme $a \approx 0{,}0399$. Řešení kubické rovnice (2.20.2) dává jediný reálný kořen

$$\begin{aligned} k \quad = \quad & \left(\frac{a^2}{3} + \frac{a}{2} + \frac{a^3}{27} + \frac{a\sqrt{3}}{18}\sqrt{4a+27}\right)^{1/3} + \\ & + \frac{\dfrac{2a}{3} + \dfrac{a^2}{9}}{\left(\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a}{2} + \dfrac{a^3}{27} + \dfrac{a\sqrt{3}}{18}\sqrt{4a+27}\right)^{1/3}} + \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Po dosazení zjistíme, že $k = m_{\mathrm{SB}}/m_{\mathrm{SA}} \approx 0{,}435$, odkud plyne, že $m_{\mathrm{SB}} \approx M_{\odot}$; hmotnost Síriova souputníka je přibližně rovna hmotnosti Slunce. To samozřejmě není úplně náhodné; také naše Slunce by se zhruba za 5 miliard let mělo stát bílým trpaslíkem a podle astrofyzikálních modelů hmotnost bílých trpaslíků nepřevyšuje $1{,}4\,M_\odot$ (tzv. *Chandrasekharova mez*). Pozorujeme-li Síria B, díváme se tak trochu do budoucnosti naší vlastní hvězdy.

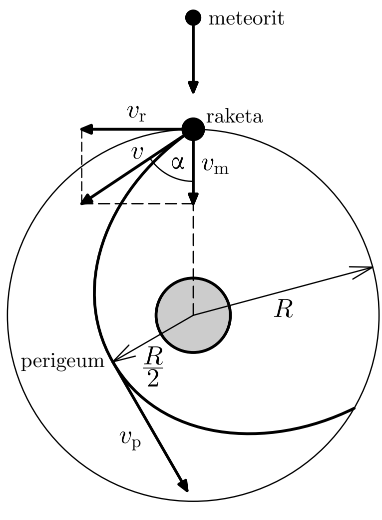


Obr. 2.28: K řešení úlohy 2.20

Dodejme, že číselnou hodnotu poměru k lze samozřejmě odhadnout i z grafického řešení rovnice (2.20.2). Vykreslíme-li obě strany rovnice (2.20.2) jako funkce proměnné k (viz obr. 2.20), odečteme z obrázku hodnotu $k \approx 0{,}44$ v souladu s výše uvedeným přesným numerickým řešením.

Úloha 2.21[18]

Meteorit, který se měl čelně srazit se Zemí (letěl po přímce procházející středem Země) narazil do družice pohybující se okolo Země po kruhové trajektorii s poloměrem R. Po nepružné srážce zůstal meteorit v družici, která přešla po srážce na novou trajektorii, jejíž perigeum leží ve vzdálenosti $R/2$ od středu Země. Označíme-li hmotnost Země M_Z a je-li hmotnost družice 10-krát větší než hmotnost meteoritu, určete rychlost meteoritu před srážkou.



Obr. 2.29: K řešení úlohy 2.21

Řešení:

Při řešení využijeme hned tři zákony zachování. Označme rychlosti meteoritu a družice před srážkou v_m a $v_d = \sqrt{\varkappa M_Z/R}$, počáteční rychlost tělesa vzniklého srážkou v, rychlost tohoto tělesa v perigeu v_p a jeho hmotnost M. Podle zadání $M = 11m$, kde m je hmotnost meteoritu.

[18] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Ze zákona zachování energie pro pohyb tělesa vzniklého srážkou dostáváme

$$\frac{1}{2}v_{\mathrm{p}}^2 - \frac{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{R/2} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\varkappa M_Z}{R}. \tag{2.21.1}$$

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ v libovolném bodě trajektorie je dán vektorovým součinem $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor (vztažený ke středu Země) a $\boldsymbol{p}$ hybnost tělesa. Pro jeho velikost vychází $L = rp \sin \alpha$, kde α je úhel sevřený vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$ (obr. 2.29). Podle zákona zachování momentu hybnosti (v místě srážky a v perigeu nové trajektorie) platí

$$\frac{R}{2}v_{\mathrm{p}} = Rv \sin \alpha. \tag{2.21.2}$$

Vyloučením v_{p} z (2.21.1) a (2.21.2) obdržíme

$$v^2 \left(4 \sin^2 \alpha - 1\right) = \frac{2\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{R}. \tag{2.21.3}$$

Známe tak rychlost v tělesa vzniklého srážkou. Její velikost určíme z počátečních rychlostí meteoritu v_{m} a družice v_{d}. Protože $v_{\mathrm{m}} \perp v_{\mathrm{d}}$, platí pro průměty rychlosti v do radiálního a azimutálního směru (směru tečny ke kružnici, po níž se pohyboval před srážkou družice)

$$v_{\mathrm{r}} = \frac{m}{11m}v_{\mathrm{m}} = \frac{v_{\mathrm{m}}}{11}, \qquad v_\varphi = \frac{10}{11}\sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{R}}.$$

Pro velikost v tak získáváme

$$v^2 = v_{\mathrm{r}}^2 + v_\varphi^2 = \frac{v_{\mathrm{m}}^2}{121} + \frac{100}{121}\frac{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{R}.$$

Po dosazení do (2.21.3) pro rychlost meteoritu vychází

$$v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{58\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{R}}.$$

2.4 Mechanika kapalin a plynů

Úloha 2.22[19]

Do jaké hloubky je třeba ponořit do vody tenkostěnnou kádinku obrácenou dnem vzhůru, aby se „utopila“ (klesla ke dnu). Hmotnost kádinky je $m = 100\,\mathrm{g}$, její objem $V = 200\,\mathrm{ml}$, atmosférický tlak $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

Řešení:

Kádinka se potopí, bude-li *průměrná* hustota kádinky větší než hustota vody. Bude-li kádinka ponořena, pak díky hydrostatickému tlaku bude vzduch v kádince

[19] Autorem úlohy je Radek Horenský.

stlačen a část V' objemu kádinky bude vyplněna vodou (viz obr. 2.30). Mají-li vzduch i voda stejnou teplotu, pak se při ponořování kádinky teplota vzduchu uvnitř mění jen nepatrně (sklo je špatný vodič, takže zahřívání rukou je zanedbatelné). Platí tedy Boylův-Mariottův zákon pro izotermický děj

$$pV = \text{konst.},$$

neboli

$$p_0 V = (p_0 + h\varrho g)(V - V'). \tag{2.22.1}$$

Objem V' určíme z Archimedova zákona. V mezním případě, kdy průměrná hustota kádinky bude rovna průměrné hustotě vody, již kádinka nevyplave nahoru. Zanedbáme-li hmotnost vzduchu v kádince a uvážíme-li, že hmotnost vody v kádince je $m_{\text{vody}} = V'\varrho$, pak pro průměrnou hustotu kádinky ϱ_{k} dostaneme

$$\frac{m + V'\varrho}{V} = \varrho_{\text{k}}$$

a ta musí být rovna hustotě vody ϱ (mezní případ – vznášení), tedy

$$\frac{m + V'\varrho}{V} = \varrho.$$

Pro V' pak vychází

$$V' = \frac{V\varrho - m}{\varrho}$$

a po dosazení do (2.22.1) získáváme

$$p_0 V = (p_0 + h\varrho g)\left(V - \frac{V\varrho - m}{\varrho}\right), \qquad p_0 V\varrho = (p_0 + h\varrho g)m.$$

Pro výšku h potom obdržíme

$$h = \frac{p_0(V\varrho - m)}{m\varrho g}$$

a po dosazení číselných hodnot určíme

$$h = \frac{10^5\,\text{Pa}\left(2{\cdot}10^{-4}\,\text{m}\ \cdot\ 10^3\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^{-3} - 0{,}1\,\text{kg}\right)}{0{,}1\,\text{kg}\ \cdot\ 10^3\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^{-3}\ \cdot\ 9{,}81\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}} = 10{,}193\,68\,\text{m} \approx 10{,}19\,\text{m}.$$

Úloha 2.23[20]

K lovu mořských živočichů je možné použít vzduchové harpunové pušky, v jejímž válci je vzduch pod velkým tlakem. Uvažujte takovou pušku s délkou hlavně 1,5 m ráže 2,54 cm (tento vnitřní průměr hlavně, odpovídá anglické délkové míře 1 palec). Nad hladinou je harpuna o hmotnosti 2 kg vymrštěna z hlavně rychlostí 25 m·s^{-1}.

[20]Zpracováno podle časopisu *Kvant.*

V jaké největší hloubce pod mořskou hladinou může potápěč z této pušky ještě vystřelit? Pohyb harpuny v hlavni považujte za rovnoměrně zrychlený.

Řešení:

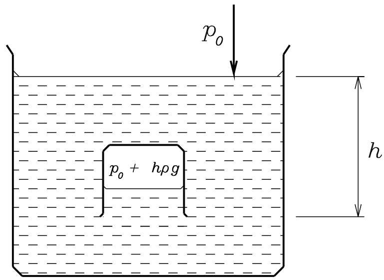
Na harpunu působí v okamžiku výstřelu proti sobě dvě síly: tlaková síla vody a tlaková síla stlačeného vzduchu. Je-li tlaková síla vody větší než tlaková síla vzduchu, střela vůbec nevyletí, v opačném případě vyletí rychlostí menší než nad hladinou. V maximální hloubce, v níž lze ještě vystřelit, musí být tlaková síla vzduchu v hlavni přibližně rovna tlakové síle vody.

Je-li vzduch v hlavni pod stálým tlakem, potom při vystřelení harpuny vykoná práci

$$W = p\Delta V = p\frac{\pi d^2}{4}l,$$

která se přemění na kinetickou energii harpuny

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2.$$



Obr. 2.30: K řešení úlohy 2.22

Protože platí

$$E_\mathrm{k} = W \qquad \text{neboli} \qquad \frac{1}{2}mv^2 = p\frac{\pi d^2}{4}l,$$

vychází pro přetlak p v hlavni

$$p = \frac{2mv^2}{\pi d^2 l}. \tag{2.23.1}$$

Víme, že tento přetlak musí být větší než hydrostatický tlak p_h vody v hloubce h pod hladinou

$$p_\mathrm{h} = h\varrho g.$$

Porovnáním s (2.23.1) dostáváme

$$p > p_\mathrm{h}, \qquad \frac{2mv^2}{\pi d^2 l} > h\varrho g,$$

a odtud

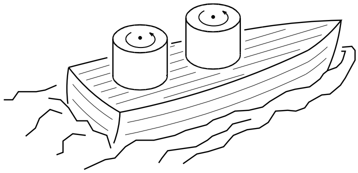
$$h < \frac{2mv^2}{\pi d^2 l \rho g} \approx 83\,\mathrm{m}.$$

Z harpunové pušky je možné vystřelit v hloubce maximálně 83 m.

Úloha 2.24[21]

a) Z papíru si vyrobte válec o výšce 25 cm a průměru základen 5 cm. Potom umístěte válec na nakloněnou rovinu (její spodní konec musí být ve vzduchu v dostatečné výšce nad podlahou) a nechte jej volně se odvalovat dolů. Jaký tvar má trajektorie válce poté, co dosáhne spodního konce nakloněné roviny? Průběh pokusu vysvětlete.

[21] Inspirováno články Antonína Vančury: *Bernoulliho rovnice Část I a II*, Čs. čas. fyz. **43** (1993), s. 156 a 226.

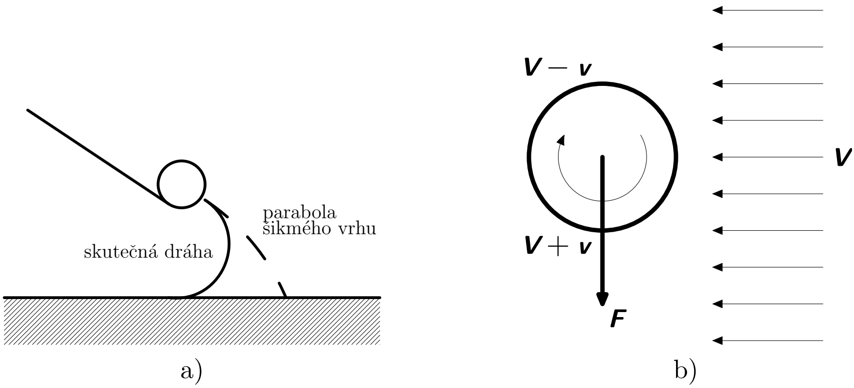


Obr. 2.31: K zadání úlohy 2.24

b) Na základě předcházejícího pokusu vysvětlete princip lodi sestrojené Antonem Flettnerem (1885–1961) v letech 1924–1925. Jeho loď je poháněna větrem, ale místo plachet jsou na ní postaveny velké svislé válce (obr. 2.31), které se rychle otáčejí pomocí zvláštního stroje. Jaký směr větru vzhledem ke jejímu kurzu je pro loď nejvýhodnější?

Řešení:

Oba zdánlivě odtažité pokusy spolu velmi úzce souvisí – jedná se o konkrétní projevy tzv. *Magnusova jevu.*[22] Jeho vysvětlení spočívá v Bernoulliově rovnici pro proudění tekutin, konkrétně vzduchu. Je známo, že v místech, kde tekutina proudí rychleji, naměříme menší tlak a naopak. V tom je klíč i k řešení naší úlohy.



Obr. 2.32: K řešení úlohy 10

a) Pozorováním snadno zjistíme, že válec se od konce nakloněné roviny nepohybuje po parabole (tj. dráze šikmého vrhu) „jak bychom očekávali“, ale stáčí se směrem pod nakloněnou rovinu (obr. 2.32a), nelze to vysvětlit pouze odporem vzduchu. Situaci snáze pochopíme, představíme-li si namísto valícího se válce válec otáčející se v proudu vzduchu (fyzikálně řečeno, pokus popíšeme v soustavě spojené

[22] Berlínský fyzik Heinrich Gustav Magnus (1802 - 1870) se v roce 1852 zabýval vlivem rotace střely na její balistickou dráhu. Zjistil, že na rotující válec ofukovaný proudem vzduchu kolmým k ose otáčení působí síla kolmá jak k ose otáčení, tak k proudu vzduchu; proto nese jev jeho jméno.

s osou válce). Nechť se válec otáčí po směru hodinových ručiček a proud vzduchu ho obtéká zprava doleva (obr. 2.32b). Otáčení válce způsobuje, že na dolní straně je proud vzduchu urychlován (směr proudění je shodný se směrem otáčení válce), zatímco na horní straně je zpomalován. Vzduch na horní straně válce tak proudí pod větším tlakem a vzniká tlaková síla směrem dolů, obecně kolmo na směr proudícího vzduchu a osu otáčení válce. Proto i v našem pokusu je válec vychylován ve směru kolmém na parabolu, po které by se pohyboval hmotný bod pod vlivem tíhové síly ve vakuu.

b) Princip již známe a Flettnerova loď představuje praktické využití tohoto jevu. Má motory, které otáčejí válci a rozdíl tlaků působících na opačné strany válců uvádějí loď do pohybu. Vidíme, že nejvýhodnější vítr pro pohyb lodi je boční. Otáčejí-li se válce proti směru hodinových ručiček jako na obr. 2.31, měl by vítr foukat z pravoboku.

Situací, kdy se v běžném životě setkáváme s Magnusovým jevem je mnohem víc, uveďme ještě např. fotbalistu kopajícího do balónu tzv. „falší“. Balón díky rotaci zahýbá a proto je pro brankáře velmi nesnadné vystihnout jeho směr a chytit ho.

Kapitola 3

Molekulová fyzika a termika

3.1 Ideální plyny

Úloha 3.1[1]

Válcová nádoba je pístem rozdělená na dvě části, v každé je jeden mol ideálního jednoatomového plynu. Zatímco plyn v levé části udržujeme při konstantní teplotě, plyn v pravé části můžeme zahřívat. Pro malou změnu teploty určete tepelnou kapacitu plynu v pravé části, je-li píst na počátku právě v polovině nádoby. Předpokládejte, že píst nevede teplo.

Řešení:
Počáteční stav plynu v *pravé* části nechť je dán tlakem p_1, objemem V_1 a teplotou T_1. Stavová rovnice pro plyn v pravé části má potom tvar

$$p_1 V_1 = RT_1, \tag{3.1.1}$$

neboť v obou částech nádoby je jeden mol plynu. Po dodání tepla ΔQ plynu v pravé části platí analogicky

$$(p_1 + \Delta p_1)(V_1 + \Delta V_1) = R(T_1 + \Delta T_1).$$

Přihlédneme-li k rovnici (3.1.1) a zanedbáme člen $\Delta p_1 \Delta V_1$ na pravé straně, dostaneme

$$p_1 \Delta V_1 + \Delta p_1 V_1 = R\Delta T_1. \tag{3.1.2}$$

Teplota plynu v *levé* části se nemění ($\Delta T_2 = 0$) a obdobným postupem proto dospějeme k rovnici

$$p_2 \Delta V_2 + \Delta p_2 V_2 = 0. \tag{3.1.3}$$

Protože na počátku byl píst v rovnováze, musel být v obou částech nádoby stejný tlak $p_1 = p_2 = p$. Tatáž podmínka musí platit i po dodání tepla ΔQ do pravé části: $p_1 + \Delta p_1 = p_2 + \Delta p_2$, neboli $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p$. Vzhledem k tomu, že $V_1 + V_2 = V =$ konst., je také $\Delta V_1 = -\Delta V_2$ a rovnice (3.1.2) a (3.1.3) můžeme psát ve tvaru

$$p\Delta V_1 + V_1 \Delta p = R\Delta T_1,$$

$$-p\Delta V_1 + V_2 \Delta p = 0.$$

[1] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Vyloučením Δp dostaneme

$$p\Delta V_1 \left(V_1 + V_2\right) = R\Delta T_1 V_2,$$

$$p\Delta V_1 = \frac{R\Delta T_1}{1 + V_1/V_2}. \tag{3.1.4}$$

Podle obecné definice tepelné kapacity také platí

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T_1}.$$

Zapišme nyní 1. větu termodynamickou pro plyn v pravé části

$$\Delta Q = C\Delta T_1 = \Delta U_1 + p\Delta V_1.$$

Změna vnitřní energie 1 molu jednoatomového ideálního plynu $\Delta U_1 = (3/2)R\Delta T_1$ a po dosazení za $p\Delta V_1$ z (3.1.4) dojdeme ke vztahu

$$C = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1 + V_1/V_2}.$$

V našem případě $V_1 = V_2$ a tudíž

$$C = \frac{3}{2}R + \frac{1}{2}R = 2R.$$

Úloha 3.2[2]

Ideální plyn měl v počátečním stavu teplotu T_0. Potom se zmenšil jeho tlak 2krát a zároveň se zvětšil jeho objem tak, že tlak závisel na objemu lineárně a výsledná teplota byla opět T_0. Jakou maximální teplotu jsme mohli v průběhu děje naměřit?

Řešení:

Tlak p, teplota T a objem V ideálního plynu jsou vázány stavovou rovnicí

$$pV = nRT, \tag{3.2.1}$$

kde n je látkové množství a R molární plynová konstanta. Označíme-li počáteční tlak a objem p_0 a V_0, potom lineární závislost tlaku na objemu bude mít tvar

$$p = p_0 - a\left(V - V_0\right), \tag{3.2.2}$$

kde a je kladná konstanta. Dosazením ze stavové rovnice (3.2.1) zjišťujeme, že teplota musí být kvadratickou funkcí objemu

$$nRT = \left(p_0 + aV_0\right)V - aV^2; \tag{3.2.3}$$

znázornění této závislosti je na obr. 3.1. Je zřejmé, že při teplotách menších než maximální teplota T_m odpovídají dané teplotě dvě možné hodnoty objemu, maximální

[2] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

hodnotě pouze jedna. Kvadratická rovnice (3.2.3) má vzhledem k objemu pouze jedno řešení, je-li její diskriminant roven nule

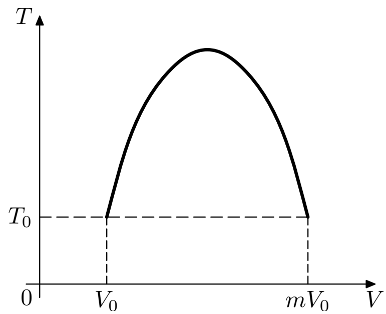
$$(p_0 + aV_0)^2 - 4anRT_\mathrm{m} = 0,$$

odkud

$$T_\mathrm{m} = \frac{(p_0 + aV_0)^2}{4anR}.$$

Je-li v konečném stavu tlak plynu $m$krát menší a teplota stejná jako na počátku, musí být objem $m$krát větší než v počátečním stavu. Z (3.2.2) dostáváme $a = p_0/(mV_0)$ a ze stavové rovnice plyne $nR = p_0V_0/T_0$, takže

$$T_m = \frac{(m+1)^2 T_0}{4m} = \frac{9T_0}{8}.$$



Obr. 3.1: K řešení úlohy 3.2

Úloha 3.3[3]

Jakou hmotnost musí mít těleso tvaru koule o poloměru $r = 1\,\mathrm{m}$, aby se mohlo vznášet v atmosféře Venuše? V atmosféře této planety převažuje oxid uhličitý CO_2, tlak v blízkosti povrchu planety je $p_0 = 9\,\mathrm{MPa}$, teplota $t = 527\,°\mathrm{C}$. Molární plynová konstanta $R_\mathrm{m} = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$. Gravitační pole v blízkosti povrchu planety považujte za homogenní, oxid uhličitý v atmosféře Venuše za ideální plyn.

Řešení:

Podle Archimedova zákona platí

$$Mg_\mathrm{V} \leqq \varrho g_\mathrm{V} V_\mathrm{n},$$

kde g_V je tíhové zrychlení na povrchu Venuše, ϱ hustota atmosféry a $V_\mathrm{n} = 4\pi r^3/3$ objem hledané koule. Hustotu atmosféry určíme pomocí stavové rovnice ideálního plynu

$$p_0 V = \frac{m}{M_\mathrm{m}} R_\mathrm{m} T,$$

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{p_0 M_\mathrm{m}}{R_\mathrm{m} T}.$$

Molární hmotnost M_m oxidu uhličitého CO_2 zjistíme pomocí relativních atomových hmotností uhlíku a kyslíku

$$M_\mathrm{m} = (1 \cdot 12 + 2 \cdot 16) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}} = 44 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}.$$

Pro hmotnost tělesa proto vychází

$$M \leqq \varrho V = \frac{p_0 M_\mathrm{m}}{R_\mathrm{m} T} \frac{4}{3} \pi r^3 \approx 249\,\mathrm{kg}.$$

[3] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

3.2 Teplo a práce

Úloha 3.4[4]

Stěnami chladničky pronikne za hodinu $Q = 800\,\mathrm{kJ}$ tepla. Teplota v místnosti je $t_1 = +20\,^\circ\mathrm{C}$, teplota uvnitř chladničky $t_2 = 5\,^\circ\mathrm{C}$. Jaký minimální příkon odebírá chladnička ze sítě? Jak musíme nejméně zvýšit příkon chladničky, chceme-li v ní za hodinu ochladit 2 lahve minerální vody Ondrášovka o objemu 0,7 l z teploty místnosti na 5 °C? Měrné teplo skla je $c_s = 0{,}8\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, hmotnost prázdné lahve 0,4 kg.

Řešení:

Činnost chladničky je v podstatě obrácením činnosti tepelného stroje: odnímá teplo Q_2 chladiči (vnitřní prostor chladničky) a odevzdává teplo Q_1 ohřívači (vzduch místnosti). K tomu nutně musíme dodat práci W, nejčastěji na úkor elektrické energie ze sítě. Pro tepelnou účinnost platí (viz např. [1], s. 110)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{W}{W + Q_2} \leqq \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Znaménko nerovnosti vyjadřuje skutečnost, že účinnost skutečného tepelného stroje bude vždy menší než u ideálního Carnotova cyklu. V našem případě je z vnitřního prostoru potřeba odčerpat teplo, které proniká dovnitř stěnami, tj. $Q_2 = 800\,\mathrm{kJ}$ a pro účinnost η můžeme psát

$$\eta \leqq \frac{293 - 278}{293} \approx 5{,}12\,\%.$$

Pro práci W, kterou je nutné dodat z elektrické sítě pak vychází

$$W \geqq \frac{\eta}{1 - \eta}\, Q_2 \approx 43\,\mathrm{kJ}.$$

Příkon P_0 pak již snadno zjistíme podle vztahu (čas $t = 1\,\mathrm{h}$)

$$P_0 \geqq \frac{W}{t} \approx 12\,\mathrm{W}.$$

K ochlazení jedné lahve Ondrášovky o $\Delta t = 15\,^\circ\mathrm{C}$ musíme odebrat teplo

$$Q_\mathrm{L} = (m_\mathrm{s} c_\mathrm{s} + m_\mathrm{v} c_\mathrm{v})\Delta t,$$

kde $m_\mathrm{s} = 0{,}4\,\mathrm{kg}$, $m_\mathrm{v} = 0{,}7\,\mathrm{kg}$, $c_\mathrm{s} = 800\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ a $c_\mathrm{v} = 4180\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ jsou po řadě hmotnosti a měrná tepla skla a vody. Celkem je tedy za hodinu nutné z chladničky odčerpat teplo

$$Q_2' = Q_2 + 2Q_\mathrm{L} \approx 897{,}4\,\mathrm{kJ}.$$

[4] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Pro odpovídající práci W' potom analogicky s první částí příkladu dostaneme

$$W' \geqq \frac{\eta}{1-\eta}\, Q_2' \approx 48\,\mathrm{kJ}$$

a příkon P_0' pak vychází

$$P_0' \geqq 13{,}4\,\mathrm{W}.$$

Příkon chladničky je nutné zvýšit minimálně o 1,4 W. Vzhledem k tomu, že jsme zanedbali množství teplého vzduchu, které vnikne do chladničky ve chvíli, kdy do ní budeme ukládat lahve, měli bychom příkon určitě zvýšit ještě více.

Úloha 3.5[5]

Při práci mikroprocesoru se uvolňuje poměrně velké teplo. V praxi můžeme zrychlit práci procesoru tím, že zvýšíme jeho tzv. taktovací frekvenci; zvětší se tím však i uvolňované teplo (zhruba lze říci, že jsou si tyto veličiny úměrné). Aby se předešlo velkému přehřívání procesoru, je obklopen kovovým obalem s velkým povrchem, jenž plní obdobnou úlohu jako radiátor a usnadňuje výměnu tepla s okolním vzduchem. Teplota procesoru v počítači IBM byla 95 °C, teplota kovového „radiátoru“ 50 °C a teplota vzduchu uvnitř počítače 30 °C. Poté se pomocí speciální pasty s vysokou tepelnou vodivostí podařilo zlepšit tepelný kontakt mikroprocesoru s „radiátorem“ a teplota mikroprocesoru se zmenšila na 65 °C. Kolikrát nyní můžeme zvýšit pracovní frekvenci mikroprocesoru, jestliže jeho teplota nesmí přesáhnout 95 °C? Předpokládejte, že teplota vzduchu uvnitř počítače stejně jako podmínky tepelné výměny se přitom nezmění.

Řešení:
a) (podle Petra Mazance ze Sušice)
Zlepšením tepelného kontaktu se zvýší teplota radiátoru. Zvýšíme-li pracovní frekvenci mikroprocesoru $k$krát, vzroste úměrně i množství uvolněného tepla. Hledejme nejprve novou teplotu radiátoru t_x. Protože teplota okolního vzduchu se nemění, musí rozdíl teplot mezi radiátorem a okolním vzduchem $t_\mathrm{x} - 30$ vzrůst ve stejném poměru jako rozdíl mezi teplotou mikroprocesoru a radiátoru $95 - t_\mathrm{x}$. Vzhledem k podmínkám před zvýšením pracovní frekvence mikroprocesoru musí platit

$$(95 - t_\mathrm{x}) : (65 - 50) = (t_\mathrm{x} - 30) : (50 - 30).$$

Z rovnice vypočteme teplotu radiátoru

$$t_\mathrm{x} = 67{,}1\,^\circ\mathrm{C}.$$

Bude tedy

$$k = \frac{67{,}1 - 30}{50 - 30} \approx 1{,}86.$$

Pracovní frekvenci mikroprocesoru můžeme zvýšit asi 1,8krát.

[5] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

b) (podle řešení Vítězslava Kudy ze Strážnice)
Tento výsledek odvodíme jednoduše také ze skutečnosti, že tepelný výkon mikroprocesoru může vzrůst tolikrát, kolikrát se zvětší rozdíl teplot mezi mikroprocesorem a vzduchem

$$k = \frac{95 - 30}{65 - 30} = 1{,}86.$$

Úloha 3.6[6]

Vojtěch Všechnosmíchal si vypůjčil ve fyzikálním kabinetě dvě tepelně izolované nádoby, aby mohl spolužačce Lucii názorněji vysvětlit měření kalorimetrem a tepelnou výměnu. Cestou do školy ho napadl následující pokus. Do první nádoby nalil 5 l vody o teplotě $t_1 = 60\,°\mathrm{C}$, do druhé 1 l vody o teplotě $t_2 = 20\,°\mathrm{C}$. Z první nádoby přelil jeden plný hrníček do druhé, počkal, až se ve druhé nádobě ustálí teplota, a poté vrátil stejné množství z druhé nádoby do první, takže v obou bylo stejně vody jako na začátku pokusu. Po ustálení tepelné rovnováhy naměřil v první nádobě teplotu $t = 59\,°\mathrm{C}$. Potom položil Lucce záludnou otázku: jaký objem měl hrneček, kterým přeléval vodu? Dokázali byste Lucce poradit?

Řešení:

Označme $V_1 = 5\,\mathrm{l}$, $V_2 = 1\,\mathrm{l}$ objemy jednotlivých nádob a V hledaný objem hrníčku. Protože v obou nádobách i v hrníčku se nachází pouze voda. Po přelití hrníčku teplé vody do druhé nádoby se v této nádobě ustálí teplota t_3, pro kterou platí

$$V\left(t_1 - t_3\right) = V_2\left(t_3 - t_2\right).$$

Odtud

$$t_3 = \frac{Vt_1 + V_2t_2}{V + V_2}.$$

Analogicky po přelití hrníčku vody o teplotě t_3 zpět do první nádoby má kalorimetrická rovnice tvar

$$\left(V_1 - V\right)\left(t_1 - t\right) = V\left(t - t_3\right).$$

Dosadíme-li za t_3 a vyjádříme objem V, dostaneme

$$V = \frac{V_1V_2\left(t_1 - t\right)}{V_2\left(t - t_2\right) - \left(V_1 - V_2\right)\left(t_1 - t\right)} = \frac{1}{7}\,\mathrm{l} \approx 1{,}4\,\mathrm{dl}.$$

3.3 Kapilární jevy

Úloha 3.7

Pavel zůstal „po škole“ ve fyzikální laboratoři a z dlouhé chvíle si vymyslel následující pokus. Na stole našel kapilární trubici, kterou držel ve svislém směru a

[6] Zpracováno podle časopisu *Kvant.*

pomalu ponořil do umyvadla s vodou tak, že nad hladinou vyčnívala část trubice o délce $l = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Voda v trubici vyšplhala do výšky $l/2 = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Potom horní konec kapiláry těsně ucpal žvýkačkou a ponořoval celou trubici do vody tak dlouho, dokud hladina vody v kapiláře neklesla na úroveň hladiny vody v umyvadle. Učitel fyziky, jenž se právě v té chvíli vrátil, Pavla pochválil, odečetl na barometru tlak vzduchu $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$ a zeptal se, zda by Pavel bez dalšího měření dovedl říci, jak dlouhá je část trubice vyčnívající na konci pokusu nad hladinu. Pavel se nedal zaskočit, chvíli počítal a potom nahlásil správný výsledek. Jaká byla Pavlova odpověď?

Řešení:

V úvodu pokusu, dříve než Pavel ucpal horní konec kapiláry žvýkačkou, byla síla povrchového napětí vyrovnána tíhovou silou sloupce kapaliny v kapiláře. To znamená, že hydrostatický tlak p_h musí být roven tlaku p_1 vyvolanému povrchovým napětím

$$p_\mathrm{h} = p_1 = \frac{l}{2}\rho g.$$

Ve druhé části pokusu, kdy Pavel ucpal horní konec kapiláry a ponořil kapiláru do vody, se změnil tlak vzduchového sloupce v kapiláře, neboť vzduch v uzavřené kapiláře byl postupně stlačován. Zanedbáme-li teplo dodané potící se Pavlovou rukou (sklo je špatný vodič tepla), můžeme stlačování vzduchu v trubici s dostatečnou přesností považovat za izotermický děj. Počáteční tlak p_0 a objem $V_0 = lS/2$ se změnily na hodnoty p_2 a $V_2 = hS$, kde S je obsah průřezu kapiláry a h hledaná délka části trubice vyčnívající nad hladinu. Podle Boyle-Mariottova zákona

$$p_0V_0 = p_2V_2,$$

odkud

$$p_2 = \frac{l}{2h}p_0.$$

Tlak p_2 vzduchového sloupce v kapiláře je vyrovnán atmosférickým tlakem p_0 a tlakem p_1 vyvolaným povrchovým napětím, tj.

$$p_2 = p_0 + p_1$$

neboli

$$\frac{l}{2h}\,p_0 = p_0 + \frac{l}{2}\rho g.$$

Odtud získáme hledanou výšku h

$$h = \frac{l}{2\left(1 + \dfrac{\rho g l}{2p_0}\right)}$$

a po dosazení zadaných hodnot vypočteme

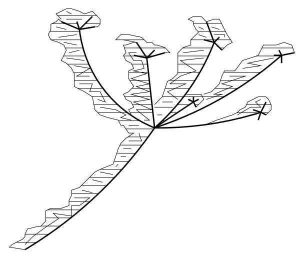
$$h = 9{,}9\,\mathrm{cm}.$$

Touto odpovědí udělal Pavel svému učiteli pochopitelně radost.

3.4 Změny skupenství, vlhkost vzduchu

Úloha 3.8[7]

Na podzim nebo v zimě, když je mlha, se větvičky stromů, keřů, dráty elektrického vedení apod. pokrývají jinovatkou nebo námrazou. Podívejte se na obrázek (obr. 3.2) nakreslený podle fotografie větvičky pokryté námrazou. I malý větřík může způsobit, že se jinovatka nebo námraza vytvoří tak, jak to ukazuje náš obrázek. Větvička byla vyfotografována za mrazivého rána, když byla hustá mlha, holomráz a vál *slabý* vítr. Je možné z této fotografie jednoznačně určit směr větru?



Obr. 3.2: K úloze 3.8

Řešení:

Nejprve je třeba si uvědomit, jaký je rozdíl mezi jinovatkou a námrazou. Jinovatkou nazýváme ledové krystalky, které se srážejí z vodních par v nasyceném vlhkém vzduchu, zatímco námraza vzniká z ochlazených kapiček mlhy. V našem případě přináší jednotlivé kapičky vítr a není-li příliš silný, usazují se na *návětrné* straně. Díky holomrazu potom rychle přimrzají. Proto jsme schopni určit z fotografie pravděpodobný směr větru – a to zleva doprava.

Při silnějším větru by tomu bylo obráceně; namrzlé krystalky by silným větrem byly strhávány a hromadily by se na závětrné straně, tak jak to krásně ukazují zimní fotografie z hřebenů hor.

Úloha 3.9[8]

Klimatizační zařízení má do budovy dodat objem $V = 10\,000\,\mathrm{m}^3$ vzduchu o teplotě $t_1 = 18\,°\mathrm{C}$ a relativní vlhkosti $\varphi_1 = 50\,\%$. Zařízení přitom nasává vzduch přímo z ulice, kde je jeho teplota $10\,°\mathrm{C}$ a relativní vlhkost $\varphi_2 = 60\,\%$. Jaké množství vody se musí dodatečně vypařit do nasávaného vzduchu? Tlak nasycených par při teplotě t_1 je $p_1 = 2{,}1\cdot 10^3\,\mathrm{Pa}$, při teplotě t_2 je $p_2 = 1{,}2\cdot 10^3\,\mathrm{Pa}$.

Řešení:

Ze stavové rovnice určíme hmotnost nasycených par v objemu V při teplotě t_1 (v budově)

$$m_{\mathrm{n1}} = \frac{M_{\mathrm{m}} p_1 V}{RT_1}$$

a při teplotě t_2 (na ulici)

$$m_{\mathrm{n2}} = \frac{M_{\mathrm{m}} p_2 V}{RT_2},$$

[7]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.
[8]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

kde $M_{\mathrm{m}} = 0{,}018\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$ je molární hmotnost vody. Známe-li zároveň i relativní vlhkosti vzduchu φ, můžeme určit i skutečnou hmotnost vodních par obsažených v objemu V

$$m_1 = \varphi_1 m_{\mathrm{n}1}, \qquad m_2 = \varphi_2 m_{\mathrm{n}2}.$$

Rozdíl těchto hmotností určuje hledané množství vody, jež se musí do vzduchu dodatečně odpařit v klimatizačním zařízení

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{MV}{R}\left(\frac{\varphi_1 p_1}{T_1} - \frac{\varphi_2 p_2}{T_2}\right) \approx 23\,\mathrm{kg}.$$

Úloha 3.10[9]

Obyčejný kastrůlek naplňte vodou do výšky asi 3 cm od dna. Dnem vzhůru do něj postavte *těžší* sklenici (např. zavařovací), dejte na vařič a zahřívejte. Po uvedení do varu počkejte asi 5 minut, kastrůlek sundejte z vařiče a pozorujte, co se bude dít. Děj náležitě a přesně vysvětlete z fyzikálního hlediska.

Řešení:

Krátce poté, co sejmeme kastrůlek se sklenicí z vařiče, začne se voda nasávat do sklenice až zaplní její podstatnou část – většinou ve sklenici zůstane jen malá vzduchová bublina.

Zbývá tedy odpovědět na otázku, čím je nasávání vody do sklenice způsobeno. Je zřejmé, že příčinou nemůže být nic jiného než atmosférický tlak – tlak okolního vzduchu. Odhadnout rozdíl Δp tlaku vzduchu ve sklenici a okolního vzduchu není těžké. Jestliže voda ve sklenici vystoupila např. do výšky $h = 10\,\mathrm{cm}$, potom pro Δp vychází

$$\Delta p = \rho g h \approx 1000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 1000\,\mathrm{Pa}.$$

Proč je tlak vzduchu uvnitř sklenice menší? Každého jistě napadne, že zahříváním se vzduch ve sklenici rozpíná (zpod sklenice unikají bubliny) a po sundání z vařiče se opět ochlazuje, zmenšuje svůj objem a uvolněné místo se zaplňuje vodou.

Toto vysvětlení však zdaleka není úplné. Abychom se o tom přesvědčili, pokusme se číselně odhadnout výše popsaný efekt. Je-li objem sklenice $V = 200\,\mathrm{cm^3}$, počáteční teplota vzduchu před zahříváním $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ (tj. asi 27 °C), konečná teplota $T_2 = 373\,\mathrm{K}$ a atmosférický tlak $p \approx 100\,000\,\mathrm{Pa}$, můžeme určit hmotnost vzduchu, který zůstane po zahřátí ve sklenici:

$$pV = \frac{m_1}{M_{\mathrm{m}}} R T_1, \qquad pV = \frac{m_2}{M_{\mathrm{m}}} R T_2, \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{T_1}{T_2} \approx 0{,}8.$$

Po ochlazení na původní teplotu by tedy asi 80 % sklenice bylo naplněno vzduchem a pouze zbylých 20 % by bylo zaplněno vodou. Při pokusu však voda zaplní podstatnou část sklenice a navíc velmi rychle; ochlazení vzduchu ve sklenici na pokojovou teplotu by trvalo mnohem déle.

---

[9] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Chyba je v tom, že až dosud jsme nebrali v úvahu přítomnost vodních par. Po dobu varu se sklenice zaplňovala vodní parou, která se mísila se vzduchem a část ho vytěsnila ven. V okamžiku, kdy jsme sundávali kastrůlek z vařiče byla sklenice naplněna nasycenými vodními parami. Tlak nasycených vodních par v okolí bodu varu vody, tj. asi 100 °C, závisí velmi silně na teplotě; při ochlazení o 0,3 °C poklesne tlak téměř o 1 000 Pa. O této závislosti se můžeme přesvědčit prostřednictvím tabulky 1 (viz např. [3], s. 63):

Závislost tlaku sytých vodních par na teplotě v okolí teploty $t = 100\,°\mathrm{C}$

$t/°\mathrm{C}$	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
p/kPa	70,11	72,82	75,61	78,49	81,46	84,53	87,69	90,95	94,31	97,77	101,3

Nyní je zřejmé, proč téměř ihned po vypnutí vařiče dojde k výraznějšímu poklesu tlaku a voda začne zaplňovat sklenici. Proto bylo také nutné počkat po uvedení do varu asi 5 minut, aby se vypařilo dostatečné množství vody.

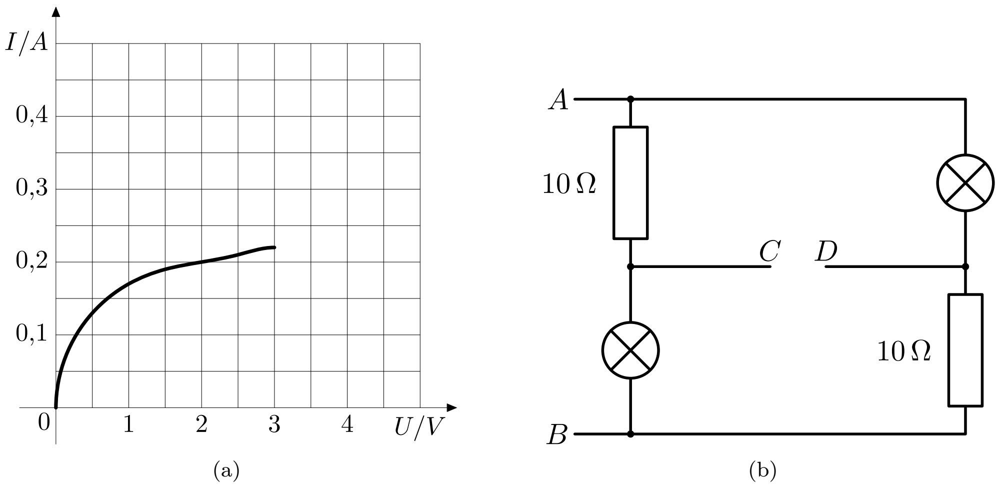
Kapitola 4

Elektřina a magnetismus

4.1 Elektrický náboj a elektrický proud

Úloha 4.1[1]

Výsledek měření voltampérové charakteristiky malé žárovky je znázorněn na obr. 4.1a; při napětí vyšším než 3 V se vlákno žárovky přepálí. Ze dvou takovýchto žárovek a dvou rezistorů o odporu $R = 10\,\Omega$ sestavíme obvod podle schématu na obr. 4.1b. K bodům A a B připojíme zdroj napětí, které budeme spojitě zvyšovat a zároveň odečítat napětí voltmetru připojeného mezi body C a D. Sestrojte graf závislosti napětí U_v naměřeného voltmetrem na napětí U_zd zdroje. Při jakém napětí zdroje se mohou vlákna žárovek přepálit? Odpor voltmetru je velmi velký ve srovnání s odporem žárovek i s odpory R.



Obr. 4.1: K zadání úlohy 4.1

Řešení:

Z voltampérové charakteristiky žárovky odečteme alespoň několik hodnot napětí a proudu, pro které následně dopočteme odpovídající napětí zdroje

[1] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

$U_ž$	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
$I_ž$	0,00	0,13	0,17	0,19	0,20	0,21	0,22

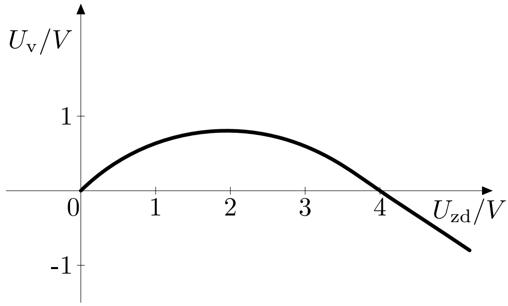
Je-li odpor voltmetru dostatečně veliký, pak můžeme proud protékající větví CD zanedbat. Schéma na obr. 4.1b potom odpovídá paralelnímu zapojení dvou stejných větví. Pro napětí zdroje U_{zd} můžeme psát

$$U_{zd} = RI_ž + U_ž.$$

Napětí U_v, které měříme voltmetrem, je dáno rozdílem napětí na odporu R a napětí žárovky, tj.

$$U_v = RI_ž - U_ž.$$

Nyní dopočteme hodnoty U_{zd} a U_v pro výše uvedené hodnoty $U_ž$ a $I_ž$ z předchozí tabulky



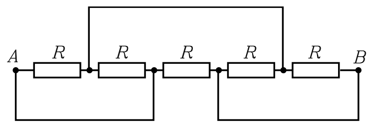
Obr. 4.2: K řešení úlohy 4.1

U_{zd}	0,00	1,80	2,70	3,40	4,00	4,60	5,20
U_v	0,00	0,80	0,70	0,40	0,00	−0,40	−0,80

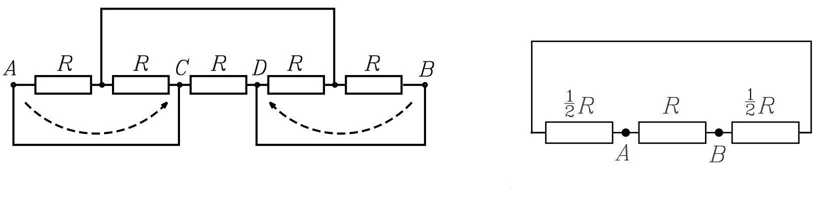
které využijeme k sestrojení grafu (obr. 4.2). Vidíme, že k přepálení žárovek může dojít, dosáhne-li napětí zdroje přibližně 5,2 V.

Úloha 4.2[2]

Pět stejných rezistorů o odporu $R = 1\,\Omega$ je zapojeno podle obr. 4.3. Odpor spojovacích vodičů je zanedbatelný. Vypočtěte výsledný odpor mezi body A a B.



Obr. 4.3: K zadání úlohy 4.2



Obr. 4.4: K řešení úlohy 4.2

Řešení:

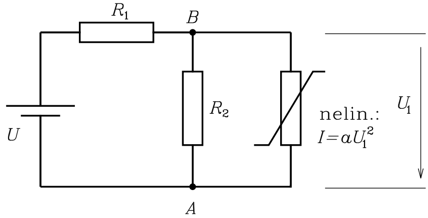
Zadané schéma si můžeme velmi zjednodušit, uvědomíme-li si, že body spojené pouze vodičem můžeme ztotožnit. Nejprve ztotožníme body A, C a B, D (obr. 4.4a) a výsledné schéma ještě upravíme do podoby na obr. 4.4b. Je zřejmé, že celkový

[2] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

odpor mezi body A a B je dán dvěma rezistory o odporu $R = 1\,\Omega$ zapojenými paralelně a je roven $R/2 = 0{,}5\,\Omega$.

Úloha 4.3[3]

Určete proud I procházející nelineárním členem v obvodu na obr. 4.5, víte-li, že pro tuto součástku závisí proud I na přiloženém napětí U_1 podle vztahu $I = \alpha U_1^2$.

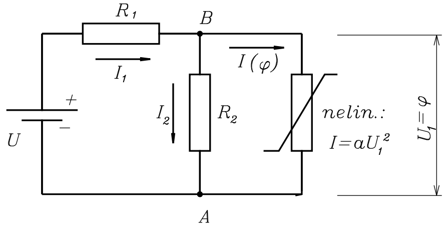


Obr. 4.5: K zadání úlohy 4.3

Řešení:

Při řešení úlohy je možné s výhodou použít tzv. *metody uzlových napětí*. Její podstata spočívá v tom, že budeme hledat napětí U_1 mezi uzly B a A (obr. 4.6). Protože nás zajímá rozdíl potenciálů $U_1 = \varphi_\mathrm{B} - \varphi_\mathrm{A}$, můžeme položit

$$\varphi_\mathrm{A} = 0, \qquad \varphi_\mathrm{B} = \varphi = U_1.$$



Obr. 4.6: K řešení úlohy 4.3

Podle 1. Kirchhoffova zákona pro uzel B potom platí

$$I_1 = I_2 + I(U_1)$$

neboli (neboť $I(U_1) = \alpha U_1^2$)

$$\frac{U - U_1}{R_1} = \frac{U_1}{R_2} + \alpha U_1^2.$$

Dostáváme kvadratickou rovnici pro napětí U_1

$$\alpha U_1^2 + U_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{U}{R_1} = 0,$$

jejíž kladné řešení (záporné nemusíme uvažovat, neboť ze zadání je zřejmé, že $U_1 > > 0$) má tvar

$$U_1 = \frac{-1/R_1 - 1/R_2 + \sqrt{(1/R_1 + 1/R_2)^2 + 4\alpha U/R_1}}{2\alpha}.$$

Proud protékající nelineárním členem je pak dán vztahem

$$I = \alpha U_1^2 = \frac{\left[-(R_1 + R_2) + \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + 4\alpha U R_1 R_2^2}\right]^2}{4\alpha R_1^2 R_2^2}.$$

[3]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

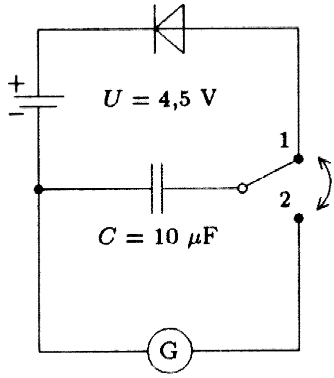
Úloha 4.4[4]

K měření proudu v závěrném směru u polovodičové diody bylo použito zapojení podle obr. 4.7. Před měřením byl kondenzátor s kapacitou $C = 10\,\mu\mathrm{F}$ nabit na stejné napětí jako baterie ($U = 4{,}5\,\mathrm{V}$) a deska s kladným nábojem byla připojena k zápornému pólu baterie. Poté zapneme spínač na dobu $\tau_1 = 1$ minuta do polohy 1. Po přepnutí do polohy 2 se ručička galvanometru vychýlila o $n_1 = 5$ dílků. Při opakování pokusu byl spínač v poloze 1 po dobu $\tau_2 = 2$ minuty a po přepnutí do polohy 2 se ručička galvanometru vychýlila na druhou stranu o 20 dílků. Na základě těchto údajů určete proud procházející diodou v závěrném směru za předpokladu, že prakticky nezávisí na přiloženém napětí.

Řešení:

Označme proud procházející diodou v závěrném směru I_D (obr. 4.8). Jestliže byl kondenzátor na počátku nabit na napětí U, byl na jeho deskách náboj $Q = CU$. Po zapnutí přepínače do polohy 1 klesne za dobu τ_1 náboj na hodnotu

$$Q_1 = Q - I_D\tau_1 = CU - I_D\tau_1, \tag{4.4.1}$$

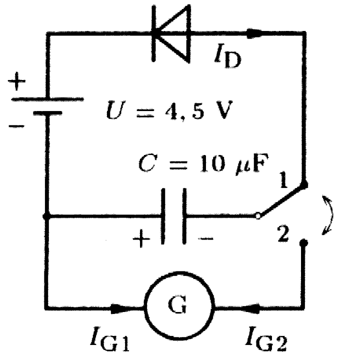


Obr. 4.7: K zadání úlohy 4.4

Při opakování pokusu, kdy byl přepínač v poloze *1* po dobu τ_2, klesne na hodnotu

$$Q_2 = Q - I_D\tau_2 = CU - I_D\tau_2, \tag{4.4.2}$$

která je podle zadání záporná, tj. $Q_2 < 0$. Označíme-li R_g vnitřní odpor galvanometru, pak pro velikost proudu I_{G1} procházejícího galvanometrem po přepnutí spínače do polohy 2 v prvním případě platí



Obr. 4.8: K řešení úlohy 4.4

$$|I_{G1}| = \frac{|U_{1\mathrm{kond}}|}{R_\mathrm{g}} = \frac{|Q_1|}{CR_\mathrm{g}},$$

podobně pro velikost proudu I_{G2} ve druhém případě

$$|I_{G2}| = \frac{|U_{2\mathrm{kond}}|}{R_\mathrm{g}} = \frac{|Q_2|}{CR_\mathrm{g}}.$$

Podělením rovnic dostaneme

$$\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{|I_{G1}|}{|I_{G2}|} = \frac{n_1}{n_2},$$

odkud vychází

$$n_2|Q_1| = n_1|Q_2|,$$

[4]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

a dále také

$$n_2 Q_1 = -n_1 Q_2,$$

vezmeme-li v úvahu, že $Q_2 < 0$. Z rovnic (4.4.1) a (4.4.2) pak vynásobením n_2 a $-n_1$ dostaneme

$$n_2 CU - n_2 I_D \tau_1 = n_1 I_D \tau_2 - n_1 CU.$$

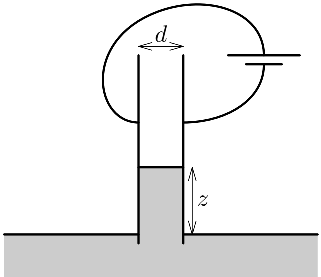
Odtud pak již snadno získáme

$$CU(n_1 + n_2) = I_D(n_1 \tau_2 + n_2 \tau_1),$$

$$I_D = \frac{CU(n_1 + n_2)}{n_1 \tau_2 + n_2 \tau_1} = 6{,}25 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{A} \approx 0{,}6\,\mu\mathrm{A}.$$

Úloha 4.5[5]

Deskový kondenzátor je připojen ke zdroji stálého napětí $U = 100\,\mathrm{V}$ (obr. 4.9). Desky, jejichž vzdálenost $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ je mnohem menší než rozměry desek, jsou orientovány svisle a jsou zčásti ponořeny do vody (relativní permitivita $\varepsilon_\mathrm{r} = 81$, hustota $\varrho = 1000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$). Jestliže zanedbáme kapilární jevy, do jaké výšky vystoupí kapalina mezi deskami kondenzátoru?



Obr. 4.9: K zadání úlohy 4.5

Řešení:

Naše elektromechanická soustava (obr. 4.9) se skládá z nabitého kondenzátoru (připojeného ke konstantnímu napětí U), zdroje napětí a kapaliny, nacházející se v tíhovém poli Země. Každá izolovaná soustava směřuje do rovnovážného stavu, ve kterém bude její *celková* energie minimální; tato úvaha je klíčem i k řešení naší úlohy.

Nechť v rovnovážném stavu kapalina vystoupí mezi deskami do výšky z. Celková energie E soustavy bude zahrnovat elektrickou energii nabitého kondenzátoru E_k, potenciální energii sloupce kapaliny E_p a energii zdroje napětí E_z. Kapacitu kondenzátoru určíme jako kapacitu paralelně zapojených kondenzátorů, z nichž jeden má výšku z a je zcela vyplněn kapalinou, a druhý o výšce $H - z$ má mezi deskami vzduch (H je výška desek kondenzátoru). Platí proto

$$C = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 L z}{d} + \frac{\varepsilon_0 L\,(H - z)}{d} = \frac{\varepsilon_0 L}{d}\left[H + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\,z\right],$$

kde L je délka desek ve vodorovném směru. Elektrická energie takového kondenzátoru potom vychází

$$E_\mathrm{k} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 L U^2\left[H + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\,z\right]}{2d}.$$

[5]Zpracováno podle časopisu *Kvant.*

Zvolíme-li nulovou hladinu potenciální energie kapaliny v tíhovém poli v úrovní spodního okraje desek, dostaneme

$$E_\mathrm{p} = \frac{\varrho L d g z^2}{2}.$$

Zbývá určit energii zdroje napětí. Označme počáteční energii zdroje E_0. V okamžiku, kdy kapacita kondenzátoru dosáhne hodnoty C, bude na jeho deskách náboj $Q = CU$. Zdroj na přenesení tohoto náboje musel vykonat práci $W = QU = CU^2$. Energie zdroje bude tedy

$$E_\mathrm{z} = E_0 - \frac{\varepsilon_0 L U^2 \left[H + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\, z\right]}{d}.$$

Sečtením získáme celkovou energii naší soustavy

$$E = E(z) = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{z} + E_\mathrm{p} = E_0 - \frac{\varepsilon_0 L U^2 \left[H + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\, z\right]}{2d} + \frac{\varrho L d g z^2}{2}.$$

Minimální energie najdeme derivací

$$\frac{\mathrm{d}E(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{\varepsilon_0 \left(\varepsilon_\mathrm{r} - 1\right) L U^2}{2d} + \varrho L d g z = 0.$$

Kapalina vystoupí do výšky

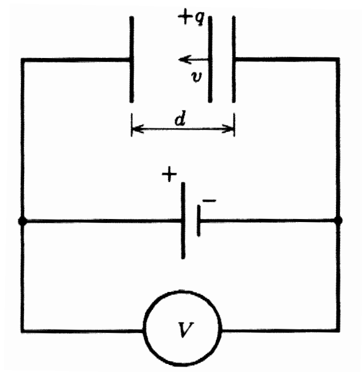
$$z_\mathrm{m} = \frac{\varepsilon_0 \left(\varepsilon_\mathrm{r} - 1\right) U^2}{2 d^2 \varrho g} \approx 1{,}44\,\mathrm{mm}.$$

Podívejme se na výsledek z fyzikálního hlediska. Předcházejícím výpočtem jsme dokázali, že soustava má rovnovážnou polohu. Tím ale neříkáme nic o tom, jakým způsobem a jak rychle soustava rovnovážné polohy dosáhne a nezabýváme se možnými ztrátami energie. Složitějším výpočtem lze ukázat, že zanedbáme-li ztráty mechanické energie, bude sloupec kapaliny konat netlumené kmity mezi polohami $z = 0$ a $z = 2z_\mathrm{m}$. Při reálném pokusu se však ztráty energie nutně projeví: kmity budou tlumené a soustava se nakonec ustálí v nalezené rovnovážné poloze s výškou sloupce kapaliny z_m. Bude-li tlumení dostatečně silné, bude kapalina pomalu stoupat do výšky z_m.

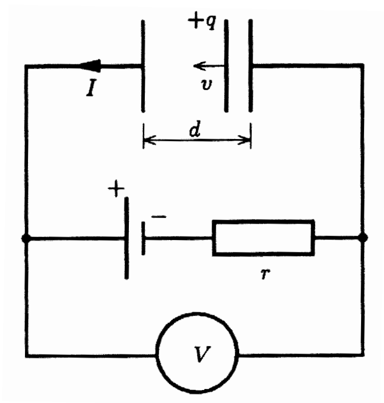
Úloha 4.6[6]

Do deskového kondenzátoru připojeného ke zdroji elektromotorického napětí U_e a vnitřním odporem r je umístěna deska s nábojem q (obr. 4.10). Jaké napětí ukáže ideální voltmetr připojený ke svorkám zdroje, jestliže se vložená deska bude pohybovat rychlostí v? Vzdálenost desek kondenzátoru je d.

[6] Zpracováno podle časopisu *Kvant.*



Obr. 4.10: K zadání úlohy 4.6



Obr. 4.11: K řešení úlohy 4.6

Řešení:

Po vložení nabité desky do kondenzátoru se vlivem elektrostatické indukce změní velikosti nábojů na obou deskách a budou se dále měnit i při pohybu desky. Vzhledem k tomu, že rychlost v je konstantní, budou se náboje na deskách kondenzátoru měnit rovnoměrně. Každá změna náboje ve vodiči odpovídá proudu I orientovanému v našem případě podle obr. 4.11. Na vnitřním odporu r zdroje tento proud způsobí přírůstek napětí $\Delta U = rI$. O tom, že se skutečně jedná o přírůstek se můžeme přesvědčit pomocí 2. Kirchhoffova zákona pro daný obvod. Voltmetrem měříme napětí na kondenzátoru U_C. Postupujeme-li ve směru proudu I, má 2. Kirchhoffův zákon pro daný obvod tvar

$$-U_e = rI - U_C .$$

Zbývá proto již jen určit velikost proudu I. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat případ, kdy byla nabitá deska přenesena od záporně nabité desky kondenzátoru na kladnou. Změna náboje bude v tomto případě rovna přenesenému náboji q, a děj proběhl za dobu $t = d/v$. Pro proud I dostáváme

$$I = \frac{q}{t} = \frac{qv}{d}.$$

Pro napětí naměřené voltmetrem pak vychází

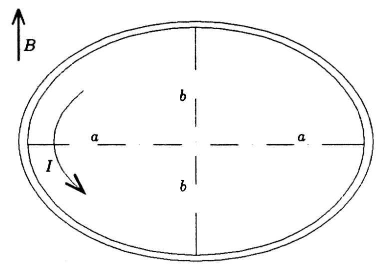
$$U_C = U_e + \Delta U = U_e + rI = U_e + \frac{qvr}{d}.$$

Připomeňme, že pokud by voltmetr nebyl ideální (tj. pokud by neměl nekonečný odpor), část proudu I by procházela voltmetrem a přírůstek ΔU na vnitřním odporu zdroje r by byl menší.

4.2 Magnetické pole

Úloha 4.7[7]

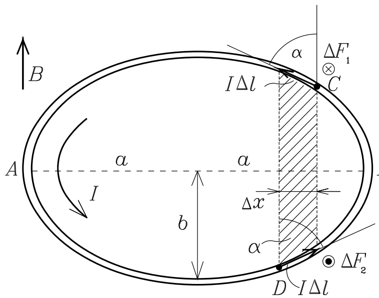
Vodivá smyčka ve tvaru elipsy s poloosami a a b leží na nevodivé vodorovné desce stolu a nachází se v homogenním magnetickém poli o indukci B, jehož indukční čáry jsou orientovány vodorovně (obr. 4.12 – pohled shora). Jak velký proud musí smyčkou procházet, aby se začala nadzvedávat? Hmotnost smyčky je m, obsah plochy ohraničené elipsou s danými poloosami $S = \pi ab$.



Obr. 4.12: K zadání úlohy 4.7

Řešení:

Vyjdeme ze situace, kdy smyčka ještě leží na vodorovné rovině (obr. 4.13). V okolí bodů C a D vybereme dva velmi malé úseky délky Δl umístěné symetricky vzhledem k hlavní poloose elipsy. Na úsek v bodě C působí síla směřující podle Flemingova pravidla levé ruky svisle dolů a pro její velikost platí



Obr. 4.13: K řešení úlohy 4.7

$$\Delta F_1 = BI\Delta l \sin\alpha = BI\Delta x,$$

kde Δx značí průmět úseku Δl do směru hlavní osy AB. Na druhý úsek v okolí bodu D působí síla směřující naopak vzhůru

$$\Delta F_2 = BI\Delta l \sin\alpha = BI\Delta x.$$

[7]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Obě síly jsou tedy stejně veliké, ale opačného směru a vytvářejí dvojici sil, jejíž otáčivý moment vzhledem k ose AB bude

$$\Delta M = \Delta F_1 l_{CD} = BI\Delta x l_{CD} = BI\Delta S,$$

kde ΔS je obsah plochy vyšrafované na obr. 4.13. Sečteme-li příspěvky k celkovému otáčivému momentu od všech dvojic úseků rozložených souměrně podle osy AB, dostáváme

$$M_{\mathrm{magn}} = BIS = BI\pi ab.$$

Tento moment se snaží otáčet smyčku podél osy AB. V okamžiku, kdy se smyčka začíná nadzvedávat, brání jejímu otáčení dvě síly: tíhová síla mg působící svisle dolů ve středu smyčky a síla N normálové reakce podložky v místě doteku smyčky s podložkou orientovaná svisle vzhůru. Tyto síly jsou v rovnováze, takže můžeme psát

$$mg - N = 0, \text{ nebo } N = mg.$$

Pro velikost otáčivého momentu této dvojice sil platí

$$M_{\mathrm{mech}} = mgb.$$

V okamžiku, kdy se smyčka začíná vznášet musí být oba opačně orientované momenty v rovnováze, tj. musí být splněna podmínka

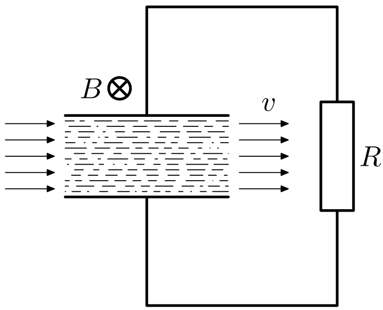
$$M_{\mathrm{magn}} - M_{\mathrm{mech}} = 0 \text{ neboli } BI\pi ab = mgb.$$

Odtud pak snadno vypočteme velikost proudu

$$I = \frac{mg}{\pi Ba}.$$

Úloha 4.8

Pečlivým pátráním v archivu Univerzity Palackého se podařilo objevit dosud nezveřejněný záznam o pobytu českého velikána Járy da Cimrmana v Olomouci. Zastavil se tu s největší pravděpodobností v zimních měsících roku 1901 (nelze však vyloučit ani rok 1902 nebo 1905) na cestě z Vídně do Liptákova. Nenadálé přívaly sněhu ho přiměly setrvat několik dní, které byl pro momentální nedostatek prostředků a nepochopení lakomých spolucestujících nucen strávit v neútulném, chladném pokoji poblíž řeky Moravy. Mráz a pomalu plynoucí voda řeky vnukly výjimečnému mysliteli na svou dobu naprosto neslýchaný nápad, jak získávat teplo pomocí hydrodynamického generátoru. Náčrtek ukázal i kolegům na zdejší univerzitě, ti však nejevili o geniální myšlenku



Obr. 4.14: K úloze 4.8

nejmenší zájem a vynález tak mezi významnějšími Cimrmanovy objevy neprávem téměř upadl v zapomenutí. Nyní se obracíme na čtenáře s prosbou o pomoc při rekonstrukci Mistrova díla.

Po namáhavé a zdlouhavé práci restaurátorů (Cimrman vyprosil od místního hokynáře Boněčiny pouze několik listů nekvalitního papíru) se podařilo rekonstruovat náčrtek důmyslného zařízení (obr. 4.14), bohužel bez jakéhokoliv kometáře; Cimrman samozřejmě veškeré výpočty prováděl „nur im Kopf". Mělo se skládat z deskového kondenzátoru s plochou desek S ve vzájemné vzdálenosti d, mezi nimiž rovnoběžně s deskami protéká vodivá kapalina s měrným odporem ϱ. Kondenzátor je umístěn v homogenním magnetickém poli s indukcí $\boldsymbol{B}$, jejíž vektor je rovnoběžný s deskami kondenzátoru. Jaký tepelný výkon získáme na rezistoru s odporem R? Dokážete odhadnout účinnost Mistrova generátoru? Ztráty způsobené vířivým pohybem kapaliny (stejně jako jakékoliv jiné ztráty) Cimrman zásadně zanedbával.

Řešení:

Po značném úsilí se nakonec podařilo nalézt unikátní dokument – poznámky jednoho ze studentů, který se s Cimrmanem setkal, a zaznamenal si i obsah jeho přednášky, kterou po nepochopení pedagogů uspořádal pro zájemce z řad studentů. Zde předkládáme komentář.

Na volné náboje v protékající kapalině působí vnější magnetické pole Lorentzovou silou. Kladné náboje budou směřovat k horní desce, záporné k dolní desce. Na deskách kondenzátoru se tak objeví opačné náboje, vzniká mezi nimi rozdíl potenciálů a přes odpor R bude protékat proud. Zároveň však vzniklé elektrické pole začne brzdit pohyb nábojů v kapalině směrem k deskám. V důsledku toho se po určité době ustaví rovnovážný stav: náboj, který se za 1 s přenese z kapaliny na každou z desek kondenzátoru je roven velikosti proudu I protékajícího rezistorem.

Elektromotorickou sílu, která udržuje v obvodu proud, určuje intenzita elektrického pole E mezi deskami kondenzátoru v případě, kdybychom vnější obvod s kondenzátorem odpojili. V rovnovážném stavu $E = vB$. Rozdíl potenciálů mezi deskami $U_e = Ed = vBd$; toto napětí pak udržuje proud ve vnějším obvodu. Kondenzátor se vůči vnějšímu obvodu chová jako zdroj s elektromotorickým napětím U_e a vnitřním odporem $r = \varrho d/S$. Pro velikost proudu pak vychází

$$I = \frac{U_e}{R + r} = \frac{vBd}{R + \varrho d/S},$$

a tepelný výkon uvolněný na rezistoru

$$P_R = RI^2 = R\left(\frac{vBd}{R + \varrho d/S}\right)^2 = \frac{(vBd)^2}{R\left(1 + \dfrac{\varrho d}{SR}\right)^2}.$$

Abychom vypočetli účinnost, musíme vyčíslit výkon vnějších sil, které generátor pohání. Práce vykonaná vnějšími silami se spotřebovává na přenášení náboje mezi deskami kondenzátoru. Protože kapalinou protéká proud I, působí na něj magnetická síla $F_{\mathrm{m}} = BId$, jež podle Flemingova pravidla levé ruky působí proti pohybu kapaliny. Na udržení toku kapaliny je potřeba síly o velikosti F_{m}, působící naopak ve směru proudění kapaliny. Pro výkon dodávaný touto silou Cimrmanovu generátoru dostáváme

$$P_0 = F_{\mathrm{m}} v = BIdv = \frac{(vBd)^2}{R\left(1 + \dfrac{\varrho d}{SR}\right)}$$

a konečně pro účinnost generátoru

$$\eta = \frac{P_R}{P_0} = \frac{1}{1 + \dfrac{\varrho d}{SR}}.$$

Jak je vidět, účinnost generátoru závisí na poměru odporů kapaliny a rezistoru R. Pro ideálně vodivou kapalinu ($\varrho \to 0$) $\eta \to 1$.

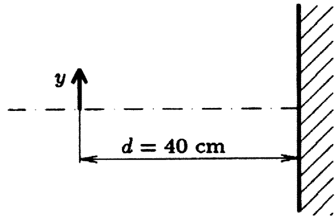
Je zcela zřejmé, že Cimrmanovi současníci se svým přezíravým postojem připravili o možnost strávit i zimní měsíce v teple bez přenášení uhlí a rozšlapávání všudypřítomného uhelného prachu.

Kapitola 5

Optika

Úloha 5.1[1]

Ve vzdálenosti $d = 40\,\mathrm{cm}$ od rovinného zrcadla je umístěn předmět (obr. 5.1). Umístěte dvě spojné čočky o optických mohutnostech $\varphi_1 = 11\,\mathrm{D}$ a $\varphi_2 = 10\,\mathrm{D}$ tak, aby vzniklá *centrovaná* optická soustava dávala *pouze jeden*, skutečný, převrácený, dvakrát zmenšený obraz předmětu. Návod: Uvažte, kdy se předmět pomocí jedné čočky a zrcadla může zobrazit sám na sebe.



Obr. 5.1: K zadání úlohy 5.1

Řešení:

Úloha má celkem 5 řešení, z nichž tři jsou znázorněna na obr. 5.2a–c. Jednu čočku je vždy třeba umístit mezi předmět a zrcadlo tak, aby se po odrazu na zrcadle předmět zobrazil sám na sebe. Druhá čočka pak musí být za předmětem (ve směru od zrcadla) a právě pomocí ní vzniká obraz požadovaných vlastností.

Při řešení úlohy je nejdůležitější nalézt podmínku, kdy optická soustava čočka – zrcadlo zobrazí předmět sám na sebe. To bude splněno tehdy, když obraz vytvořený čočkou bude ležet právě v rovině zrcadla. Tento obraz se odrazem převede sám na sebe a po opětovném zobrazení čočkou dostáváme obraz splývající s výchozím předmětem. Zbývá určit vzdálenost, do které je třeba umístit spojku. Uvažujme nejprve případ, kdy je před zrcadlem spojka s optickou mohutností $\varphi_1 = 11\,\mathrm{D}$ (obr. 5.2a,b). V označení podle obr. 5.2a,b má zobrazovací rovnice tvar

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_1} = \varphi_1 .$$

Dále zřejmě platí

$$a + a' = d .$$

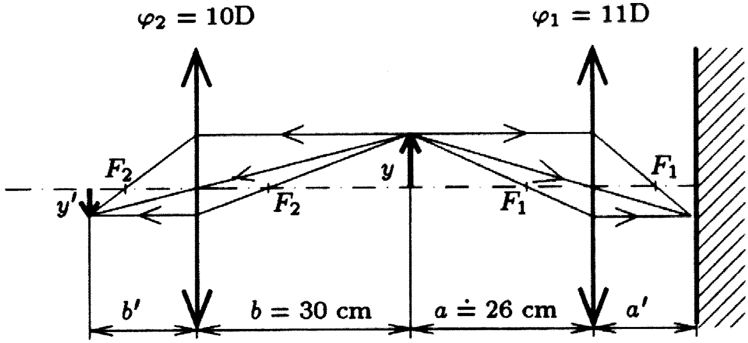
Vyloučením a' a postupnými úpravami získáváme kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} = \varphi_1 ,$$

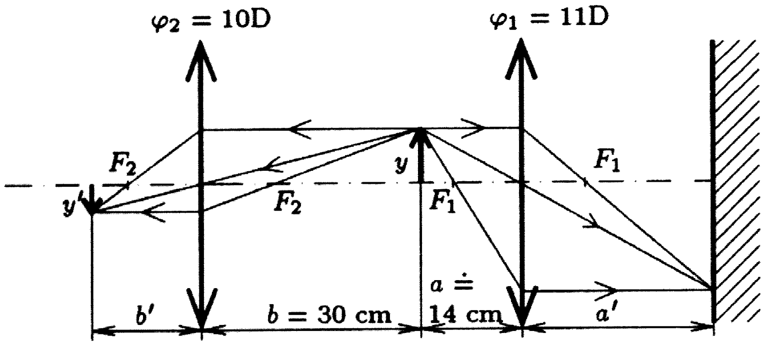
$$d - a + a = \varphi_1 a d - \varphi_1 a^2 ,$$

$$\varphi_1 a^2 - \varphi_1 a d + d = 0 ,$$

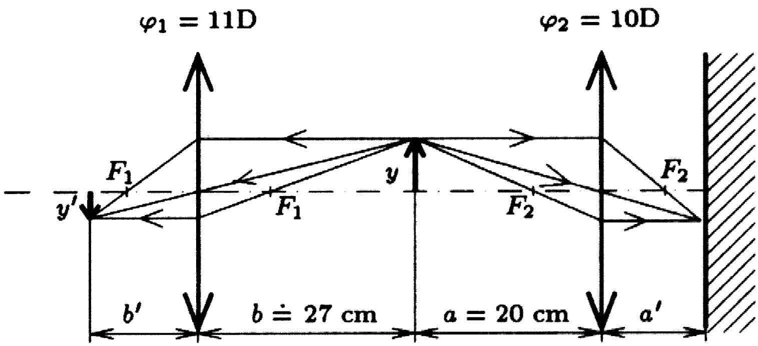
[1] Autorem úlohy je Radek Horenský.



(a)



(b)



(c)

Obr. 5.2: K řešení úlohy 5.1

s kořeny

$$a_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4d/\varphi_1}}{2} \approx 0{,}26\,\mathrm{m},$$

$$a_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4d/\varphi_1}}{2} \approx 0{,}14\,\mathrm{m}.$$

Spojku musíme proto umístit ve vzdálenosti $a_1 \approx 26\,\mathrm{cm}$ (obr. 5.2a) nebo $a_2 \approx 14\,\mathrm{cm}$ (obr. 5.2b) od předmětu (vzdálenosti od zrcadla lze snadno dopočítat – jejich velikosti budou stejné, v opačném pořadí).

Zbývá umístit druhou čočku tak, abychom získali převrácený, skutečný a poloviční obraz předmětu. Pro zvětšení platí (v označení podle obrázků)

$$Z = -\frac{y'}{y} = -\frac{f_2}{b - f_2} = -\frac{1}{2}$$

a tedy také

$$2f_2 = b - f_2,$$

$$b = 3f_2 = \frac{3}{\varphi_2} = 0{,}3\,\mathrm{m}.$$

Druhou spojku tedy musíme umístit ve vzdálenosti $b = 30\,\mathrm{cm}$ od předmětu. Další řešení dostaneme, zaměníme-li obě čočky. Postup i vztahy jsou zcela obdobné, při řešení kvadratické rovnice však dostaneme pro zadané hodnoty pouze jeden kořen $a = d/2 = 20\,\mathrm{cm}$; pro vzdálenost b vychází $b = 3f_1 = 3/\varphi_1 \approx 27{,}3\,\mathrm{cm}$ (řešení je na obr. 5.2c).

Zbývající dvě řešení získáme, umístíme-li jednu spojku mezi předmět a zrcadlo tak, aby předmět ležel v její ohniskové rovině. Po průchodu paprsků spojkou, odrazu na zrcadle a opětovném zobrazení spojkou splyne obraz vytvořený soustavou čočka – zrcadlo s předmětem a pomocí druhé spojky pak dostaneme obraz požadovaných vlastností.

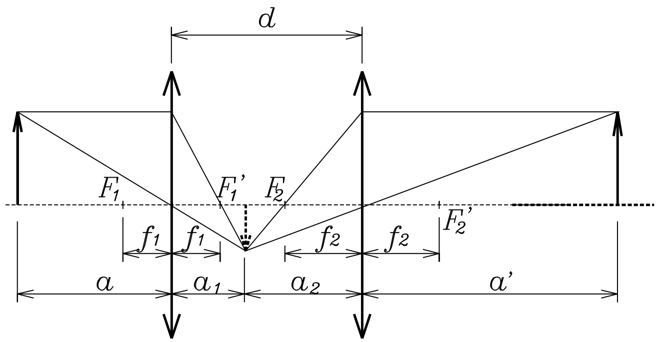
Úloha 5.2[2]

Dvě tenké čočky, jejichž optické osy splývají, jsou od sebe vzdáleny 25 cm. Tato soustava dává přímý skutečný obraz stejné velikosti jako předmět. Zaměníme-li obě čočky, vznikne opět skutečný přímý obraz, ale čtyřikrát zvětšený. O kolik se liší optické mohutnosti čoček?

Řešení:

Ze zadání úlohy je zřejmé, že alespoň jedna z čoček musí být spojka, má-li vzniknout skutečný obraz. Protože rozptylka dává obraz zdánlivý a přímý a skutečný obraz vytvořený spojkou je vždy převrácený, nemůže jít ani o kombinaci spojky a rozptylky, neboť obraz má být přímý a skutečný i po vzájemné výměně obou čoček. Jedná se tedy o dvě spojné čočky.

[2]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.



Obr. 5.3: K řešení úlohy 5.2

Označme ohniskové vzdálenosti obou čoček f_1, f_2, jejich vzájemnou vzdálenost d, a_1 vzdálenost obrazu vytvořeného první čočkou od této čočky, $a_2 = d - a_1$ předmětovou vzdálenost pro zobrazování druhou čočkou (vzdálenost obrazu vytvořeného první spojkou od druhé spojky), a' vzdálenost výsledného obrazu od druhé čočky. Situace je znázorněna na obr. 5.3. Pro první spojku má zobrazovací rovnice tvar

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Odtud můžeme vyjádřit

$$a_1 = \frac{f_1 a}{a - f_1} \tag{5.2.1}$$

a pro zvětšení potom platí

$$Z_1 = -\frac{y_1}{y} = -\frac{f_1}{a - f_1}. \tag{5.2.2}$$

Podobně pro zvětšení druhé čočky můžeme psát

$$Z_2 = -\frac{y'}{y_1} = -\frac{f_2}{a_2 - f_2} = -\frac{f_2}{d - a_1 - f_2}$$

a po dosazení z (5.2.1) za a_1

$$Z_2 = \frac{f_2}{d - af_1/(a - f_1) - f_2}. \tag{5.2.3}$$

Pro celkové zvětšení pak z (5.2.2) a (5.2.3) dostáváme

$$Z = \frac{y'}{y} = Z_1 Z_2 = \frac{f_1}{a - f_1} \frac{f_2}{d - af_1/(a - f_1) - f_2}.$$

Jmenovatel zlomku je však příliš složitý a bude tedy výhodnější vyjádřit si převrácenou hodnotu zvětšení

$$\frac{1}{Z} = \frac{a(d - f_1 - f_2) + f_1 f_2}{f_1 f_2} - \frac{d}{f_2}. \tag{5.2.4}$$

Zaměníme-li obě čočky, vymění si místo v rovnici pro celkové zvětšení pouze ohniskové vzdálenosti čoček f_1, f_2, o čemž se lze jednoduše přesvědčit zcela shodným postupem (pouze by bylo nutné uvažovat jiné vzdálenosti a'_1, a'_2, avšak ani a_1 ani a_2 ve výsledné rovnici (5.2.4) nevystupují). Pro celkové zvětšení po záměně čoček získáváme

$$Z' = Z'_1 Z'_2 = \frac{f_2}{a - f_2} \frac{f_1}{d - af_2/(a - f_2) - f_1}$$

a pro jeho převrácenou hodnotu

$$\frac{1}{Z'} = \frac{a(d - f_1 - f_2) + f_1 f_2}{f_1 f_2} - \frac{d}{f_1}. \tag{5.2.5}$$

Odečtením (5.2.4) a (5.2.5) potom dostaneme

$$\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z'} = d\left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}\right).$$

Zavedeme-li nyní optické mohutnosti čoček $\varphi_1 = 1/f_1$, $\varphi_2 = 1/f_2$, potom

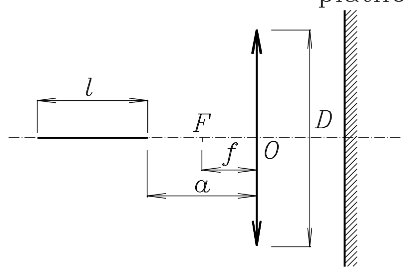
$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z'}\right).$$

Po dosazení číselných hodnot vychází

$$\Delta\varphi = \frac{1}{0{,}25}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3\,\mathrm{D}.$$

Úloha 5.3[3]

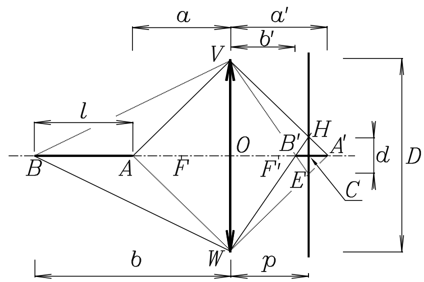
Zdroj světla je tvořen tenkým vláknem o délce $l = 10\,\mathrm{cm}$ umístěným na na optické ose tenké spojné čočky o průměru $D = 5\,\mathrm{cm}$ a s ohniskovou vzdáleností $f = 5\,\mathrm{cm}$ (obr. 5.4). Bližší konec vlákna se nachází ve vzdálenosti $a = 10\,\mathrm{cm}$ od čočky. Na plátně umístěném na druhé straně spojky kolmo k její optické ose vytvoří obraz zdroje světlou skvrnu. Zjistěte, pro kterou polohu plátna bude mít skvrna nejmenší průměr d a vypočítejte jeho velikost.



Obr. 5.4: K zadání úlohy 5.3

Řešení:

Řešení úlohy je znázorněno na obr. 5.5, z něhož vidíme, pro jakou polohu p plátna bude světlá skvrna - obraz zdroje - nejmenší. Pomocí zobrazovací rovnice čočky najdeme polohy a', b' obrazů A' a B' krajních bodů A a B světelného zdroje. Zřejmě platí



Obr. 5.5: K řešení úlohy 5.3

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}, \qquad \frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f},$$

kde $a = 0{,}1\,\mathrm{m}$ a $b = a + l = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Řešením těchto rovnic dostaneme

$$a' = \frac{fa}{a-f} = 10\,\mathrm{cm}, \qquad b' = \frac{fb}{b-f} = \frac{20}{3}\,\mathrm{cm}.$$

Zakresleme do obrázku paprsky, jež se lámou na okraji spojné čočky; pokud vycházejí z bodu A, lámou se do bodu A', vycházejí-li z bodu B, lámou se do bodu B'. Průsečík těchto „krajních“ paprsků určuje hledanou polohu plátna. Jeho vzdálenost p od čočky vypočteme pomocí podobnosti trojúhelníků. Protože $\triangle CHA' \sim \triangle OVA' \simeq \triangle OWA'$, $\triangle B'CH \sim \triangle B'OV \simeq \triangle B'OW$ a $|OV| = |OW|$, postupně získáváme

$$\frac{|CH|}{|OV|} = \frac{|CH|}{|OW|} = \frac{|CA'|}{|OA'|}, \qquad \frac{|CH|}{|OV|} = \frac{|CH|}{|OW|} = \frac{|B'C|}{|OB'|},$$

neboli

$$\frac{|CA'|}{|OA'|} = \frac{|B'C|}{|OB'|}$$

a tedy

$$\frac{a'-p}{a'} = \frac{p-b'}{b'}.$$

[3]Zpracováno podle časopisu *Kvant.*

Řešením rovnice pro p vychází

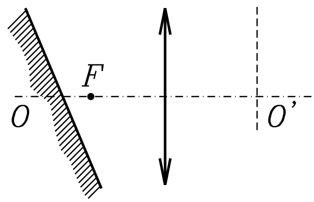
$$p = \frac{2a'b'}{a'+b'} = 8\,\mathrm{cm}.$$

Průměr $d = |HE|$ světlé skvrny na plátně je dán průměrem D spojky a poměrem $|CA'|/|OA'|$

$$d = \frac{|CA'|}{|OA'|} D = \frac{a'-p}{a'} D = \frac{a'-b'}{a'+b'} D = 0{,}2\,D = 1\,\mathrm{cm}.$$

Úloha 5.4[4]

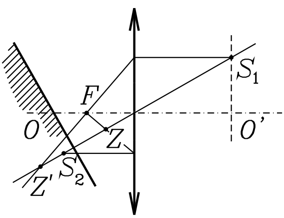
Optická soustava se skládá z tenké spojné čočky (jedno z jejích ohnisek je bod F) a rovinného zrcadla (obr. 5.6). Zobrazením bodového zdroje světla získáme dva obrazy, ležící na vedlejší optické ose čočky (tj. přímce procházející středem čočky). Jeden z obrazů je reálný a vzniká v rovině O' označené čárkovanou čarou. Graficky najděte polohu zdroje světla a jeho obrazů. Odraz světla na povrchu čočky neuvažujte.



Obr. 5.6: K zadání úlohy 5.4

Řešení:

Ze středu čočky vedeme kolmici na rovinu zrcadla, na ní bude ležet jak samotný zdroj Z, jeho zdánlivý obraz v zrcadle Z' i skutečný obraz S_1. Právě bod S_1 najdeme jako první, neboť bude průsečíkem sestrojené přímky a zadané roviny (znázorněna čárkovaně). Obrazu S_1 bude odpovídat i příslušný paprsek procházející ohniskem čočky F, jež musí procházet buď zdrojem (to ale z podmínek úlohy není možné), nebo obrazem zdroje v zrcadle Z'. Jestliže jsme nalezli Z', snadno najdeme i Z překlopením podle roviny zrcadla. Zbývá určit druhý obraz S_2. Jedná se zřejmě o obraz neskutečný a musí ležet jak na ZZ', tak na rovnoběžce s hlavní osou čočky, použijeme-li paprsku procházejícího ohniskem. Důležitou podmínkou je, aby S_2 leželo opět za zrcadlem a nikoliv před ním, protože jinak bychom díky odrazu v zrcadle získali další zdánlivý zdroj a obrazů by bylo určitě více.



Obr. 5.7: K řešení úlohy 5.4

Úloha 5.5[5]

Bodový zdroj světla S se pohybuje konstantní rychlostí rovnoběžně s deskou, v níž jsou dva malé otvory ve vzdálenosti d od sebe (obr. 5.8). Nejmenší vzdálenost zdroje od desky je h. Světelný signál o vlnové délce $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$ je snímán čidlem

[4]Zpracováno podle časopisu *Kvant.*

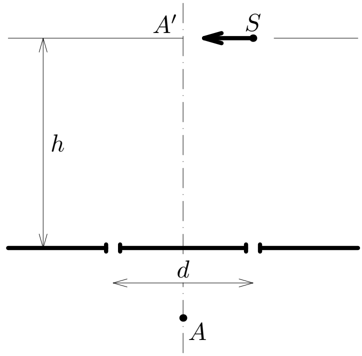
[5]Zpracováno podle časopisu *Kvant.*

A umístěným na ose mezi oběma otvory. V době, kdy se zdroj nacházel poblíž osy AA', čidlo A zaznamenalo periodické změny intenzity dopadajícího světla s frekvencí $f = 15\,\mathrm{Hz}$. Jakou rychlostí se zdroj S pohyboval? Řešte pro hodnoty $d = 2\,\mathrm{mm}$ a $h = 1\,\mathrm{m}$, změnu vlnové délky světla způsobenou pohybem zdroje neuvažujte.

Řešení:

V čase mezi průchodem dvou po sobě následujících maxim bodem A na stínítku (obr. 5.9) se interferenční obrazec posune právě o vzdálenost jedné vlnové délky λ. O tuto velikost se změní i dráhový rozdíl mezi paprsky procházejícími oběma štěrbinami. Předpokládejme, že na počátku se zdroj nachází právě na ose AA' (v bodě A pak vniká maximum nultého řádu). V okamžiku, kdy bude zdroj ve vzdálenosti l od osy AA', pro dráhový rozdíl obou paprsků můžeme psát

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{d}{2}+l\right)^2 + h^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}-l\right)^2 + h^2}.$$



Obr. 5.8: K zadání úlohy 5.5

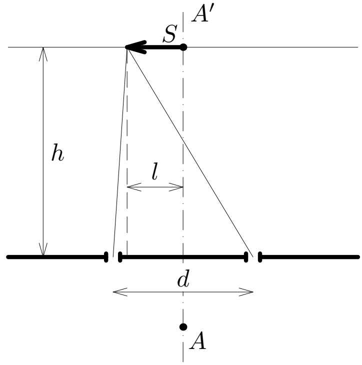
Hledáme proto takové l, pro které bude právě $\delta = \lambda$. Z této podmínky dostáváme iracionální rovnici, kterou však po úpravách snadno převedeme na kvadratickou rovnici pro l^2

$$l^2(4d^2 - 4\lambda^2) + \lambda^4 - \lambda^2\, d^2 - 4\,\lambda^2\, h^2 = 0.$$

Ze dvou řešení má smysl pouze kladný kořen

$$l = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{d^2 + 4h^2 - \lambda^2}{d^2 - \lambda^2}} \approx \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{d^2+4h^2}{d^2}} \approx \frac{\lambda h}{d},$$

neboť $\lambda \ll d$, h a $d \ll h$. Z frekvence f střídání maxim a minim v bodě A zjistíme i čas $t = 1/f$, za který zdroj urazil vzdálenost l. Pro rychlost zdroje pak vychází



Obr. 5.9: K řešení úlohy 5.5

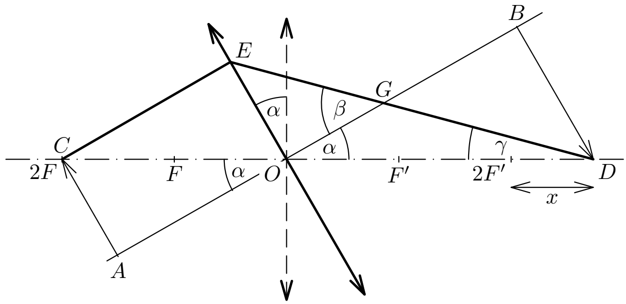
$$v = \frac{l}{t} = l\,f = \frac{\lambda h}{d}\,f;$$

pro zadané hodnoty $\lambda = 550{\cdot}10^{-9}\,\mathrm{m}$, $d = 0{,}002\,\mathrm{m}$, $h = 1\,\mathrm{m}$ potom

$$v \approx 4{,}1\,\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}.$$

Úloha 5.6[6]

Neználek se pustil z dlouhé chvíle do optických pokusů. Malou svíčku umístil na hlavní optické ose tenké spojné čočky s ohniskovou vzdáleností $f = 70\,\mathrm{cm}$ ve vzdálenosti $2f$ od středu čočky. Na druhé straně umístil stínítko a zkoumal, jak se mění obraz plamene na stínítku, když bude na svíčku foukat. Všeználek chtěl prověřit Neználkovy znalosti optiky a v době, kdy byl Neználek na obědě, pootočil čočku kolem jejího středu tak, že přímka spojující svíčku se středem čočky svírala s hlavní optickou osou úhel $\alpha = 30°$. Navíc čočku opevnil tak, aby ji Neználek nemohl otočit zpátky. Do jaké vzdálenosti od čočky musel chudák Neználek po návratu z oběda umístit stínítko, aby získal opět ostrý obraz? Neználkovu svíčku považujte za bodový zdroj.



Obr. 5.10: K řešení úlohy 5.6

Řešení:

Před otočením čočky ležel obraz svíčky ve vzdálenosti $2f$ od středu čočky. Označíme-li na obr. 5.10 $|AO| = a$, $|OB| = b$, $|OD| = y$ a hledané posunutí obrazu x, potom $x = y - 2f$. Z podobností trojúhelníků $\triangle AOC$ a $\triangle BOD$ dále plyne $y = 2fb/a$ a podle obrázku $a = 2f\cos\alpha$. Využijeme-li ještě zobrazovací rovnici

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{5.6.1}$$

vychází

$$\begin{aligned} b &= \frac{af}{a-f} = \frac{2f\cos\alpha}{2\cos\alpha - 1}, \\ y &= \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{2f}{2\cos\alpha - 1}, \\ x = y - 2f &= \frac{4f\,(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Neználek tedy musí stínítko umístit ve vzdálenosti $y \approx 191{,}2\,\mathrm{cm}$ od středu čočky O, oproti původní poloze musí stínítko posunout o $x \approx 51{,}2\,\mathrm{cm}$ dále od čočky.

[6] Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

Petr Mazanec navrhl i jiné řešení, které nevyžaduje znalost zobrazovací rovnice (5.6.1), ale vychází z čistě geometrických úvah. Z obr. 5.10 lze snadno určit velikost úhlu β z vlastností $\triangle EOG$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|EO|}{|OG|} = \frac{|CA|}{|OG|} = \frac{2f\sin\alpha}{f} = 1,$$

odkud plyne, že $\beta = 45°$. Nyní již snadno vyjádříme velikost úhlu γ, neboť v $\triangle ODG$ musí platit

$$\gamma = 180° - \alpha - (180° - \beta) = \beta - \alpha.$$

Využijeme-li nyní sinovou větu pro $\triangle ODG$, dostáváme

$$y = |OG|\,\frac{\sin(180° - \beta)}{\sin\gamma} = f\,\frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \approx 191{,}2\,\mathrm{cm}.$$

Řešení platí pouze pro tenkou čočku a především pouze pro případ paraxiálních paprsků, tj. paprsků, procházejících v bezprostřední blízkosti optické osy. Tato podmínka však pro úhel natočení 30° není splněna a co víc – obraz předmětu se díky tomu vytvoří v jiné vzdálenosti v různých rovinách (nejčastěji se uvádí vodorovná a svislá). Potom je obecně těžké Neználkovi poradit (k tomu není zadáno dost údajů), ale experimentálně lze ověřit, že by musel stínítko posunout na opačnou stranu, než jak vychází ve výpočtu pro paraxiální paprsky. K tomu, abyste výsledek ověřili však nemůžete použít obyčejnou čočku (např. lupu), neboť ta má většinou tak velkou otvorovou vadu (paprsky vzdálenější od osy se lámou blíže k čočce), že nelze rozhodnout prakticky vůbec, obraz na stínítku je velmi neostrý. Tenké čočce se v tomto smyslu nejvíce podobá korigovaná soustava, u níž lze zmíněný jev, tj. posun obrazu po otočení čočky směrem k ní, skutečně pozorovat.

Kapitola 6

Různé

Úloha 6.1[1]

Do kalorimetru s tepelnou kapacitou $C = 100\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ byl umístěn vzorek radioaktivního izotopu kobaltu $^{61}_{27}\mathrm{Co}$ o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{g}$. Při rozpadu jednoho jádra kobaltu se uvolní energie $w = 2\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$. Za dobu $\tau = 50\,\mathrm{min}$ se teplota kalorimetru zvýšila o $\Delta t = 60\,°\mathrm{C}$. Jaký je poločas rozpadu radioaktivního kobaltu? Avogadrova konstanta $N_\mathrm{A} = 6\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

Řešení:

Energie uvolněná v důsledku rozpadu jader radioaktivního kobaltu se přeměňuje na teplo Q, jež určíme ze zvýšení teploty kalorimetru

$$Q = C\Delta t.$$

Známe-li energii w, která se uvolní při rozpadu jednoho jádra, můžeme určit, kolik jader se rozpadlo za dobu τ

$$\Delta N = \frac{Q}{w} = \frac{C\Delta t}{w} = 3\cdot 10^{22}. \tag{6.1.1}$$

Jak známo, přeměna jader kobaltu se řídí rozpadovým zákonem

$$N_\mathrm{t} = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{6.1.2}$$

kde N_t je počet zbylých nerozpadlých jader v čase t, N_0 počáteční počet radioaktivních jader ve vzorku a λ tzv. přeměnová konstanta. Pro poločas rozpadu T (tzn. dobu, za níž se rozpadne právě polovina z původního počtu jader) lze snadno odvodit vztah

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

a po dosazení za λ do (6.1.2) můžeme rozpadový zákon přepsat do méně obvyklého tvaru

$$N_\mathrm{t} = N_0 2^{-t/T}.$$

Pro počet jader rozpadlých za dobu τ dostáváme

$$\Delta N = N_0 - N_\mathrm{t} = N_0\left(1 - 2^{-\tau/T}\right). \tag{6.1.3}$$

[1]Zpracováno podle časopisu *Kvant*.

V předcházející rovnici zbývá určit počáteční počet radioaktivních jader ve vzorku kobaltu. Podle zadání se jednalo o vzorek čistého radioaktivního kobaltu, tj. radioaktivní byla na počátku všechna atomová jádra (tento předpoklad je samozřejmě pouze teoretický; v praxi se by se ve vzorku vždy vyskytovaly příměsi). Jejich počet je dán hmotností vzorku. Při relativní atomové hmotnosti dané nukleonovým číslem izotopu $A = 61$ je hmotnost M_m jednoho molu rovna $A \cdot 10^{-3}$ kg. Pro látkové množství n obsažené ve vzorku vychází

$$n = \frac{m}{M_\mathrm{m}} = \frac{m}{A \cdot 10^{-3}}$$

a pro počáteční počet jader ve vzorku

$$N_0 = N_\mathrm{A} \cdot n = N_\mathrm{A} \frac{m}{A \cdot 10^{-3}} \approx 9{,}84 \cdot 10^{22}.$$

Po dosazení do (6.1.3) obdržíme

$$\Delta N = N_\mathrm{A} \cdot \frac{m}{A \cdot 10^{-3}} \left(1 - 2^{-\tau/T}\right)$$

a nahradíme-li ještě ΔN podle (6.1.1)

$$\frac{C\Delta t}{w} = N_\mathrm{A} \cdot \frac{m}{A \cdot 10^{-3}} \left(1 - 2^{-\tau/T}\right).$$

Odtud již můžeme vyjádřit poločas rozpadu T

$$\begin{aligned} T &= \frac{\tau}{\log_{1/2}\left[1 - \left(C\Delta t A \cdot 10^{-3}\right) / \left(N_\mathrm{A} w m\right)\right]} = \\ &= \frac{\tau \log(1/2)}{\log\left[1 - \left(C\Delta t A \cdot 10^{-3}\right) / \left(N_\mathrm{A} w m\right)\right]} \approx 95\,\mathrm{min}. \end{aligned}$$

V tabulkách (viz např. [3], s. 154) zjistíme, že izotop ${}^{61}_{27}\mathrm{Co}$ se rozpadá s poločasem rozpadu 99 min a jde o rozpad β^-.

Úloha 6.2[2]

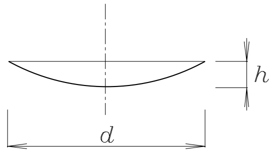
V románu Julese Verna „Tajuplný ostrov“ se dočteme, jak inženýr Cyrus Smith spolu s novinářem Gedeonem Spilettem opatřili pro trosečníky oheň:
„ ...‚A kdo jej zapálil?’ ptal se Pencroff.
‚Slunce.’
... Ukázal pak zařízení, které mu sloužilo jako čočka. Byla to dvě sklíčka, která vyndal ze svých a novinářových hodinek. Spojil je těsně k sobě, prostor mezi nimi naplnil vodou a okraje zalepil pryskyřicí. Tak sestrojil opravdovou čočku, která soustředila sluneční paprsky na hořlavinu ze suchého mechu.“

Předpokládejte, že sklíčka hodinek měla průměr $d = 5$ cm (jednalo se o větší kapesní hodinky) a hloubka sklíčka byla $h = 3$ mm (obr. 6.1). Hodinová sklíčka měla

[2]Inspirováno úlohou z minulých ročníků FO, jejímž autorem je prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.

tvar části kulové plochy, byla obě stejná, velmi tenká a nepřispívala k optickým vlastnostem čočky vyrobené inženýrem Smithem. Pro jednoduchost dále předpokládejte, že inženýr zapálil stébla suché trávy, která můžete považovat za válec dokonale černého tělesa, tepelné ztráty vedením zanedbejte. Jaká mohla být maximálně zápalná teplota t_z použité trávy za velmi jasného slunečního dne? Jak daleko od stébel trávy držel inženýr Smith svou čočku?

Index lomu mořské vody je $n_v = 1{,}3$; solární konstanta (množství energie dopadající za 1 s na 1 m² plochy zemského povrchu) $S = 1327\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$, Stefanova-Botzmannova konstanta $\sigma = 5{,}67{\cdot}10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$, poloměr Slunce $R_\odot = 6{,}96{\cdot}10^5$ km, vzdálenost Země-Slunce $a = 1\,\mathrm{AU} = 150{\cdot}10^6$ km.



Obr. 6.1: K zadání úlohy 6.2

Řešení:

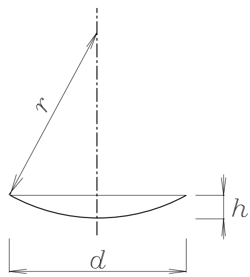
Nejprve určíme optickou mohutnost čočky sestrojené Cyrusem Smithem. Poloměr křivosti r kulové plochy tvořící povrch čočky vypočteme pomocí Pythagorovy věty podle obr. 6.2. Platí

$$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r-h)^2\,, \qquad r = \frac{d^2+4h^2}{8h}.$$

Optickou mohutnost φ čočky pak zjistíme dosazením do vztahu (viz např. [5])

$$\varphi = (n_v - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) = (n_v - 1)\,\frac{16h}{d^2+4h^2}.$$

Optická mohutnost je kladná a vzniklá čočka je proto spojkou (rozptylku pochopitelně nelze k zapalování trávy použít). Obraz Slunce vytvořený čočkou vznikne téměř přesně v ohniskové rovině, neboť vzdálenost a Slunce od Země je mnohem větší než ohnisková vzdálenost: $a \gg 1/\varphi$.



Obr. 6.2: K řešení úlohy 6.2

Zářivý tok $\varPhi$ ze Slunce, jenž prochází plochou čočky je stejný, jako zářivý tok $\varPhi_1$ procházející plochou skutečného obrazu Slunce vytvořeného čočkou, $\varPhi = \varPhi_1$ a tudíž

$$\frac{\pi d^2}{4} S = I \pi r_{ob}^2,$$

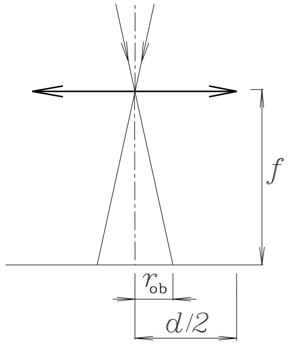
kde r_{ob} je poloměr skutečného obrazu Slunce, S solární konstanta a I intenzita zářivého toku v ohniskové rovině. Odtud vyplývá, že

$$I = \frac{d^2}{4r_{ob}^2} S.$$

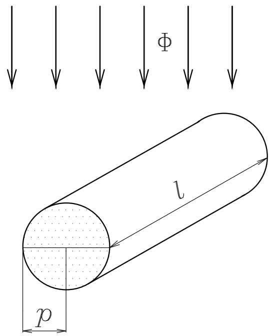
Z podobnosti trojúhelníků a s pomocí obr. 6.3 odvodíme

$$\frac{R_\odot}{a} = \frac{r_{ob}}{f}, \qquad I = \frac{Sd^2a^2}{4f^2R_\odot^2} = \frac{Sd^2a^2\varphi^2}{4R_\odot^2}.$$

Teplota stébel trávy se ustálí na hodnotě T, při níž podle Stefanova-Boltzmannova zákona stéblo vyzařuje stejný zářivý tok, jaký přijímá od Slunce (respektive od obrazu Slunce vytvořeného spojnou čočkou). Úsek stébla délky l s příčným průřezem tvaru obdélníku o obsahu $2pl$, kde p je poloměr průřezu válcového stébla (obr. 6.4) pohltí zářivý tok $\Phi = I2pl$.



Obr. 6.3: K řešení úlohy 6.2



Obr. 6.4: K řešení úlohy 6.2

Podle Stefanova-Boltzmannova zákona tentýž úsek svým povrchem (část povrchu válce) $2\pi lp$ vyzáří výkon $\Phi = \sigma T^4 2\pi lp$. Z rovnosti obou toků vyplývá, že

$$2plI = \Phi = \sigma T^4 2\pi pl,$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{I}{\pi\sigma}}.$$

Po dosazení za I dostáváme

$$T = \sqrt[4]{\frac{Sd^2a^2\varphi^2}{4\pi\sigma R_\odot^2}} = \sqrt[4]{\frac{S}{\pi\sigma}}\sqrt{(n_\mathrm{v}-1)\frac{16dah}{2R_\odot(4h^2+d^2)}} \approx 1625\,\mathrm{K}$$

neboli

$$t_\mathrm{z} = 1352\,^\circ\mathrm{C}.$$

Zápalná teplota trávy se pohybuje okolo 230 °C až 250 °C, takže čočka Cyruse Smithe by k zapálení měla stačit.

Možná nás překvapí vysoká hodnota teploty t_z. Je zřejmé, že v praxi bychom pomocí dané čočky materiál s tak vysokou zápalnou teplotou nemohli podpálit. Velká část dodané energie se totiž vedením přenáší na jiné části stébla a vyzařuje do okolí, závisí samozřejmě i na povětrnostních podmínkách.

Odpověď na druhou otázku je jednoduchá. Obraz Slunce vzniká v ohniskové rovině čočky. Pro zadané hodnoty vychází optická mohutnost $\varphi = 5{,}7\,\mathrm{D}$ a odpovídající ohnisková vzdálenost $f = 1/\varphi = 17{,}6\,\mathrm{cm}$. Cyrus Smith držel čočku asi 17,6 cm nad zapalovanou suchou trávou.

Použité prameny

[1] BARTUŠKA, K., SVOBODA, E. *Fyzika pro gymnázia. Molekulová fyzika a termika.* Praha: Prometheus, 1993.

[2] BILIMOVIČ, B. F. *Fyzikální kvizy.* Moskva: Mir, 1981.

[3] BROŽ, J. A KOL. *Fyzikální a matematické tabulky.* Praha: SNTL, 1980.

[4] LEISCHNER P. Flintova teorie štípání dřeva. *Matematika-fyzika-informatika*, 1996, roč. **6**, s. 199–204.

[5] KRUŽÍK, M. *Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol.* Praha: SPN, 1979.

[6] MAKOVECKIJ, P. V. *Vezmi rozum do hrsti.* Moskva: Mir, 1985.

[7] MIKULČÁK, J. A KOL. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy.* Praha: Prometheus, 2009. ISBN: 978-80-7196-264-9.

[8] NAHODIL, J. *Sbírka úloh z fyziky kolem nás.* Praha: Prometheus, 2011. ISBN: 978-80-7196-409-4.

[9] PERELMAN, J. I. *Zajímavá astronomie.* Praha: Naše vojsko, 1954.

[10] PERELMAN, J. I. *Zajímavá mechnika.* Praha: Naše vojsko, 1953.

[11] *Fyzikální olympiáda* [online]. Dostupné z `http://fyzikalniolympiada.cz`.

[12] *Электронный архив журнала «Квант»* [online]. Dostupné z `http://kvant.mccme.ru`.

Jan Říha, Dagmar Kaštilová, Renata Holubová, Tomáš Medřík a Lukáš Richterek

Zajímavé úlohy z fyziky

Výkonný redaktor: prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Odpovědná redaktorka: Mgr. Jana Kreiselová
Technické zpracování systémem XƎLaTeX: Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Návrh obálky: Jiří Jurečka

Publikace neprošla ve vydavatelství redakční ani jazykovou úpravou.

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.upol.cz/vup
e-mail: vup@upol.cz

Olomouc 2012

1. vydání

Neprodejné

ISBN 978-80-244-3014-0