

Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra experimentální fyziky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Modelování parametrů FRW kosmologických
modelů v čase**



Autor:	Josef Pácalt
Studijní obor:	Aplikovaná fyzika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	7. 5. 2012

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D, a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých zdrojů.

V Olomouci

.....

Bibliografická identifikace:

Jméno a příjmení autora	Josef Pácalt
Název práce	Modelování parametrů FRW kosmologických modelů v čase
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2012
Abstrakt	Práce uvádí historii, rovnice a modely FRW teorie a modelování závislostí na rudém posuvu. V práci jsou uvedena současná měření a jejich modely.
Klíčová slova	FRW teorie, rudý posuv, decelerační parametr, Easy Java Simulation.
Počet stran	53
Počet příloh	1
Jazyk	Český

Bibliographical identification:

Autor's first name and surname	Josef Pácalt
Title	Computer modelling of the FRW cosmological models evolution in time
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2012
Abstract	Work presents history, equations and models of FRW theory and modelling dependences on redshift. In the work are presented actual measurements and their models.
Keywords	FRW theory, redshift, deceleration parameter, Easy Java Simulations.
Number of pages	53
Number of appendices	1
Language	Czech

Obsah

Úvod.....	6
1 Historie Fridmanových-Lemaîtreových-Robertsonových-Walkerových modelů vesmíru	8
1.1 Kosmologie	8
1.2 Alexandr Alexandrovič Fridman	8
1.3 Georges Lemaître.....	9
1.4 Howard Percy Robertson	10
1.5 Arthur Geoffrey Walker.....	10
2 Fridmanovy-Lemaîtreovy-Robertsonovy-Walkerovy modely	11
2.1 Kosmologický princip.....	11
2.2 Fridmanův-Lemaîtreův-Robertsonův-Walkerův model vesmíru	11
2.3 Kosmologický rudý posuv	12
2.4 Geometrie kosmologických modelů	14
2.5 Fridmanova rovnice	15
2.6 FLRW model pro plochý vesmír	17
2.7 Obecné řešení Fridmanovy rovnice	20
2.8 Decelerační parametr	23
3. Hodnoty kosmologických parametrů pro náš vesmír	25
4. Modelové příklady	29
4.1 Modely s $\Omega_v = 0$	29
4.2 Modely s $\Omega_v < 0$	32
4.4 Model Einsteinova statického vesmíru	39
4.5 Model současného vesmíru.....	41
5. Modelování rudého posuvu a stáří objektů	42
5.1 Závislost času a rudého posuvu	42
5.2 Závislost vzdálenosti na rudém posuvu	42
5.3 Modelování modulu vzdálenosti.....	44
Závěr	49
Seznam zdrojů.....	50
Knihy a publikace:	50
Internetové zdroje:	51
Přílohy.....	53

Úvod

Cílem této bakalářské práce je stručně popsat základní vlastnosti s Fridmanových-Lemaîtreových-Robertsonových-Walkerových modelů vesmíru a numericky řešit rovnice popisující jejich vývoj pomocí vhodného programu a vykreslit časové závislosti několika základních parametrů pro typické volby počátečních podmínek. Sledovanými parametry jsou škálovací faktor, decelerační parametr a modul vzdálenosti.

V literatuře bývají uváděny dvě různé verze jména Alexandra Fridmana. Výše uvedená je typická pro literaturu pocházející převážně z východní Evropy, především ruskou, většina anglosaské literatury uvádí tvar Alexander Friedman. V-práci je užívána forma Alexandr Fridman z toho důvodu, že se narodil v Petrohradě a proto ji lze považovat za původní.

Pozorování vesmíru stále pokračuje. Moderní kosmologie má k dispozici obrovské množství přesných dat, která umožňují studovat vlastnosti našeho pozorovatelného vesmíru, upřesňovat jeho zákony a předpovídat jeho budoucí vývoj. Během posledního století se naše představy dramaticky změnily. Významnými milníky bylo odvození obecné teorie relativity Albertem Einsteinem v roce 1915, které dalo moderní kosmologii a astrofyzice teoretický základ. Objev rozpínání vesmíru Edwinem Hubblem v roce 1929 definitivně prokázalo, že vesmír není statický, ale dynamicky se vyvíjí. V druhé polovině devadesátých let dvacátého století pak pozorování vzdálených supernov pozorování překvapující závěr, že rychlost rozpínání vesmíru se v současnosti neustále zvyšuje (dva týmy zabývající se touto problematikou – Supernova Cosmology Project a High-Z Supernova Search Team – byly v roce 2011 oceněny Nobelovou cenou za fyziku; viz http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/). Teoretické modely umožňují zkoumat různé volby kosmologických parametrů a porovnáním s pozorovanými daty vymezit hodnoty těchto parametrů pro náš skutečný vesmír a naopak vyloučit intervaly parametrů, jež realitě neodpovídají. S ohledem na zařazení této problematiky do výuky na PřF UP (např. v předmětech KEF/UOTR a KEF/PRKA – Úvod do obecné teorie relativity a Přehled relativistické astrofyziky a kosmologie) se zde zaměříme na základní výklad a jeho názornou ilustraci na konkrétních typických příkladech.

Při numerickém výpočtu se v textu užívá tzv. geometrodynamické soustavy jednotek, ve které jsou konstanty rychlost světla a gravitační konstanta rovny jedné; setkáváme se s ní ve většině klasických i moderních učebnic (viz např. [1, 11]). Značení funkcí a konstant popisující Fridmanův-Lemaîtreův-Robertsonův-Walkerův model vesmíru bylo zvoleno podle jedné z nejpoužívanějších učebnic obecné teorie relativity [1], značení funkcí a konstant závislosti modulu vzdálenosti na rudém posuvu bylo převzato z aktuálního přehledového článku [9].

V první kapitole jsou shrnuty základní rovnice pro časový vývoj expanzního faktoru, popsány základní parametry, s nimiž teoretický model pracuje a vysvětlen jejich fyzikální význam. Druhá kapitola pak zahrnuje výstupy numerického modelu vytvořeného ve volně dostupném multiplatformním prostředí Easy Java Simulations (<http://fem.um.es/Ejs/>). Výpis části programového kódu je součástí přílohy této práce.

Rád bych poděkoval Mgr. Lukáši Richterovi Ph.D. za odbornou pomoc, literaturu a trpělivost, potřebnou při tvorbě této práce.

1 Historie Fridmanových-Lemaîtreových-Robertsonových-Walkerových modelů vesmíru

1.1 Kosmologie

Jedním z odvětví astrofyziky je kosmologie, věda zabývající se vesmírem jako celkem. Předmětem studia je počátek a vývoj vesmíru. Většina kosmologických teorií současnosti uznává jako počátek vesmíru velký třesk. V této práci se budu zabývat modelem, který odvodili nezávisle na sobě z Einsteinových rovnic Alexandr Fridman [21] a Georges Lemaître [16]. Fridmanův-Lemaîtreův-Walkerův-Robertsonův model se v některých zdrojích označuje jako standardní kosmologický model [13].

Tento model dokáže popsat expandující i smršťující se vesmír a je v současné době uznáván jako velmi dobrá aproximace vývoje vesmíru. Dále bych chtěl upozornit, že tato teorie pracuje s metrikou [[13]], jež objevili Howard Percy Robertson a Arthur Geoffrey Walker, která popisuje závislost polohy pouze na vývoji jednoho parametru v čase a konstantním zakřivením prostoru.

Fridmanův-Lemaîtreův-Walkerův-Robertsonův model byl odvozen v průběhu několika let. K modelu nejvíce přispěli čtyři vědci a v dalších podkapitolách jsou uvedeny přínosy každého z nich

1.2 Alexandr Alexandrovič Fridman

Alexandr Alexandrovič Fridman se narodil 29. 6. 1888 v Petrohradě. V roce 1910 ukončil studium na petrohradské univerzitě. Poté působil na observatoři v Pavlovsku. Jeho práci přerušila první světová válka, které se účastnil. Na petrohradské univerzitě získal profesorský titul. V roce 1922 publikoval svou práci v německém časopise *Zeitschrift für Physik*[4]. O tři roky později tj. v roce 1925 se silně nachladil při letu v meteorologickém balonu a dne 16. 9. 1925 podlehl zápalu plic ve věku 37 let.

Obecná teorie relativity popisuje gravitační působení jako zakřivení prostoročasu. První model vycházející z teorie relativity publikoval roku 1917 sám Albert Einstein a narazil na problém, že model nemá statické řešení. V té době však panovalo přesvědčení, že vesmír je neměnný, z toho důvodu přidal Einstein do svých výpočtů dodatečný člen, který měl vyvažovat gravitační působení a udržet tak vesmír ve stálém stavu. Tento člen nazval kosmologickou konstantou. Fridman však odhalil v teorii problém. Když vhodným způsobem zavedeme kosmologickou konstantu je sice vesmír ve stavu rovnováhy, ale není stabilní. Seběmenší porucha by vedla buď



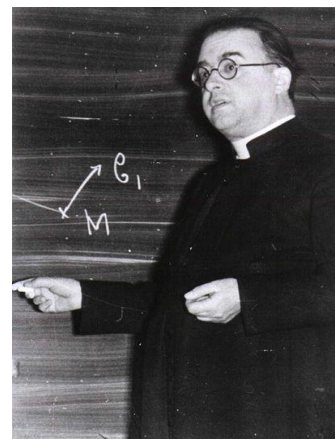
Obr. 1: Alexandr Alexandrovič Fridman (Upraveno dle [21])

k rozpínání nebo smršťování vesmíru. První práci na toto téma publikoval Fridman roku 1922 [4]. Einstein však poslal Fridmanovi odmítající dopis, neboť se domníval, že vesmír je skutečně neměnný. Fridman odpověděl Einsteinovi psaním, ve kterém dopodrobna vysvětlil své myšlenky, ale Einstein je odmítal prodiskutovat, dokud ho nepřesvědčil Fridmanův kolega Jurij Krutkov. Krátce na to vyšel ve stejném časopise omluvný článek [5], ve kterém se Einstein veřejně Fridmanovi omluvil a prohlásil, že jeho řešení je matematicky správné. Také se ukazuje, že je možné Fridmanovy rovnice získat z Newtonovského popisu vesmíru [8]. O šest let později tj. v roce 1929 astronomové potvrdili rozpínání vesmíru, avšak této zprávy se již Fridman nedožil. Nejprve zjistili, že vlnové délky světelného spektra blízkých galaxií jsou posunuty k červenému konci a nazvali jej rudý posuv. To byl neklamný důkaz vzdalování galaxií. Poslední krok provedl Edwin Hubble, když porovnal rychlosti 46 galaxií a zjistil, že rychlost je přímo úměrná vzdálenosti. To je do dnešní doby považováno za důkaz rozpínání vesmíru [18],[21].

1.3 Georges Lemaître

Celým jménem Monsignor Georges Henri Joseph Édouard Lemaître se narodil 17. července roku 1894 v Charleroi v Belgii. Studoval na katolické univerzitě v Leuvenu, ale jeho studia přerušila první světová válka, kdy sloužil u dělostřelectva. Po válce se dal opět na studia a věnoval se matematice a fyzice a zároveň se připravoval na kněžskou kariéru. Doktorát získal v roce 1920 a na kněze byl vysvěcen v roce 1923. Roku 1927 odvodil

soustavu rovnic vycházejících z Einsteinovy obecné teorie relativity nezávisle na Alexandru Fridmanovi a publikoval svou práci ještě téhož roku v *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* [6]. V této práci publikoval i tezi, že objekty se od nás vzdalují rychlostí, jejíž velikost je úměrná vzdálenosti. Tuto myšlenku posléze zpracoval Edwin Hubble. V roce 1931 přišel se základy teorie, jež později sarkasticky nazval astronom Fred Hoyle jako Velký třesk. Zemřel 20. června roku 1966 [20][16].



Obr. 2: Georges Lemaître
(Upraveno dle [16])

1.4 Howard Percy Robertson

Narodil se 27. ledna roku 1903 v Hoquiam ve státě Washington. Studoval na univerzitě ve Washingtonu a roku 1925 získal doktorát. Zabýval se matematickým vyjádřením křivek a ploch a jejich závislostí. Roku 1929 položil základ pro svou metriku pod názvem postulate of uniformity a tuto práci uveřejnil v roce 1933 v časopise *Review of Modern Physics* [7]. Během druhé světové války pracoval jako vědec pro armádu a po válce se stal zaměstnancem CIA. Zemřel 26. dubna roku 1961 [15],[12].

1.5 Arthur Geoffrey Walker

Arthur Geoffrey Walker se narodil 17. července roku 1909 ve Watfordu v Anglii. Vystudoval na univerzitě v Edinburghu, kde získal doktorát. Walker navázal na práci Robertsona a roku 1936 spolu dokončili konečnou verzi a dali tak Fridmanovu-Lemaîtreovu modelu metriku. Zemřel 31. března roku 2001.[14]

2 Fridmanovy-Lemaîtreovy-Robertsonovy-Walkerovy modely

2.1 Kosmologický princip

Kosmologický princip je dán třemi základními tezemi. První uvádí, že můžeme sledovat vesmír z jakéhokoliv místa, nemusíme se omezovat pouze na Zemi, druhá předpokládá, že ve všech místech vesmíru platí stejné fyzikální zákony a konečně třetí praví, že různé druhy kosmických objektů neporušují základní fyzikální zákony. Z těchto tezí plynou dva důsledky, požadavek na izotropii a homogenitu vesmíru jako celku [1].

2.2 Fridmanův-Lemaîtreův-Robertsonův-Walkerův model vesmíru

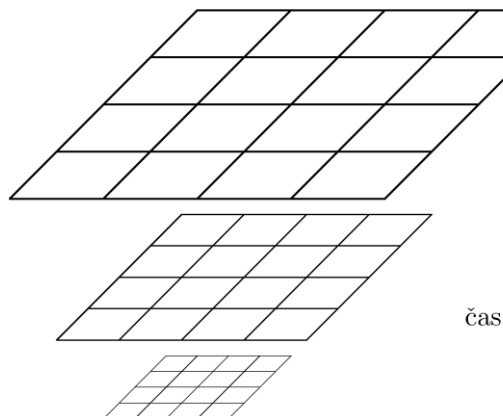
Fridmanův-Lemaîtreův-Robertsonův-Walkerův (FLRW) model vesmíru je vystavěn na několika předpokladech. Předpokládá, že vesmír je homogenní, tedy každé místo ve vesmíru je stejné jako jiné, a izotropní, tedy ve všech směrech má totožné vlastnosti. Rozložení galaxií ve vesmíru však homogenní není, přesto aproximace homogenity dává poměrně přesné výsledky shodující se se skutečností.

V matematickém řešení předpokládáme, že vesmír je tvořen třemi neinteragujícími složkami: hmotou, jedná se o takzvaný prach, záření a vakuem. Hmotu si můžeme představit jako rovnoměrně rozptýlené částice. Záření obsahuje fotony vesmírného pozadí, ale také částice podobné neutrinům, tedy částice s nulovou nebo téměř nulovou klidovou hmotností a velkou rychlostí. Třetí složku, kterou musíme vzít v úvahu je energie vakua. Tyto složky spolu interagovaly v raném stádiu vesmíru, avšak v tomto modelu je považujeme za neinteragující. Složek je více avšak těmto se přisuzuje největší zastoupení ve vesmíru.

Dále tento model uvažuje určitý souřadný systém s Robertson-Walkerovou metrikou. Tento souřadný systém je zvláštní tím, že přestože se galaxie mohou díky expanzi, nebo smršťování od sebe vzdalovat, či přibližovat, zachovává vzdálenost mezi těmito galaxiemi v souřadném systému stejnou. Skutečná vzdálenost s časem se mění spolu se škálovacím faktorem podle vztahu ([19])

$$r = a(t)x, \quad (1)$$

Kde r je skutečná vzdálenost a x je vzdálenost v souřadném systému.



Obr. 3: *comoving* souřadnice

Takovémuto souřadnému systému se v anglosaské literatuře říká *comoving* souřadnice. Nejblíže český pojem, který se v této souvislosti používá je souřadný systém unášený expanzí [19].

2.3 Kosmologický rudý posuv

Robertson-Walkerova geometrie je časově závislá díky závislosti na škálovacím faktoru. Energie fotonu se mění při pohybu v tomto prostoročase, protože se při expanzi či smršťování mění jeho frekvence. Této závislosti říkáme kosmologický rudý posuv. Představme si expandující vesmír a dva pozorovatele, jež mají mezi sebou v Robertson-Walkerově metrice vzdálenost r vůči *comoving* souřadnicím a jeden z nich vyšle dva po sobě jdoucí signály v časech t_e a $t_e + \delta t_e$, tak příjemce těchto signálů je přijme v časech t_0 a $t_0 + \delta t_0$ a bude platit, že $\delta t_0 > \delta t_e$ z toho důvodu se změní i frekvence. Je to zapříčiněno protažením vzdálenosti mezi nimi, tedy druhý signál musí urazit delší dráhu a zároveň tedy musí dojít ke zmenšení frekvence v důsledku Dopplerova jevu. Tato závislost je matematicky popsána vztahem ([1]):

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)} \quad (2)$$

Označíme-li vlnovou délku vyslaného záření jako λ_e a vlnovou délku již jsme přijali jako λ_0 pak je rudý posuv definován vztahem ([1])

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}, \quad (3)$$

kde z je číselná hodnota rudého posuvu, ω_e je úhlová frekvence emitovaného záření, kterou lze určit ze vztahu $\omega_e = 2\pi c/\lambda_e$. Obdobně lze vypočítat frekvenci přijatého záření ω_0 . Parametr $a(t_e)$ je velikost škálovacího faktoru v době, kdy bylo záření vysláno a $a(t_0)$ je velikost škálovacího faktoru v současné době.

Mějme speciální případ, kdy galaxie, jež emitovala záření, je blízko, tedy vzdálenost R odpovídá vzdálenostem blízkých galaxií. Pak vzdálenost, jež záření urazilo lze zapsat jako ([1])

$$d = a(t_0)R. \quad (4)$$

Ve zdroji [1] je dokázáno, že pro malé vzdálenosti platí

$$(t_0 - t_e)^2 = (\Delta t)^2 = a^2(t_0)R^2 = d^2 \quad (5)$$

Po dosazení získáváme z rovnice (3) a (5) vztah

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_e) - a(t_0)}{a(t_0)} = \left[\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \right] d, \quad (6)$$

kde λ_e je původní vlnová délka, $\Delta\lambda$ je rozdíl mezi přijatou a původní vlnovou délkou, a je škálovací faktor metriky t_0 je současný čas, \dot{a} je časová derivace da/dt a d je malá vzdálenost. Tato rovnice je Hubbleovým zákonem pro Robertson-Walkerovu metriku, protože odsud získáváme

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (7)$$

Hubbleův parametr ($H(t)$) není v čase stálý, protože závisí na škálovacím faktoru. Z rovnice je patrné, že tento parametr má rozměr inverzního času. Současná hodnota Hubbleova parametru se nazývá Hubbleova konstanta a má hodnotu:

$$H_0 \equiv H(t_0) \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \doteq 70 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \quad (8)$$

Hubbleova konstanta se také často definuje vztahem pro rychlost vzdalování galaxií V , jež přímo úměrná vzdálenosti od pozorovatele d a platí vztah:

$$V = \frac{H_0 d}{c} \quad (9)$$

Inverzní hodnota Hubbleovy konstanty se nazývá Hubbleův čas t_h , jehož hodnota je v současnosti

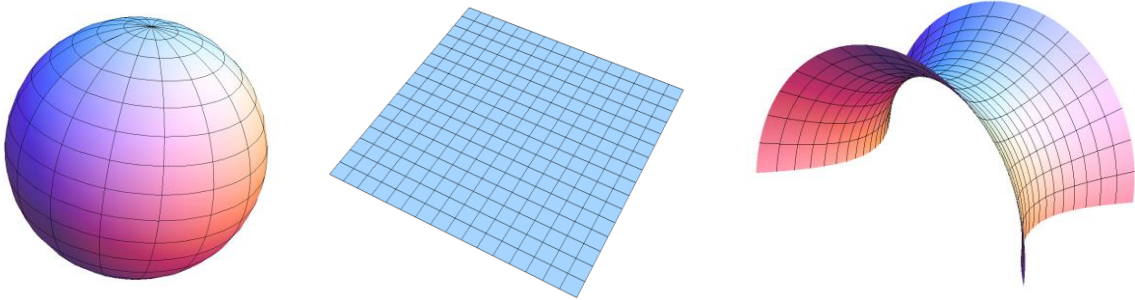
$$t_h = \frac{1}{H_0} \doteq 13,97 \text{ Gyr}, \quad (10)$$

kde 1 Gyr je jedna miliarda let tedy 10^9 let. Kdyby expanze vesmíru měla stále stejnou rychlost, tento čas by odpovídal stáří vesmíru.

2.4 Geometrie kosmologických modelů

Pro zakřivený vesmír uvažujeme dvě varianty, uzavřený model a otevřený model. Pod pojmem uzavřený model vesmíru rozumíme vesmír, který si ve dvojrozměrné analogii můžeme představit jako kulovou plochu, které se mění poloměr v závislosti na škálovacím faktoru. V daném okamžiku má tedy tato kulová plocha konečný povrch, ale žádné omezení v rozpínání. Konstantní křivost tohoto modelu je $k = 1$. Hranici mezi uzavřenými a otevřenými modely vesmíru je takzvaný plochý model vesmíru, jehož vlastností je, že má ve všech místech nulovou křivost, tedy $k = 0$. Pod pojmem otevřený model vesmíru rozumíme vesmír, který se popisuje jako homogenní izotropní Lorentzův hyperboloid [1]. Tento útvar má v každém okamžiku nekonečný povrch a navíc opět není

omezen v rozpínání. Ve dvourozměrné analogii odpovídá sedlové ploše. Jeho křivost je dána vztahem $k = -1$



Obr. 4: Dvourozměrné analogie povrchů modelů vesmíru. Pro uzavřený(vlevo), pro plochý(uprostřed), pro otevřený(vpravo) (Získáno od vedoucího bakalářské práce Mgr. Lukáše Richterka Ph.D).

Díky konstantní křivosti lze zapsat každý element prostoročasu ds ve sférických souřadnicích (t, l, θ, φ) rovností ([9])

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[dl^2 + S_k^2(l)d\Omega^2], \quad (11)$$

kde c je rychlost světla, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ a $S_k(l)$ v sobě nese informaci o zakřivení prostoru a je dán vztahem:

$$S_k(r) = \begin{cases} a_0 \sin(l/a_0) & \text{pro } k = 1 \\ l & \text{pro } k = 0 \\ a_0 \sinh(l/a_0) & \text{pro } k = -1 \end{cases} \quad (12)$$

2.5 Fridmanova rovnice

Fridmanova rovnice je nejčastěji psána ve tvaru([2]):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (13)$$

Kde \dot{a} je časová derivace da/dt , G je gravitační konstanta, c je rychlost světla ve vakuu, ρ je hustota částic a k je konstanta popisující zakřivení vesmíru (viz kapitola 2.4 Geometrie kosmologických modelů).

Pro zjednodušení výpočtů se užívá tzv. geometrodynamické soustavy jednotek. V této soustavě si zjednodušujeme výpočty tím, že položíme gravitační konstantu a rychlost světla rovnu jedné.

Fridmanova rovnice pro zakřivený vesmír je po zjednodušení ([1]):

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi\rho}{3}a^2 = -k \quad (14)$$

Po dosazení hodnot pro současný čas (t_0), současné hustoty (ρ_0) a podělení rovnice $a^2(t)$ získáváme:

$$H_0^2 - \frac{8\pi\rho_0}{3} = -\frac{k}{a_0^2} \quad (15)$$

Z podkapitoly 2.4 víme, že plochý vesmír je mezník (ve smyslu popisu modelů podle křivosti) mezi otevřeným a uzavřeným vesmírem. Hustota plochého vesmíru je tedy mezní konstantou, z toho důvodu ji nazýváme kritickou hustotou (ρ_{krit}). Po dosazení $k = 0$ a $\rho_0 = \rho_{\text{krit}}$ do rovnice (13) získáváme:

$$H_0^2 - \frac{8\pi\rho_{\text{krit}}}{3} = 0 \quad (16)$$

Hodnota této hustoty v současné době tedy je v soustavě SI

$$\rho_{\text{krit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \doteq 2,6 \cdot 10^{41} \frac{\text{kg}}{\text{Mpc}^3} \quad (17)$$

Jestliže je současná hustota ρ_0 větší než kritická hodnota ρ_{krit} , pak je vesmír kulově zakřivený, uzavřený a konstanta $k = 1$, jestliže je ρ_0 menší než kritická hodnota ρ_{krit} , pak je vesmír hyperbolicky zakřivený, otevřený a konstanta $k = -1$. Je-li však ρ_0 právě rovno ρ_{krit} , pak je náš vesmír plochý a konstanta $k = 0$.

Z toho plyne, že právě H_0 a ρ_0 určují o jaký model vesmír se jedná. Obvykle se v kosmologii používá hustotní parametr, který zavádíme jako:

$$\Omega \equiv \frac{\rho_0}{\rho_{\text{krit}}} \quad (18)$$

Pro plochý mode vesmíru máme požadujeme, aby $\Omega = 1$. Pro prostory s kladnou křivostí zakřivené (tedy pro $k = 1$) požadujeme, aby $\Omega > 1$. Obdobně pro prostory se zápornou křivostí (tedy pro $k = -1$) požadujeme, aby $\Omega < 1$. Kdyby se nám podařilo změřit současnou hustotu vesmíru a určit Ω pak bychom mohli stanovit zakřivení našeho vesmíru. Tato úvaha však není uskutečnitelná a to z toho důvodu, že v současné době nejsme schopni určit experimentálně hustotu energie vakua a množství temné hmoty ve vesmíru. Ukazuje se, že dalším problémem je i podobnost našeho vesmíru s vesmírem plochým a to z toho důvodu, že hodnota hustoty současného vesmíru ρ_0 je velmi blízko kritické hodnotě hustoty ρ_{krit} .

2.6 FLRW model pro plochý vesmír

Podívejme se na takzvaný plochý Fridmanův vesmír s Robertson-Walkerovou metrikou. Fridmanova rovnice v tomto případě je

$$H_0^2 - \frac{8\pi\rho}{3} = 0 \quad (19)$$

kde ρ je hustota hmoty. Tato rovnice je speciální případ Fridmanovy rovnice (11). Plochý model má svoji křivost nulovou.

Hustota je složena ze tří složek, hustoty energie vakua (ρ_v), hustoty záření (ρ_r) a hustoty hmoty (ρ_m). Hustota hmoty se mění v čase v závislosti na škálovacím faktoru a to vztahem ([1])

$$\rho_m(t) = \rho_m(t_0) \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^3, \quad (20)$$

podobně můžeme zapsat vztah pro ρ_r ([1])

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0) \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^4, \quad (21)$$

a vztah pro ρ_v je dán jako ([1])

$$\rho_v(t) = \rho_v(t_0). \quad (22)$$

V současné době neexistuje teorie, která by určila hodnotu vakuové energie, ani teorie která by popisovala vývoj této energie v čase, budeme v tomto textu předpokládat, že tato energie vakua je konstantní v čase i prostoru a kladná. Pro výpočty je vhodné uvádět hustotní faktory, které se obvykle značí jako

$$\Omega_m = \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_{\text{krit}}}, \quad (23)$$

$$\Omega_r = \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_{\text{krit}}}, \quad (24)$$

$$\Omega_v = \frac{\rho_v(t_0)}{\rho_{\text{krit}}}, \quad (25)$$

kde platí podmínka pro ploché modely vesmíru

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v \equiv \Omega = 1. \quad (26)$$

Pro další výpočty definujeme normovací vztah

$$a(t_0) = 1; \quad (27)$$

okamžitou výhodou je, že můžeme přepsat rovnici (26) na

$$\rho(a) = \rho_{\text{krit}} \left(\Omega_{\text{v}0} + \frac{\Omega_{\text{m}0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\text{r}0}}{a^4} \right); \quad (28)$$

Index 0 u hustotních parametrů značí současný stav daného parametru. Za pomoci předešlých vztahů můžeme zapsat rovnici (19) ve tvaru

$$\frac{1}{2H_0^2} \dot{a}^2 + U_{\text{ef}}(a) = 0, \quad (29)$$

kde

$$U_{\text{ef}}(a) \equiv -\frac{1}{2} \left(\Omega_{\text{v}} a^2 + \frac{\Omega_{\text{m}}}{a} + \frac{\Omega_{\text{r}}}{a^2} \right). \quad (30)$$

Rovnice (30) je analogií pohybu klasické částice v konzervativním poli s potenciálem U_{ef} [1].

Rovnici (29) můžeme řešit pro každou složku zvlášť, dosadíme-li zpět, získáváme pro model s převládající hustotou hmoty, tedy pro $\Omega_{\text{m}} = 1$, $\Omega_{\text{r}} = 0$, $\Omega_{\text{v}} = 0$ ([1])

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad (31)$$

pro model s převládající hustotou záření $\Omega_{\text{m}} = 0$, $\Omega_{\text{r}} = 1$, $\Omega_{\text{v}} = 0$ ([1])

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}, \quad (32)$$

pro model s převládající hustotou energie vakua $\Omega_{\text{m}} = 0$, $\Omega_{\text{r}} = 0$, $\Omega_{\text{v}} = 1$ ([1])

$$a(t) = e^{H(t-t_0)}, \quad (33)$$

kde

$$H^2 \equiv \frac{8\pi\rho_v}{3} = \frac{\Lambda}{3}. \quad (34)$$

kde Λ je kosmologická konstanta v soustavě SI je definována jako

$$\Lambda = \frac{8\pi G\rho_v}{c^4}. \quad (35)$$

V tomto případě je Hubbleův parametr konstantní v čase.

Ve všech třech případech expanduje vesmír s časem bez omezení. V modelu s převládající hustotou hmoty a hustotou záření vesmír začíná v singularitě pro $a = 0$ a $t = 0$, v tomto případě myslíme singularitou takový stav, kdy hustota roste nade všechny meze. Počátek vesmíru v čase $t = 0$ nazýváme velký třesk. Pro převládající hustotu vakuové energie je a jdoucí k nule pro $t = -\infty$. V našem vesmíru jsou zastoupeny všechny složky a v průběhu vývoje vesmíru se mění jejich vzájemný poměr, vždy lze jednu považovat za dominantní. Na počátcích je vesmír ve fázi dominantního záření, protože zastoupení záření klesá nejrychleji s časem, postupně přejde vesmír do fáze, kdy převládá hustota hmoty a vakua. Protože i hustota hmoty s časem klesá můžeme tvrdit, že rozpínání vesmíru je nyní převážně dáno exponenciální závislostí hustoty energie vakua.

2.7 Obecné řešení Fridmanovy rovnice

Pro názornější výklad Fridmanových modelů se často používá přeškálovaných bezrozměrných proměnných([1]). Přeškálování se provádí pomocí současných hodnot parametrů. Typickou ukázkou je bezrozměrný škálovací faktor definován jako

$$\tilde{a}(t) \equiv \frac{a(t)}{a_0} = a(t). \quad (36)$$

Tato rovnost je dána normovacím vztahem (27). Škálovací faktor má přímou spojitost s velikostí rudého posuvu z světla přicházejícího ze vzdálených galaxií a platí

$$\tilde{a} = \frac{1}{1+z}, \quad (37)$$

tuto rovnost lze získat přepsáním rovnice (2). Obdobně přeškálujeme i čas

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_H} = H_0 t \quad (38)$$

Kritická hustota představuje odpovídající konstantu pro hustoty. Současné hodnoty dílčích hustot mohou být právě přeškálovány pomocí hodnoty kritické hustoty. Jako příklad uvedme přeškálovanou hustotu záření plynoucí z rovnic (21) a (24)

$$\tilde{\rho}_r(t) = \frac{\rho_{\text{krit}} \Omega_r}{\tilde{a}(t)^4}. \quad (39)$$

Podobným způsobem lze přepsat i zbývající hustoty. Chceme-li získat obecné řešení Fridmanovy rovnice, zavádíme ještě parametr, který zjednodušuje člen, popisující křivost vztahem ([1])

$$\Omega_c = \frac{-k}{(H_0 a_0)^2}. \quad (40)$$

Pro uzavřený vesmír může Ω_c nabývat i záporných hodnot. Z rovnice (14) získáváme:

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_v + \Omega_c = 1 \quad (41)$$

Jako výsledek z rovnice (14) můžeme psát přeškálovanou Fridmanovu rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{a}}{dt} \right)^2 + U_{ef}(\tilde{a}) = \frac{\Omega_c}{2}, \quad (42)$$

kde U_{ef} je definován obdobně jako v rovnici (30) a v přeškálovaných proměnných ho můžeme zapsat jako

$$U_{\text{ef}}(\tilde{a}) \equiv -\frac{1}{2} \left(\Omega_{\text{v}} \tilde{a}^2 + \frac{\Omega_{\text{m}}}{\tilde{a}} + \frac{\Omega_{\text{r}}}{\tilde{a}^2} \right). \quad (43)$$

Opět se na tuto rovnici (43) můžeme podívat jako na rovnici energie Newtonovské částice.

Postup při vytváření kosmologického modelu je tedy následující. Nejprve zadáme parametry $H_0, \Omega_{\text{r}}, \Omega_{\text{m}}, \Omega_{\text{v}}$. Z těchto poté nalezneme parametr $\tilde{a}(\tilde{t})$ tak, že napíšeme

$$d\tilde{t} = \frac{d\tilde{a}}{[\Omega_{\text{c}} - 2U_{\text{ef}}(\tilde{a})]^{\frac{1}{2}}} \quad (44)$$

obě strany rovnice vyintegrujeme. Nakonec přejdeme od \tilde{t} k t pomocí Hubbleovy konstanty H_0 a nalezneme hodnotu a_0 z (40). Škálovací faktor získáme vztahem:

$$a(t) = \frac{\tilde{a}(H_0 t)}{H_0 |\Omega_{\text{c}}|^{\frac{1}{2}}} \quad (45)$$

Řešení přeškálované Fridmanovy rovnice (42) určuje škálovací faktor $a(t)$ jako funkci času a navíc přesně určuje naši polohu v čase pomocí t_0 podle rovnice (36). Definicí \tilde{a} v rovnici (44) získáváme vztah pro současný moment \tilde{t}_0

$$\tilde{a}(\tilde{t}_0) = 1 \quad (46)$$

a současné stáří vesmíru zjistíme z rovnice (33) jako

$$t_0 = \frac{\tilde{t}_0}{H_0}. \quad (47)$$

FRLW kosmologický model je tedy určen čtyřmi kosmologickými parametry $H_0, \Omega_{\text{r}}, \Omega_{\text{m}}, \Omega_{\text{v}}$. Tyto parametry určují současný stav, ale zároveň stejně dobře popisují vývoj historie vesmíru a předurčují jeho vývoj v budoucnosti. Ostatní vlastnosti vesmíru jsou dány jako funkce těchto čtyřech parametrů. Cíl při pozorování vesmíru tedy je co nejpřesněji

odhadnout hodnoty těchto čtyř parametrů a úkolem teoretických modelů je vysvětlit proč tyto parametry nabývají právě těchto hodnot.

2.8 Decelerační parametr

Decelerační parametr q zavádíme k popisu zrychlování, či zpomalování rychlosti expanze a je dán vztahem ([19])

$$q = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{(\dot{a}(t))^2} \quad (48)$$

kde \dot{a} je první časová derivace a \ddot{a} je druhá časová derivace. Takto definovaný decelerační parametr je tedy bezrozměrný. Je-li parametr $q < 0$ pak se rychlost expanze s časem zvyšuje, tedy rozpínání se zrychluje, je-li parametr $q > 0$ pak se rychlost expanze s časem snižuje, tedy rozpínání se zpomaluje nebo rychlost smršťování roste. Je-li $q = 0$ pak je rychlost rozpínání konstantní. Pro přechod k parametrům Ω_m , Ω_r , Ω_v určíme nejprve druhou časovou derivaci škálovacího faktoru zderivováním rovnice (42) a získáváme

$$\frac{d^2\tilde{a}}{dt^2} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{da} = \Omega_v\tilde{a} - \frac{\Omega_m}{\tilde{a}^2} - 2\frac{\Omega_r}{\tilde{a}^3} \quad (49)$$

dosadíme do rovnice (48) relace (41), (42) a (49) získáváme vztah:

$$q = \frac{\frac{\Omega_r}{\tilde{a}^2} + \frac{\Omega_m}{2\tilde{a}} - \Omega_v\tilde{a}^2}{1 + \Omega_r\left(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1\right) + \Omega_m\left(\frac{1}{\tilde{a}} - 1\right) + \Omega_v(\tilde{a}^2 - 1)} \quad (50)$$

Uvažujeme-li model s dominantní Ω_m tedy $\Omega_m = 1$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_v = 0$, pak vychází decelerační parametr ve tvaru:

$$q_m = \frac{\Omega_m}{2[\tilde{a} + \Omega_m(1 - \tilde{a})]} \quad (51)$$

Jestliže pracujeme s modelem s dominantní Ω_r tedy $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 1$, $\Omega_v = 0$, pak vychází decelerační parametr ve tvaru:

$$q_r = \frac{\Omega_r}{\tilde{a}^2 + \Omega_r(1 - \tilde{a}^2)} \quad (52)$$

Pro model s dominantní Ω_v tedy $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_v = 1$, pak vychází decelerační parametr ve tvaru:

$$q_v = -\frac{\Omega_v \tilde{a}^2}{1 + \Omega_v(\tilde{a}^2 - 1)} \quad (53)$$

Z rovnic (51) a (52) je patrné, že q_m a q_r jsou kladné a parametry Ω_m a Ω_r přispívají ke zpomalování rychlosti rozpínání vesmíru, oproti tomu q_v je záporný a kladná hodnota parametru Ω_v přispívá naopak k zvyšování rychlosti rozpínání vesmíru

Podíváme-li se na tento parametr v čase t_0 pak z rovnice (50) dostáváme

$$q_0 = \Omega_r + \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_v, \quad (54)$$

parametr a se již v rovnici neobjevuje díky normovacímu vztahu (36). Dále víme ze vztahu (21), že hustota energie záření klesá rychleji oproti hustotě hmoty. Když zanedbáme Ω_r a přepíšeme vztah pro q_0 získáváme

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_v, \quad (55)$$

zde můžeme rozlišit tři případy, jestliže bude parametr $q_0 < \frac{1}{2}$, pak je $\rho_0 < \rho_{\text{krit}}$ a jedná se o modely otevřených vesmírů, jestliže bude $q_0 > \frac{1}{2}$, pak je $\rho_0 > \rho_{\text{krit}}$ a jedná se o uzavřené vesmíry, jestliže $q_0 = \frac{1}{2}$, pak je $\rho_0 = \rho_{\text{krit}}$ a jedná se o ploché modely vesmíru.

3. Hodnoty kosmologických parametrů pro náš vesmír

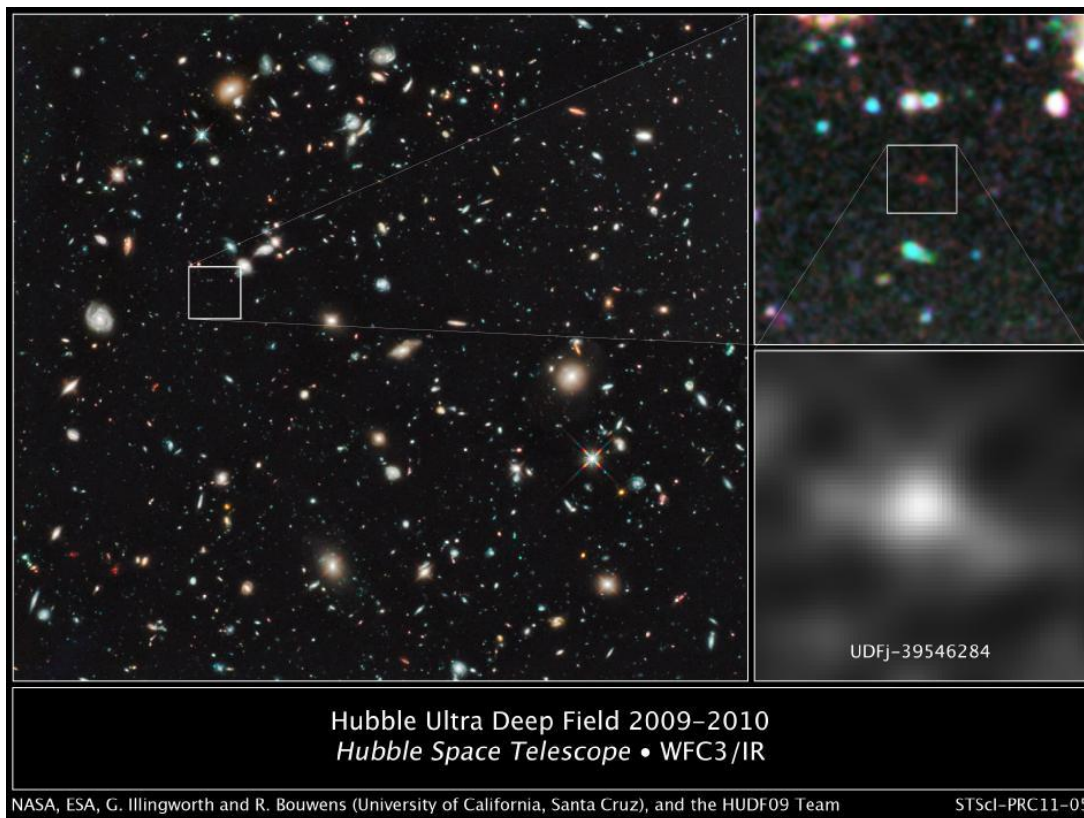
Díky stále přesnějším, dokonalejším metodám i technickému vybavení dnes kosmologie není jen teoretickou záležitostí. S větší a větší přesností jsme schopni vymezovat hodnoty výše zmiňovaných veličin pro náš pozorovatelný vesmír. Během dvacátého století se otevřely možnosti pozorování mimo optickou oblast (v oblasti rádiových vln, infračerveného záření, ultrafialového i RTG záření). Z nejvýznamnějších přístrojů a observatoří připomeňme Hubbleův kosmický dalekohled, Chandra X-ray Observatory, ESO (the European Southern Observatory) či družice WMAP, Planck a Herschel. Při mapování velmi vzdálených galaxií pomocí Hubbleova teleskopu (tzv. Hubble Ultra Deep Field) byly zachyceny zárodky galaxií ve vzdálenosti okolo 13 miliard světelných let, jež patří zřejmě k nejvzdálenějším pozorovaným objektům (viz.obr.5).

Nejpřesnější údaje získáváme pomocí analýzy reliktního mikrovlnného záření, která dokládají, že náš vesmír je buď přesně plochý a má euklidovskou geometrii, nebo je velmi blízký tomuto stavu. Nepravděpodobnější hodnoty vybraných parametrů získané sedmiletou analýzou dat sondy WMAP a tzv. baryonových akustických oscilací ve velmi raném vesmíru [3] uvádíme přehledně v tabulce. Na tyto hodnoty se pak budeme odvolávat v numerických modelech.:

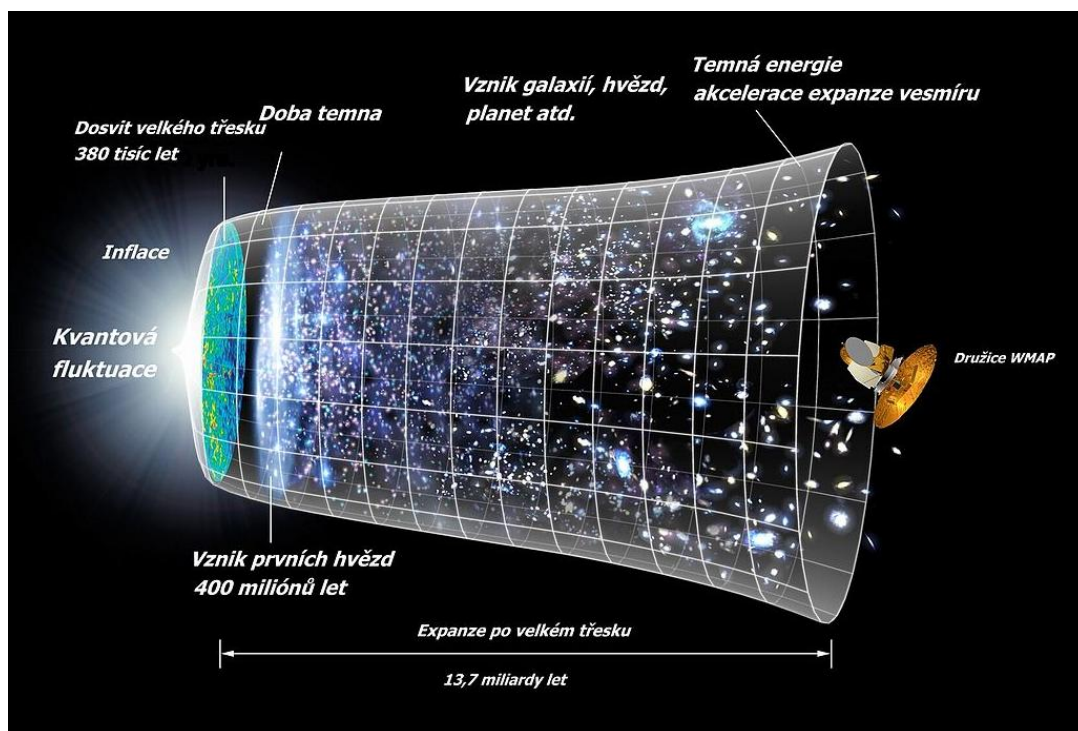
Tabulka 1: Parametry vesmíru získané analýzou dat sondy WMAP

Ω_m	$0,272 \pm 0,014$
Ω_v	$0,728^{+0,015}_{-0,016}$
Ω_r	$(8,42 \pm 0,14) \cdot 10^{-5}$
H_0	$70,4^{+1,3}_{-1,4} \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$
t_0	$(13,75 \pm 0,11) \text{ Gy}$

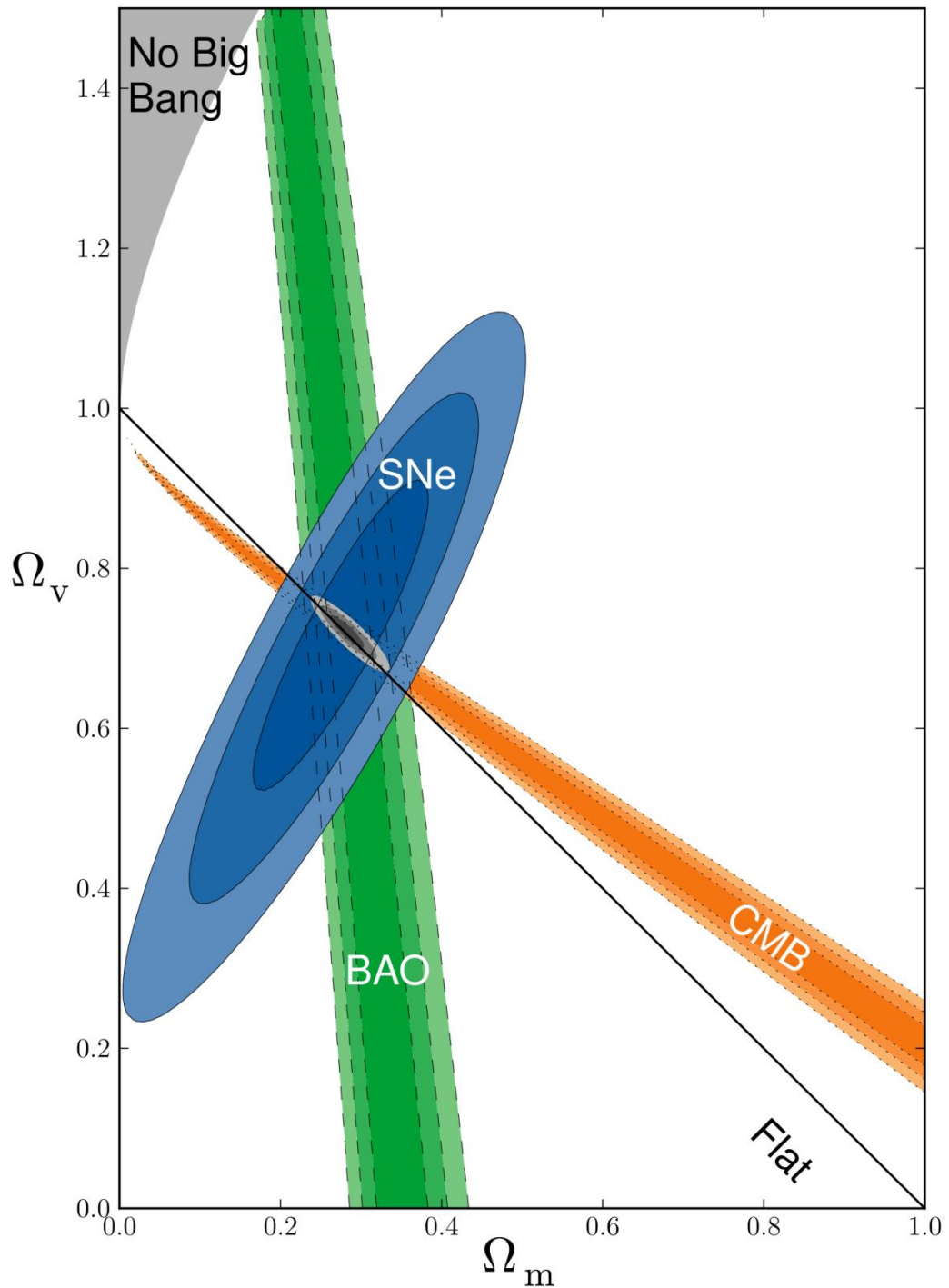
Význam volby kosmologických parametrů pro vývoj vesmíru a stanovení intervalů jejich hodnot určených různými nezávislými pozorovacími projekty jsou názorně ilustrovány na obr.7 a obr.8.



Obr.5: Snímek zárodků galaxií ve vzdálenosti 13,2 miliard světelných let, které jsou zřejmě prozatím nejvzdálenějšími pozorovanými objekty. Fotografie vznikla složením řady snímků pořízených v letech 2009–2010 Hubbleovým vesmírným dalekohledem (Upraveno dle: NASA, ESA, G. Illingworth (University of California, Santa Cruz), R. Bouwens (University of California, Santa Cruz and Leiden University), and the HUDF09 Team).

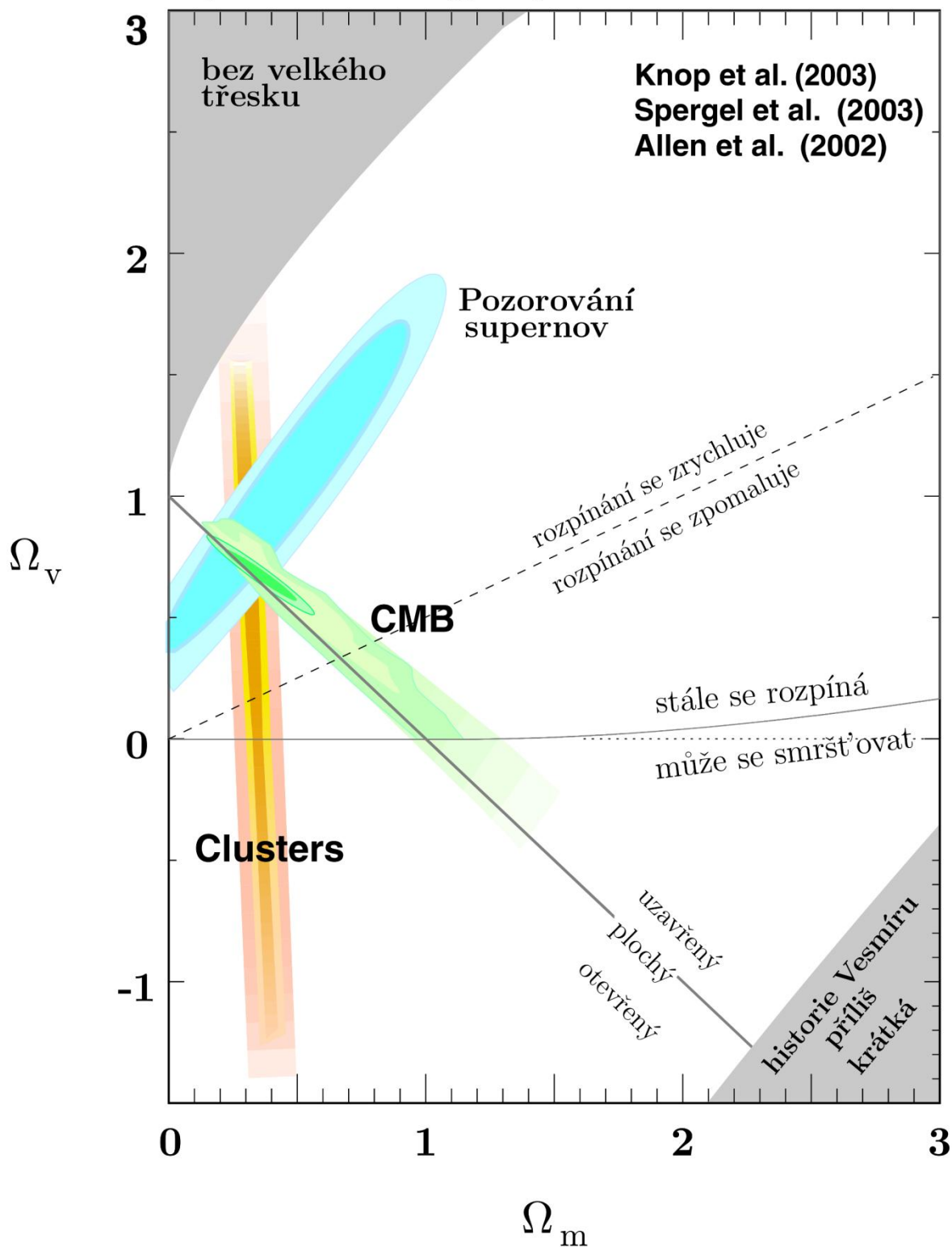


Obr. 6: Současná představa o vzniku vesmíru opírající se o existenci temné hmoty a temné energie (Upraveno podle *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Vesmír* [online]. c2012 [citováno 1. 05. 2012]. Dostupný z WWW: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Vesm%C3%ADr&oldid=8527431>).



Obr. 7: Jedno z nejaktuálnějších fitování hodnot Ω_m a Ω_v na základě několika různých typů pozorování – sledování vzdálených supernov rámci projektu Supernova Cosmology Project, analýzy dat sondy WMAP a modelování baryonových akustických oscilací. Vyznačené oblasti odpovídají hladině spolehlivosti 68,3 %, 95,4 % a 99,7 % (Upraveno podle Suzuki, N. a kol.: The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above $z > 1$ and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample. *Astrophys. J.*, 2012, 746, s. 85. E-print: arXiv:1105.3470 [astro-ph.CO]).

Supernova Cosmology Project

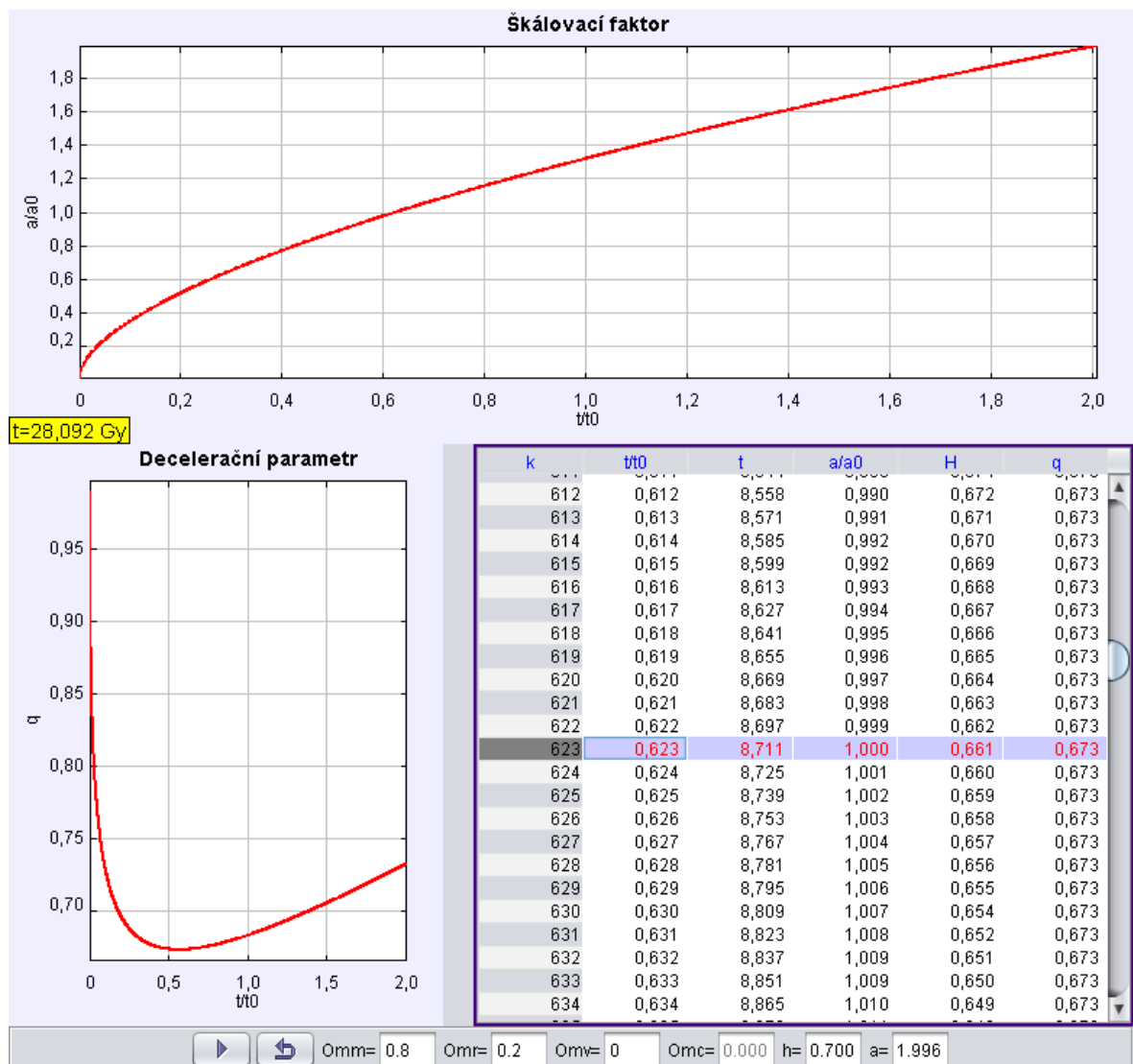


Obr. 8: Různé varianty vývoje vesmíru v závislosti na hodnotách parametrů Ω_m a Ω_v . Znáznorněny jsou výsledky pozorování vzdálených supernov, analýzy reliktního mikrovlnného záření a modelování clusterů galaxií (Upraveno podle Perlmutter S.: *Supernovae, Dark Energy, and the Accelerating Universe*, *Physics Today*, April 2003, 56(4), s. 53).

4. Modelové příklady

4.1 Modely s $\Omega_v = 0$

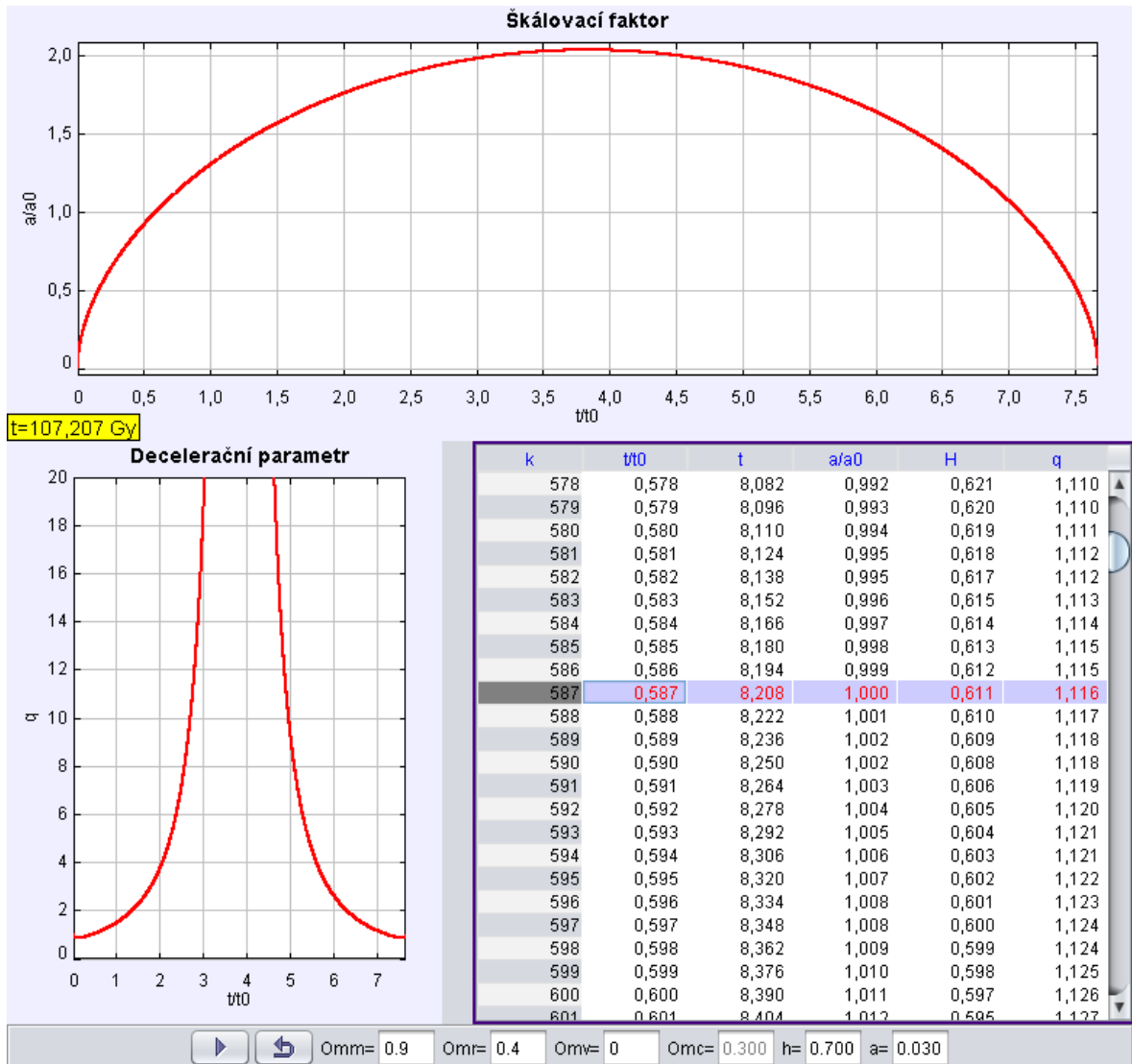
Jako první model uvádím model plochého ($\Omega_c = 0$) vesmíru s hodnotou parametru $\Omega_v = 0$, zbývající parametry jsou $\Omega_m = 0,8$, $\Omega_r = 0,2$. Tento model se nazývá Einsteinův-de Sitterův model [11]:



Obr.9: Einsteinův-de Sitterův model vesmíru

Tento model se bude rozpínat do nekonečna, rozpínání se stále zpomaluje. Stáří vesmíru pro tento model (8,711 Gy) je mnohem menší než naměřený údaj z kapitoly 3. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = 0$ a kosmologickou konstantou $\Lambda = 0$.

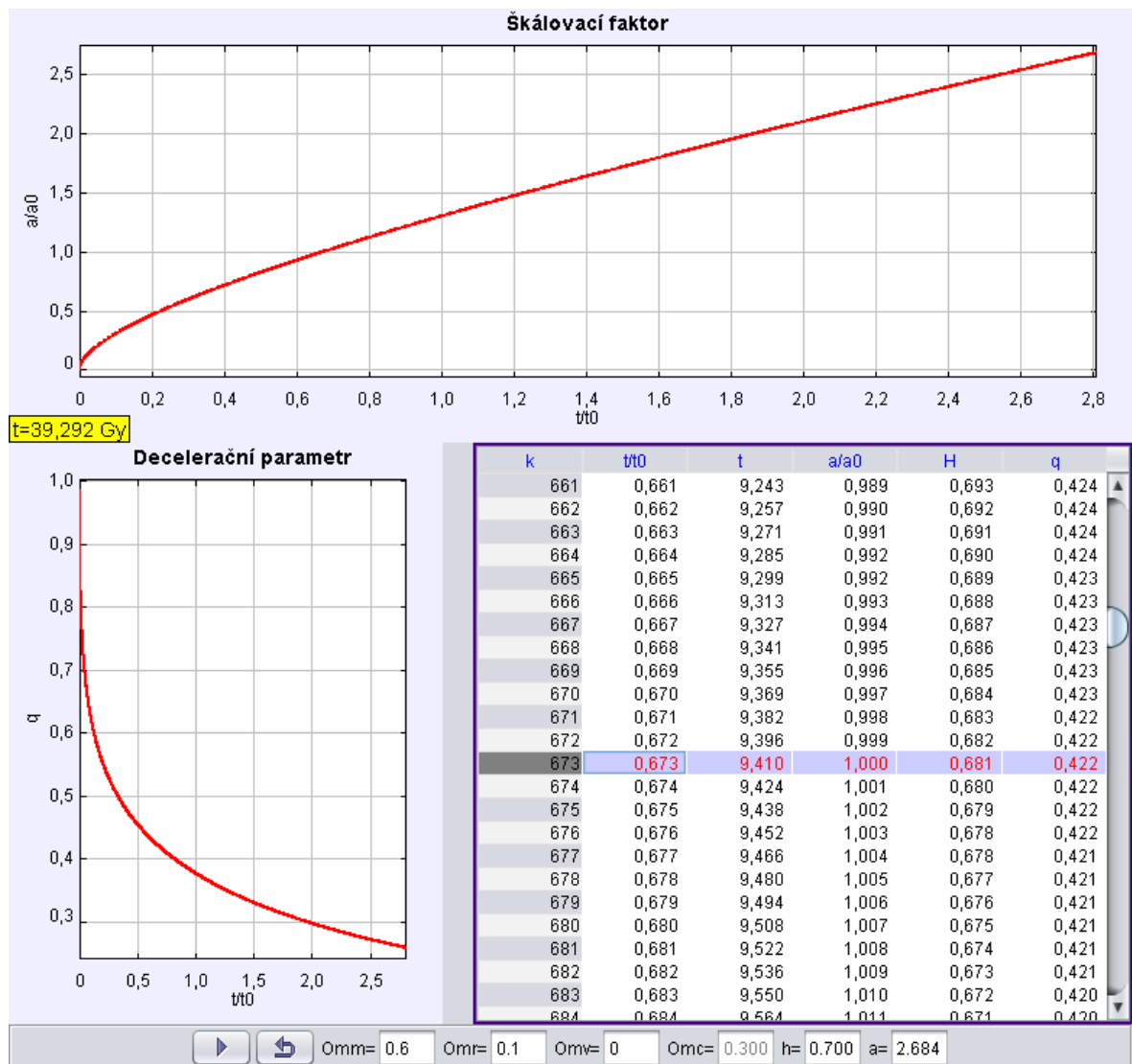
Druhý model je model pro $\Omega_c < 0 = -0,3$, $\Omega_v = 0$, $\Omega_m = 0,9$ a $\Omega_r = 0,4$, jedná se tedy o uzavřený vesmír.



Obr.10: Model uzavřeného vesmíru s nulovou energií vakua

Povšimněme si, že decelerační parametr v místě obratu není definován, což přímo plyne z jeho zavedení ve vztahu (48) a nulové hodnoty Hubbleova parametru zahrnujícího první derivaci expanzního faktoru. Z grafu je patrné, že decelerační parametr nabývá pouze kladných hodnot. Model je ukončen tzv. velkým křachem (Big Crunch), vesmír se dostane do počátečního stavu. Stáří vesmíru je opět mnohem menší (8,208 Gy) oproti naměřeným hodnotám současného vesmíru. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = 1$ a kosmologickou konstantou $\Lambda = 0$.

Posledním modelem v této kapitole je otevřený vesmír s parametry: $\Omega_c > 0 = 0,3$, $\Omega_v = 0$, $\Omega_m = 0,6$ a $\Omega_r = 0,1$.

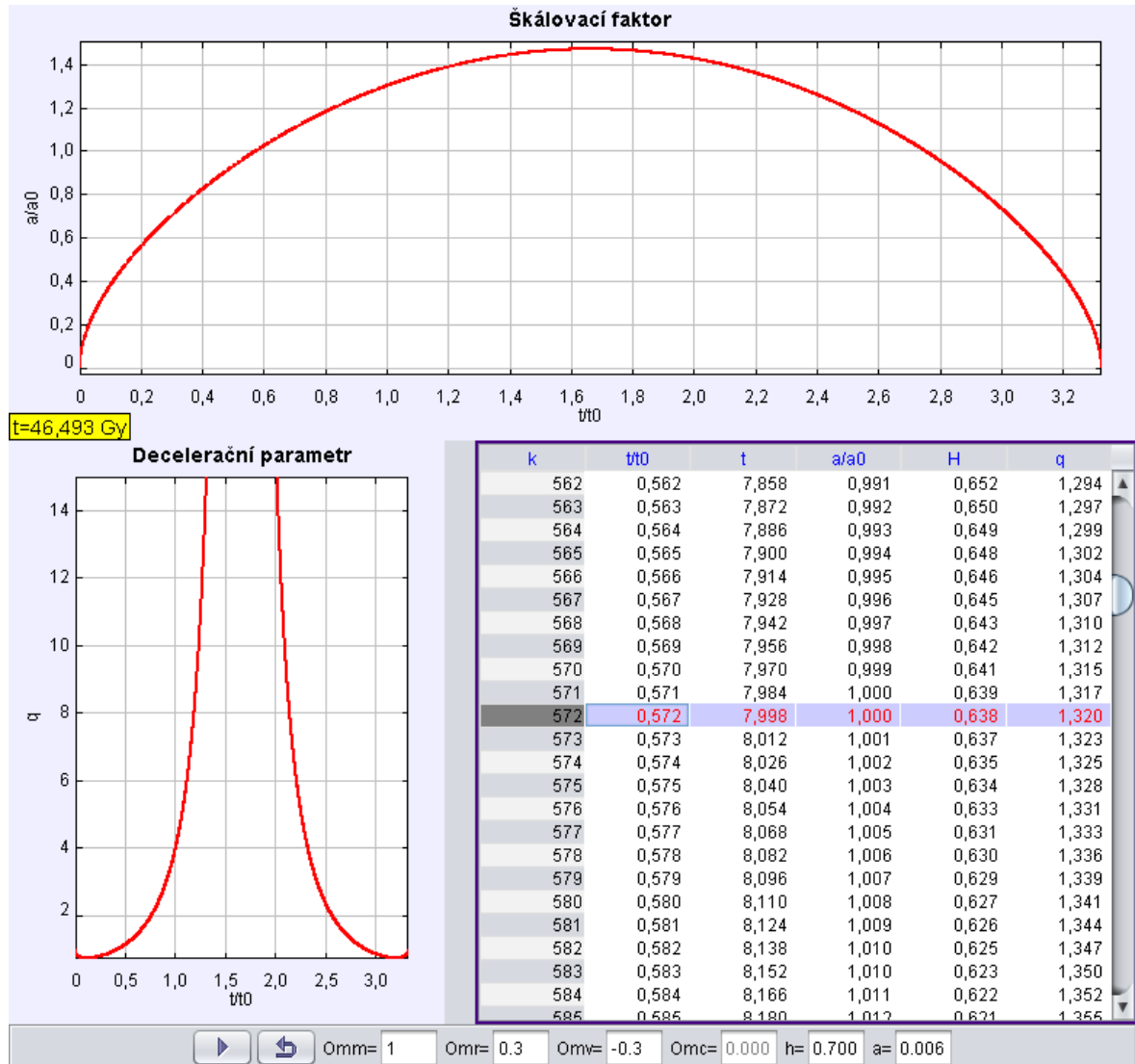


Obr.11: Model otevřeného vesmíru s nulovou energií vakua

Tento model se opět bude rozpínat do nekonečna. Jeho stáří vesmíru (9,410 Gy) je ve srovnání se stářím našeho vesmíru opět velmi malé. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = -1$ a kosmologickou konstantou $\Lambda = 0$.

4.2 Modely s $\Omega_v < 0$

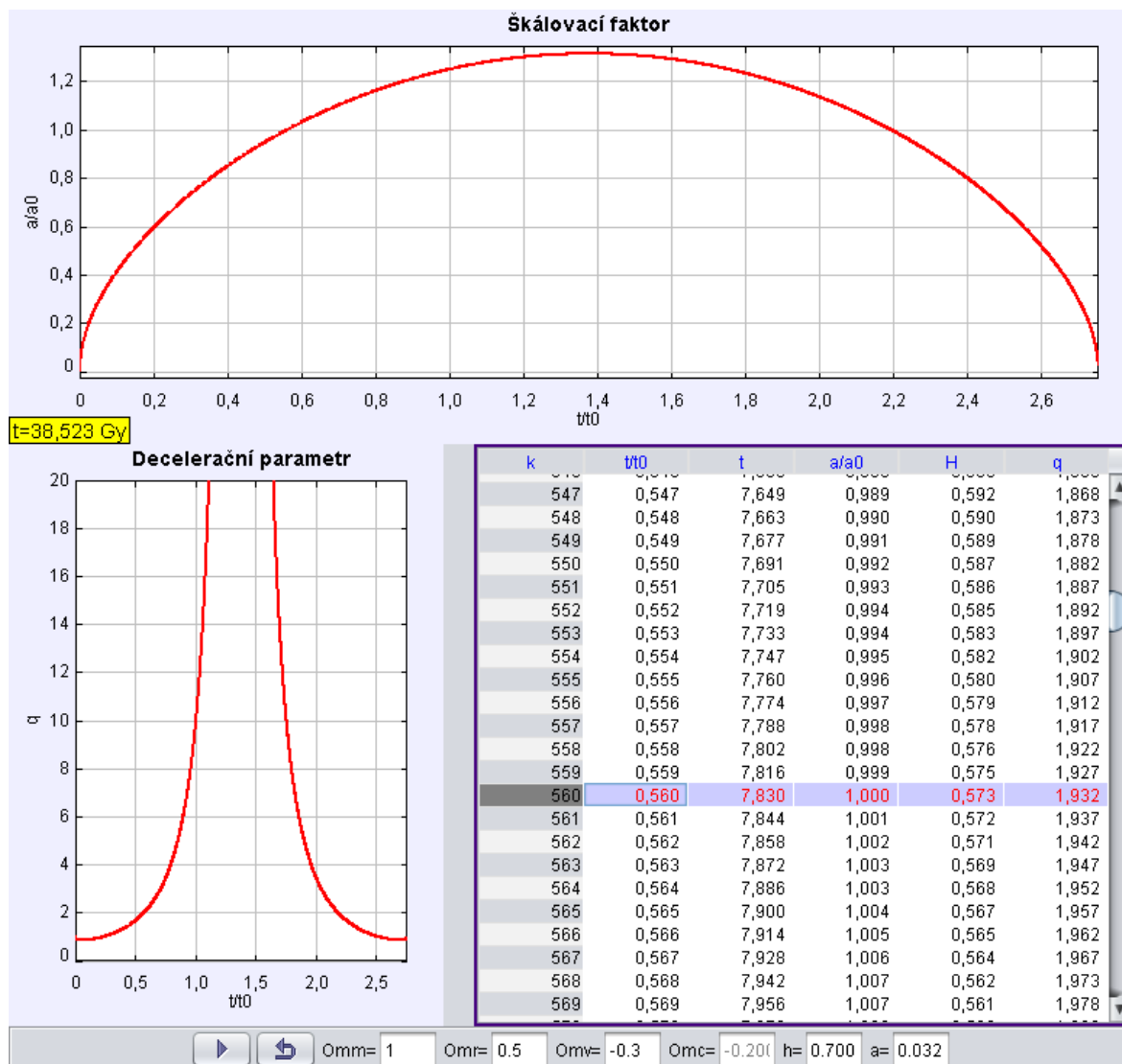
Podívejme se opět nejprve na plochý vesmír, tedy $\Omega_c = 0$, $\Omega_v < 0 = -0,3$, $\Omega_m = 1$ a $\Omega_r = 0,3$.



Obr.12: Model plochého vesmíru se zápornou energií vakua

Tento model skončí velkým křachem, stáří vesmíru je téměř poloviční (7,998 Gy) oproti stáří našeho vesmíru, protože i energie vakua přispívá nejprve ke zpomalování expanze a posléze i k smršťování vesmíru. Decelerační parametr v bodě obratu roste k nekonečnu a je vždy kladný. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = 0$ a kosmologickou konstantou $\Lambda < 0$.

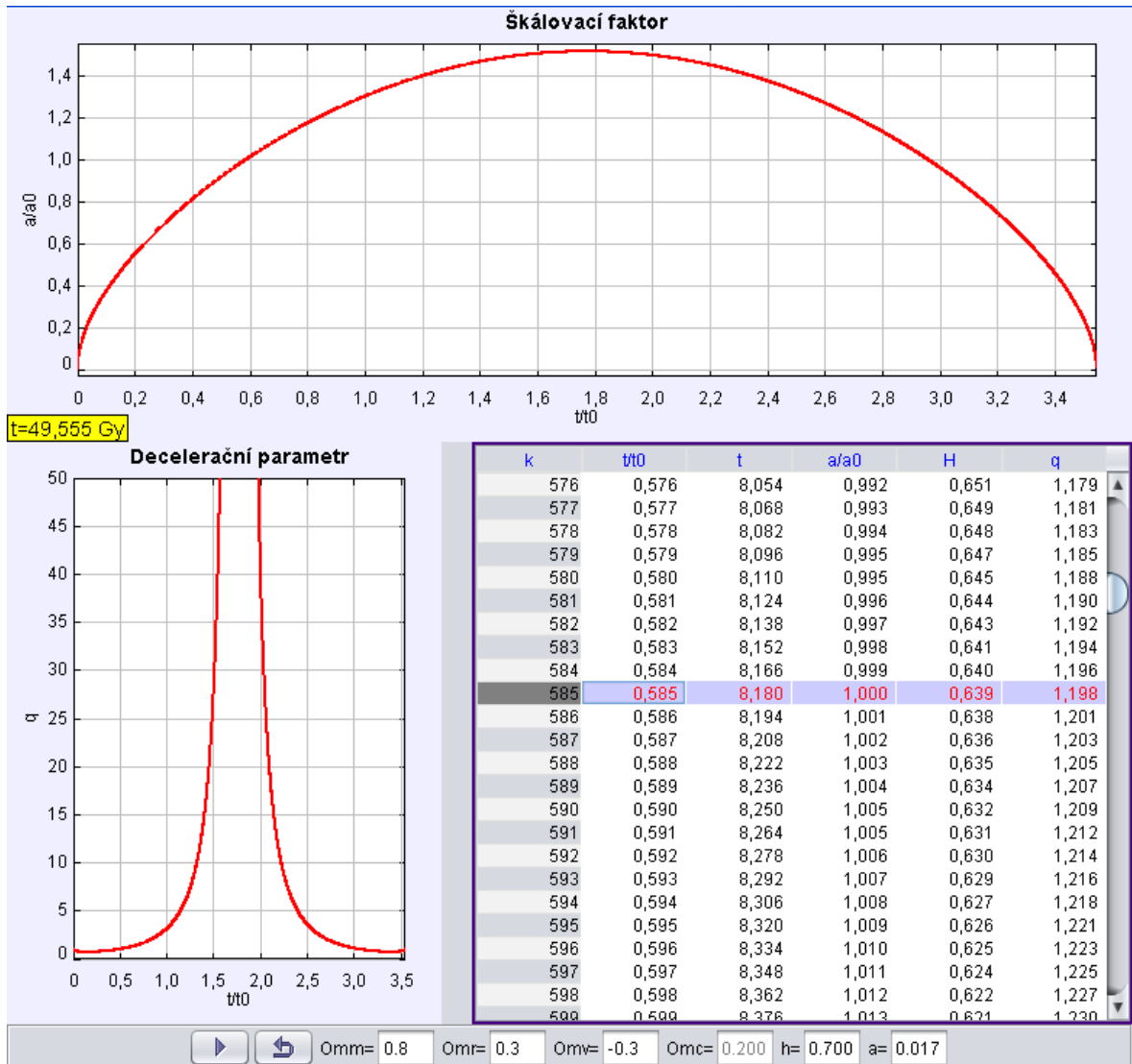
Druhým modelem v této kategorii je uzavřený vesmír, který je určen parametry $\Omega_c < 0 = -0,2$, $\Omega_v < 0 = -0,3$, $\Omega_m = 1$ a $\Omega_r = 0,5$.



Obr.13: Model uzavřeného vesmíru se zápornou energií vakua

Tento model je opět ukončen velkým křachem. Stáří vesmíru je ještě menší než v předchozím případě (7,830 Gy), energie vakua opět přispívá ke zpomalování expanze a k pozdějšímu smršťování. Decelerační parametr v bodě obratu opět roste k nekonečnu, z rovnice (55) plyne, že pro tuto volbu parametrů bude vždy $q > 0$. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = 1$ a kosmologickou konstantou $\Lambda < 0$.

Posledním modelem v této kategorii je otevřený vesmír se zápornou velikostí energie vakua, definován pomocí $\Omega_c > 0 = 0,2$, $\Omega_v < 0 = -0,3$, $\Omega_m = 0,8$ a $\Omega_r = 0,3$.

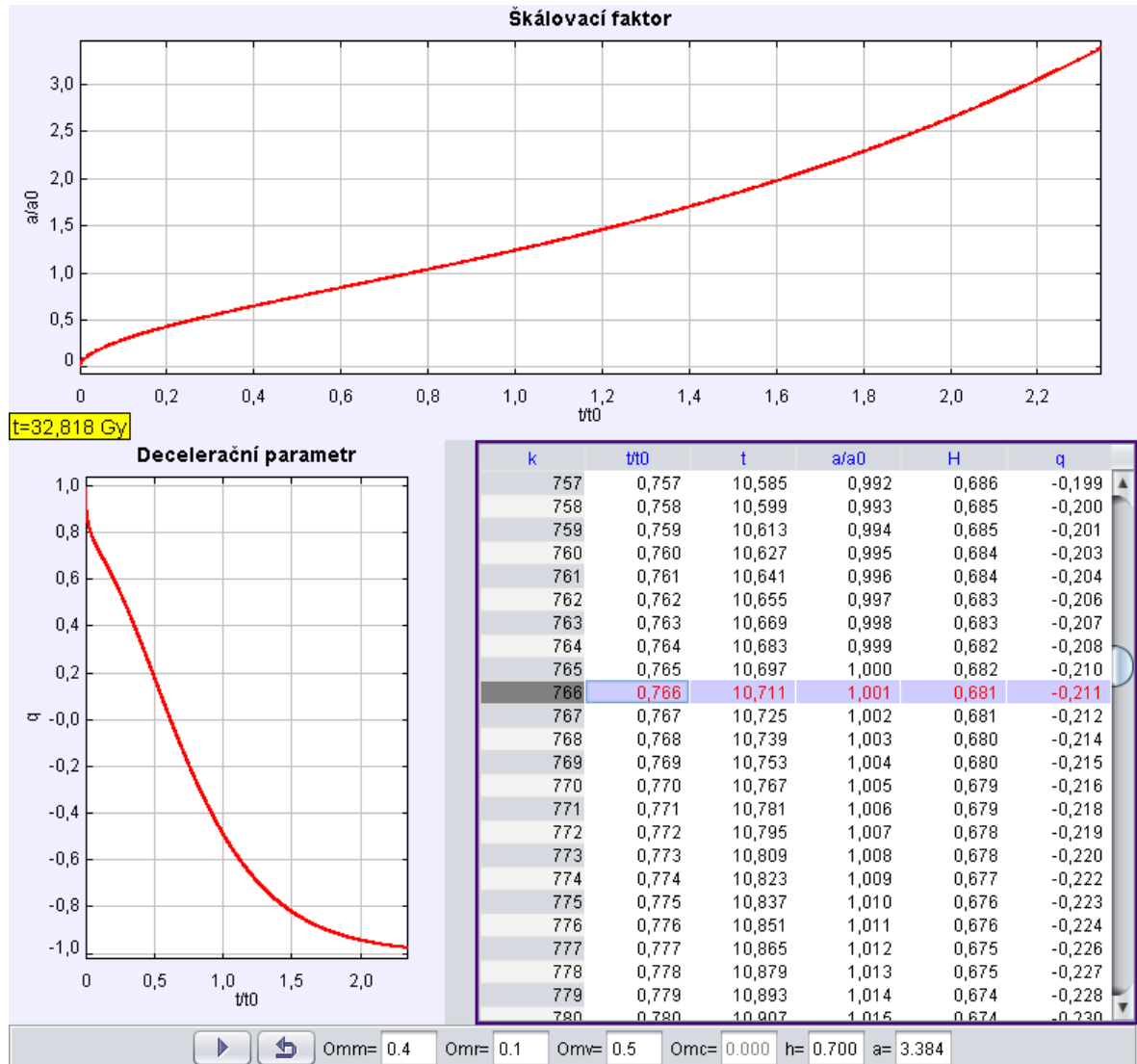


Obr.14: Model otevřeného vesmíru se zápornou hodnotou energie vakua

Všechny modely v této kategorii jsou ukončeny velkým krachem. Stáří tohoto vesmíru(8,180 Gy) je opět menší než stáří naměřené pro současnost. Decelerační parametr je opět vždy kladný a v bodě obratu roste k nekonečnu. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = -1$ a kosmologickou konstantou $\Lambda < 0$.

4.3 Modely s $\Omega_v > 0$

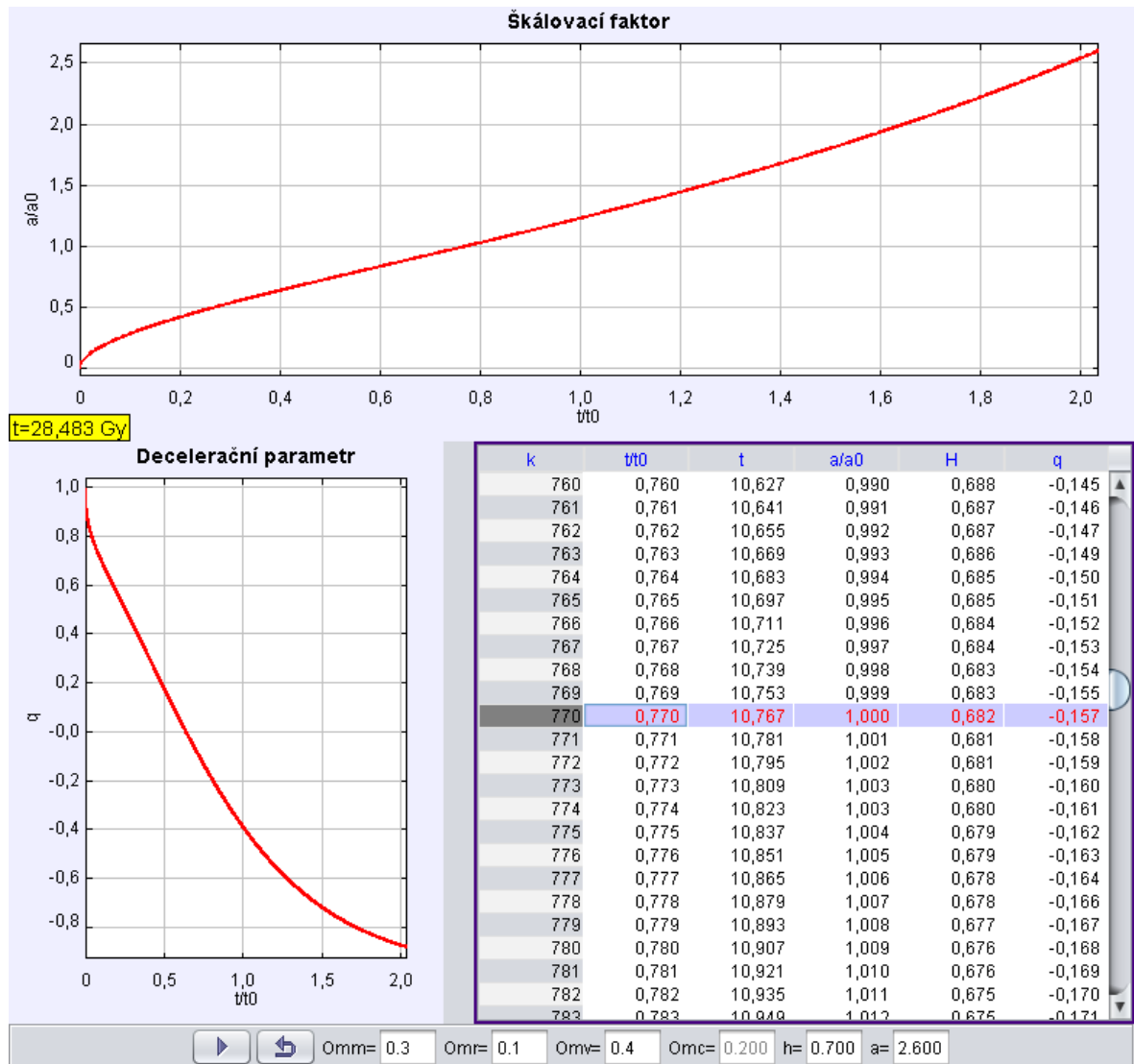
První model opět bude model popisující plochý vesmír, který je dán parametry: $\Omega_c = 0$, $\Omega_v > 0 = 0,5$, $\Omega_m = 0,4$ a $\Omega_r = 0,1$.



Obr.14: Model plochého vesmíru s kladnou energií vakua

Model se bude rozpínat do nekonečna, na modelu můžeme pozorovat několik fází. Nejprve se vesmír rychle rozpínal, poté se rychlost rozpínání téměř ustálila a nakonec lze z grafu vyčíst, že expanze opět začala nabírat na rychlosti. Stáří vesmíru tohoto modelu je sice menší (10,711 Gy) než u současného vesmíru, avšak ze všech dosavadních modelů nejbližší. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = 0$ a kosmologickou konstantou $\Lambda > 0$.

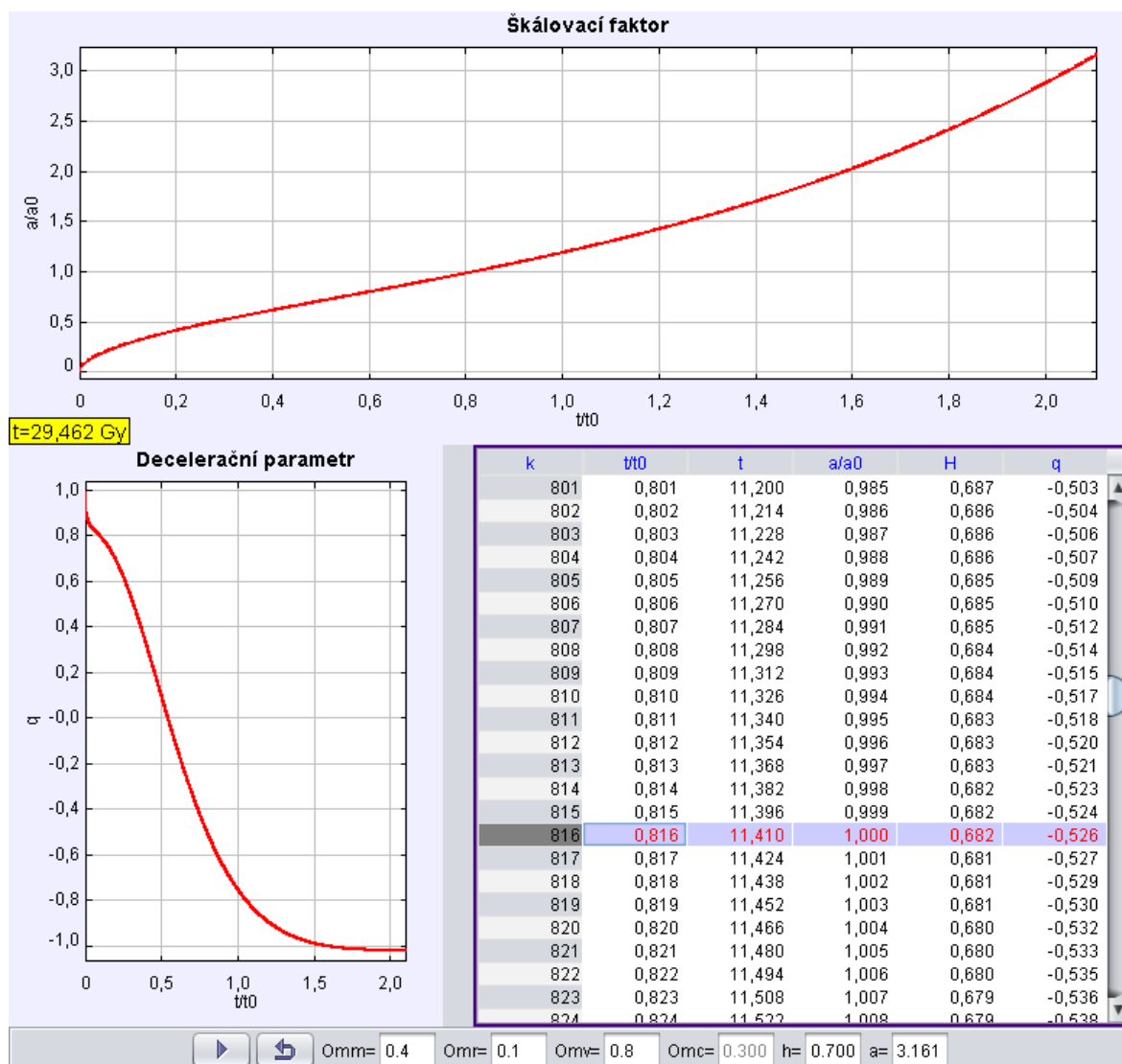
Druhý model je pro otevřený vesmír charakterizovaný parametry: $\Omega_c > 0 = 0,2$, $\Omega_v > 0 = 0,4$, $\Omega_m = 0,3$ a $\Omega_r = 0,1$.



Obr.15: Model otevřeného vesmíru s kladnou energií vakua

Tento model je kvalitativně podobá předcházejícímu modelu, tedy modelu plochého vesmíru s kladnou energií vakua. Opět se bude rozpínat do nekonečna a prochází fázemi popsanými v předešlém modelu. Stáří vesmíru (10,767 Gy) je menší než stáří našeho vesmíru. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = -1$ a kosmologickou konstantou $\Lambda > 0$.

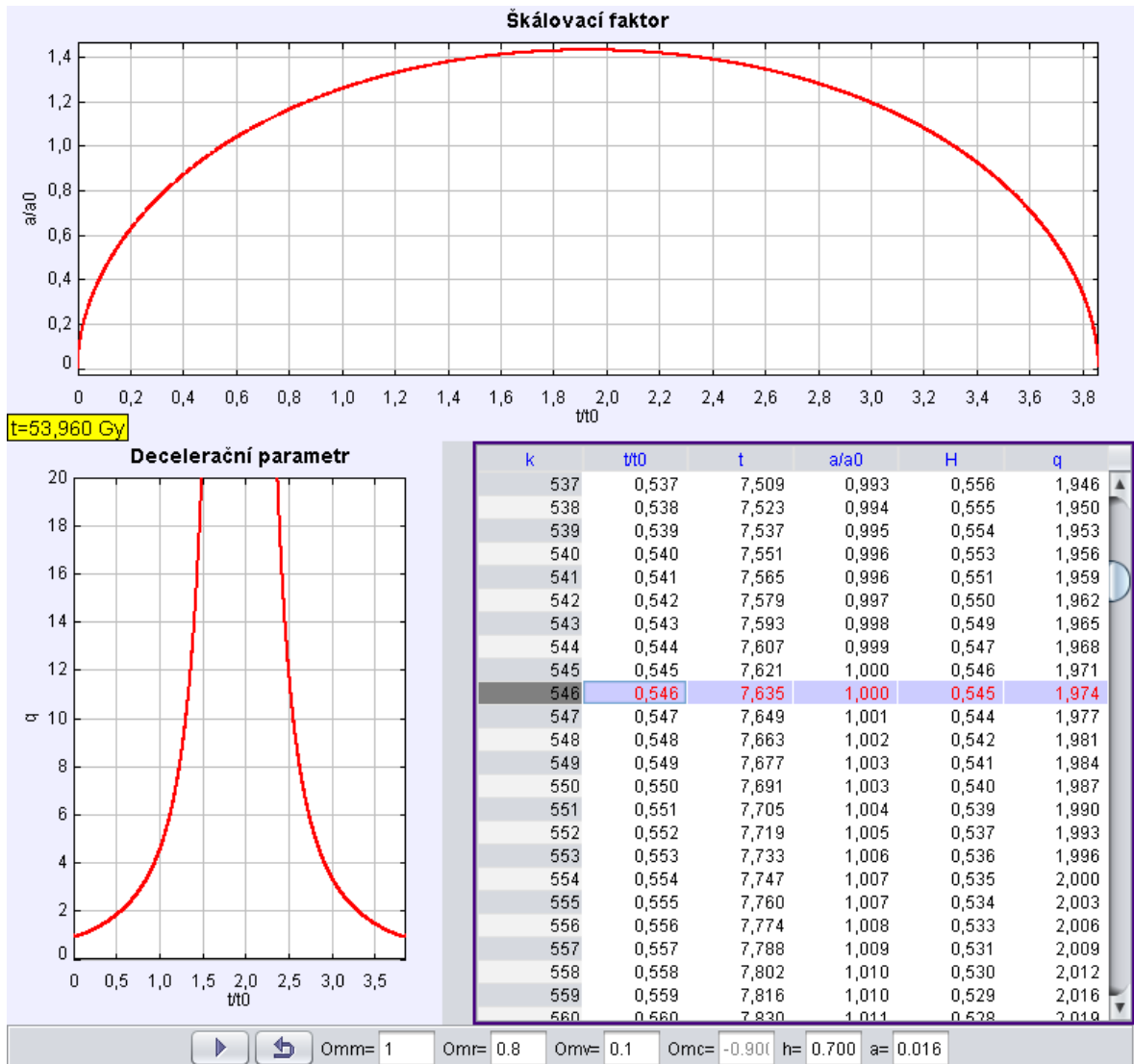
Zbývající kategorie je pro modely uzavřených vesmírů. Pro uzavřené vesmíry mohou nastat tři situace podle velikosti energie vakua. Pokud je energie vakua dostatečně velká nastává situace dána parametry: $\Omega_c < 0 = -0,3$, $\Omega_v > 0 = 0,8$, $\Omega_m = 0,4$ a $\Omega_r = 0,1$.



Obr.16: Model uzavřeného vesmíru s dostatečně velkou kladnou hodnotou energie vakua

Model se opět rozpíná do nekonečna a opět lze rozpoznat fáze, jimiž prochází. Model se opět kvalitativně podobá modelu plochého vesmíru s kladnou energií vakua. Stáří vesmíru (11,410 Gy) je pořád menší než naměřené hodnoty. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = 1$ a kosmologickou konstantou $\Lambda > \Lambda_{\text{krit}}$, kde Λ_{krit} je hraniční hodnota odpovídající Einsteinovu statickému vesmíru, tento model je samostatně popsán v kapitole 4.4.

Druhá situace nastane, je-li energie vakua dostatečně malá. Následující model je popsán parametry: $\Omega_c < 0 = -0,3$, $\Omega_v > 0 = 0,8$, $\Omega_m = 0,4$ a $\Omega_r = 0,1$.



Obr.17: Model uzavřeného vesmíru s velmi malou hodnotou energie vakua

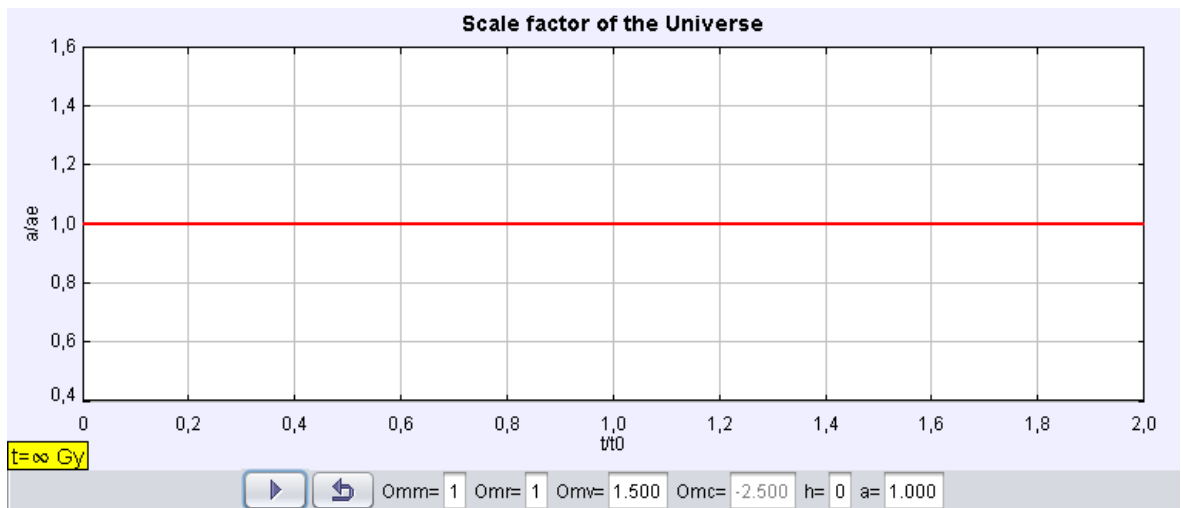
Model končí velkým křachem. Decelerační parametr je vždy kladný a v bodu obratu roste k nekonečnu. Stáří zvoleného vesmíru (7,635 Gy) je opět mnohem menší než naměřená hodnota. V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = 1$ a kosmologickou konstantou $\Lambda > \Lambda_{krit}$. Veškeré modely byly vytvořeny programem *frw.ejs*, který lze najít na příloženém CD.

4.4 Model Einsteinova statického vesmíru

Pro Einsteinův statický model je typické, že je po celou dobu neměnný, jeho parametry jsou závislé na počáteční velikosti škálovacího faktoru (na Obr., Obr.19, Obr. je tato velikost ve zvoleném měřítku označena ae). Protože se model vesmíru nerozpíná, je decelerační parametr a Hubbleův parametr nulový. Pro tento model vesmíru lze z podmínky $H_0 = 0$ a $q_0 = 0$ a z rovnic (42), (49) odvodit vztahy:

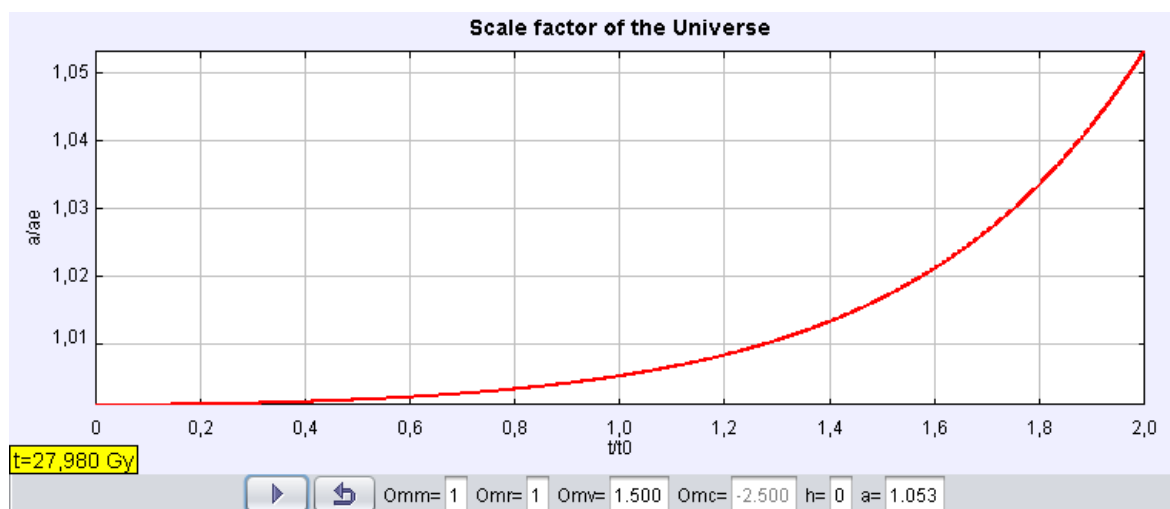
$$\Omega_c = -\frac{3}{2}\Omega_m - \Omega_r \quad (56)$$

$$\Omega_v = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r \quad (57)$$

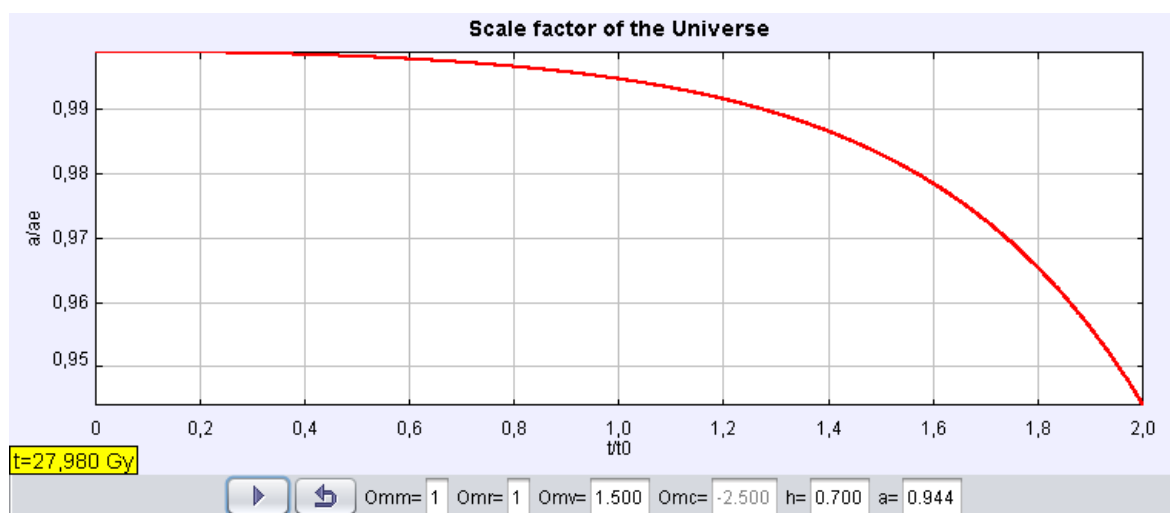


Obr.18: Einsteinův statický vesmír za splněných podmínek rovnováhy

Pokud se bude počáteční velikost škálovacího faktoru lišit od hodnoty a_e , vesmír již nebude statický.



Obr.19: Einsteinův statický vesmír pro počáteční hodnotu škálovacího faktoru $a = 1,001$

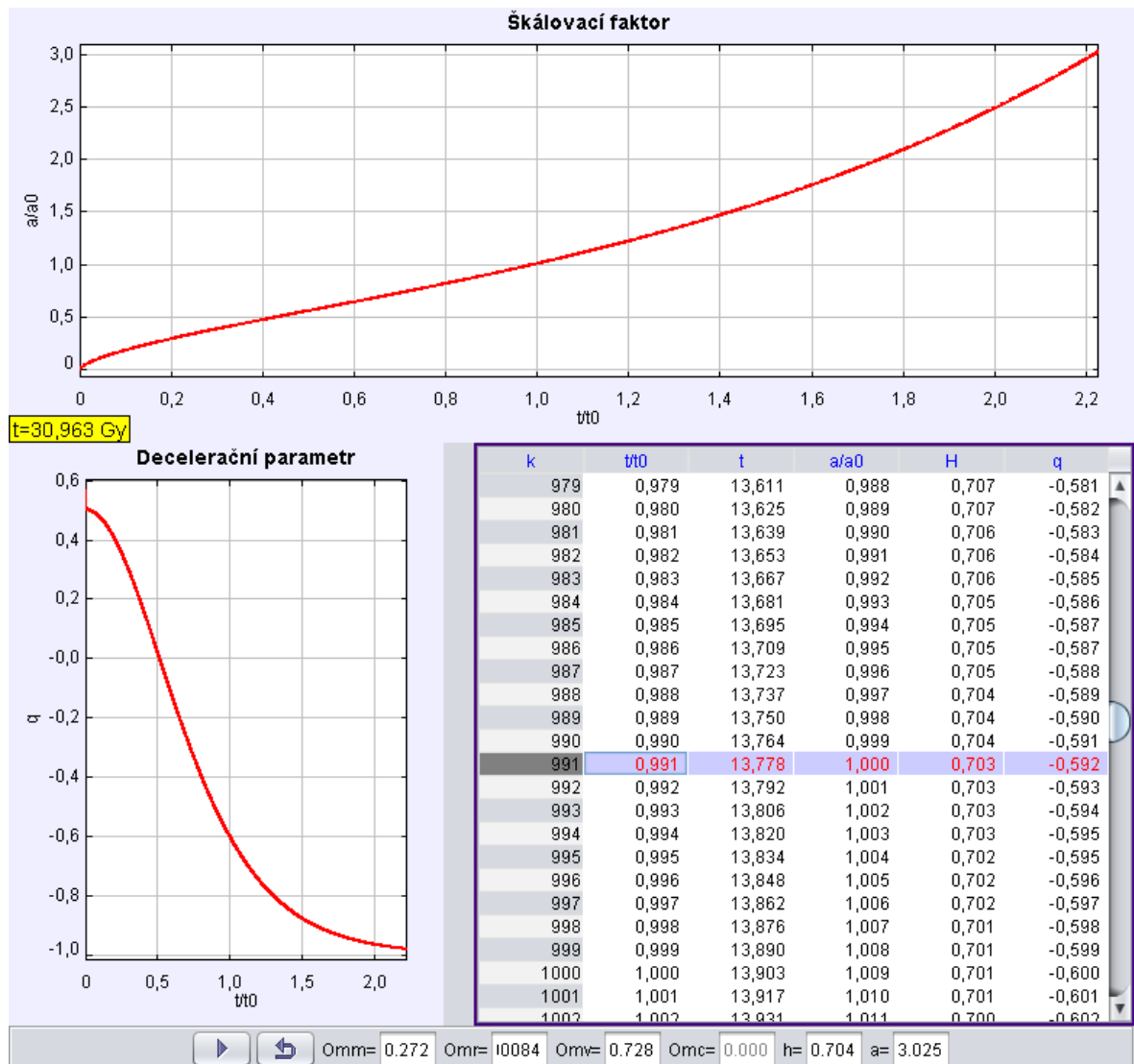


Obr.20: Einsteinův statický vesmír pro počáteční hodnotu škálovacího faktoru $a = 0,999$

V [11] je tento vesmír v klasifikaci popsán křivostí $k = 1$ a kladnou kosmologickou konstantou o velikosti $\Lambda = \Lambda_{\text{krit}}$. Pro Einsteinův statický model bylo nutno do programu doplnit podmínky rovnic (56), (57), neboť nulová hodnota Hubbleova parametru H vedla k divergenci některých veličin. Z toho důvodu je na CD uveden program na řešení statického vesmíru uveden samostatně pod názvem *frw_einstein.ejs*, umístěném na CD

4.5 Model současného vesmíru

V modelu jsou použity parametry z kapitoly 3, tedy $\Omega_c = 0$, $\Omega_v = 0,728$, $\Omega_m = 0,272$ a $\Omega_r = 0,000084$.



Obr.21: Model současného vesmíru

Tento model se bude rozpínat do nekonečna a opět na něm jsou patrné tři fáze rychlého rozpínání (fáze dominantního záření), stálého rozpínání (fáze dominantní hmoty) a zrychlujícího rozpínání (fáze dominantní energie vakua). V modelu vychází doba stáří vesmíru jako 13,778 miliard let, což se poměrně přesně shoduje s naměřenými fakty. Náš vesmír je buď plochý, nebo velmi podobný plochému vesmíru.

5. Modelování rudého posuvu a stáří objektů

5.1 Závislost času a rudého posuvu

Vzhledem ke konečné rychlosti světla kosmologická pozorování nutně představují pohled do minulosti. Chceme-li odhadnout stáří pozorovaného objektu musíme nejprve zjistit čas t , který signál potřeboval k překonání vzdálenosti k nám. Poměrně snadno se z pozorování zjišťuje rudý posuv z definovaný v rovnici (3). Vzdálenost i čas šíření světla od zdroje k nám pak závisejí na kosmologických parametrech a tím i na uvažovaném modelu vesmíru.

V [19] je uvedeno odvození tohoto vztahu, popisujícího tento čas a ve své konečné podobě má tvar

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_0 - t_e \\ &= \frac{1}{H_0} \int_0^{z_e} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0} + (1-\Omega_0)(1+z)^2}}, \end{aligned} \quad (58)$$

kde t_e je čas vyslání signálu, t_0 je čas přijetí signálu, tedy současný čas, z_e je rudý posuv pozorované galaxie, Ω_{m0} je současná hodnota parametru Ω_m , obdobně to platí i pro Ω_{r0} a Ω_{v0} a $\Omega_0 = \Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{v0}$. Z tohoto integrálu je patrné, že doba potřebná na překonání vzdálenosti je závislá na parametrech daného modelu.

5.2 Závislost vzdálenosti na rudém posuvu

Vzdálenosti ve vesmíru nedokážeme změřit žádnou přímou metodou, z tohoto důvodu se nejčastěji užívá fotometrických zákonů, tedy že intenzita ozáření plochy klesá se čtvercem vzdálenosti od zdroje podle vztahu

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2}, \quad (59)$$

kde F je zářivý tok v místě pozorování, L je zářivý výkon zdroje a D_L je fotometrická vzdálenost. Pokud bychom byli schopni nezávisle určit či odhadnout zářivý výkon zdroje a změřili zářivý tok v místě pozorování, mohli bychom stanovit tzv. fotometrickou vzdálenost tohoto zdroje. V [9] je podrobně uveden vztah pro odvození konformní vzdálenosti, popisující vzdálenost, jež by musel signál urazit pohyboval-li by se po křivce, která kopíruje zakřivení daného prostoru a s použitím značení uvedeném v [19] je konečný vzorec

$$D_c = \frac{c}{H_0} \int_0^{z_e} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0} + (1-\Omega_0)(1+z)^2}} \quad (60)$$

Od konformní vzdálenosti se přechází k fotometrické vzdálenosti vztahem ([9]), jenž v sobě zahrnuje i zakřivení metriky popsané rovnicí ()

$$D_L = S_k(D_c)(1+z). \quad (61)$$

Při měření však častěji používáme magnitudy než přímo fotometrickou vzdálenost. Absolutní magnituda M je dána vztahem([19])

$$M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) + 4,74, \quad (62)$$

kde L je zářivý výkon zdroje a $L_{\odot} = 3,85 \cdot 10^{26}$ W je zářivý výkon Slunce. Dále se zavádí relativní magnituda m rovností

$$m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_{\odot}} \right) + 4,74, \quad (63)$$

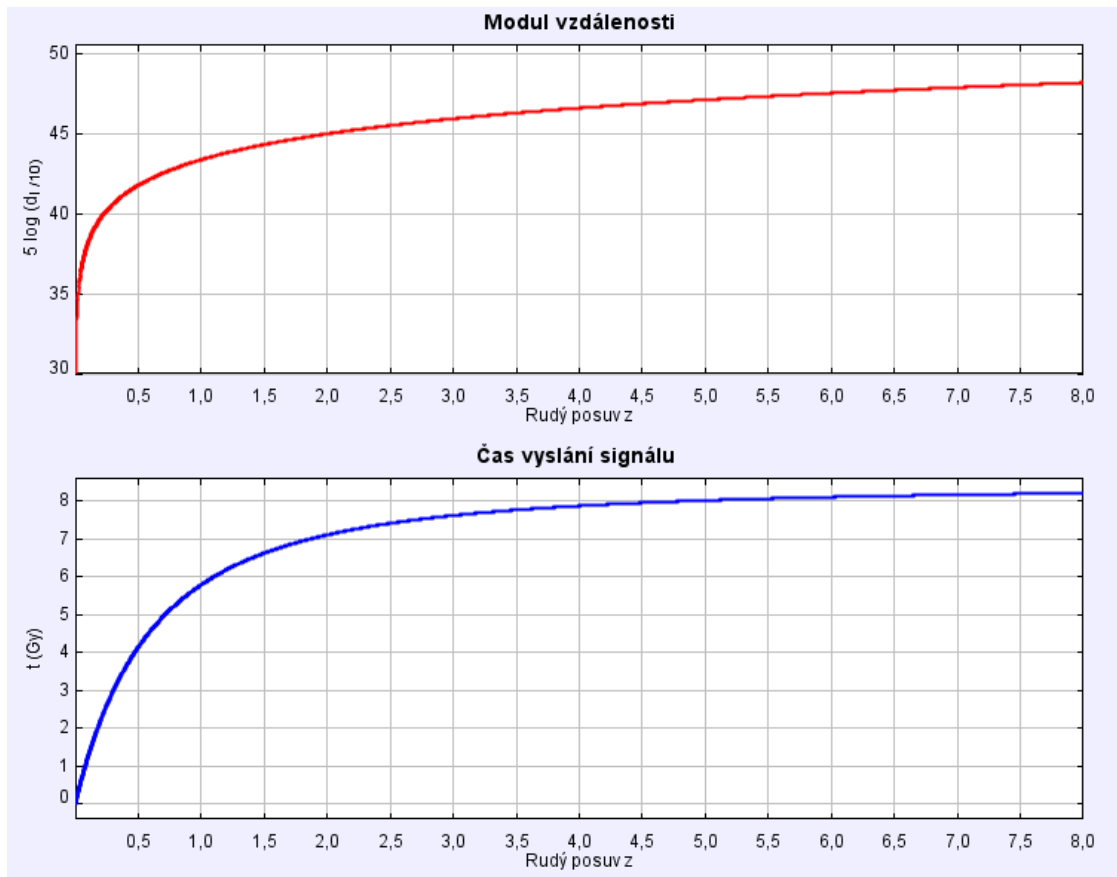
kde F je zářivý tok zdroje a $F_{\odot} = 3,21 \cdot 10^{-10} \frac{W}{m^2}$ je zářivý tok Slunce dopadající na jednotku plochy ve vzdálenosti 10 pc. Mezi těmito magnitudami existuje vztah

$$m - M = 5 \log \left(\frac{D_L}{10} \right) \quad (64)$$

kde výraz na pravé straně se nazývá modul vzdálenosti DM , který v sobě nese informaci o zakřivení prostoru a popisuje vzdálenost na základě naměřeného rudého posuvu. Právě vývoj tohoto modulu vzdálenosti v čase bude předmětem modelování. Interval rudého posuvu je zvolen s ohledem na skutečnost, že největší naměřený rudý posuv u kosmologického objektu je $z = 8,6$ pro vzdálenou galaxii UDFy-38135539 [10].

5.3 Modelování modulu vzdálenosti

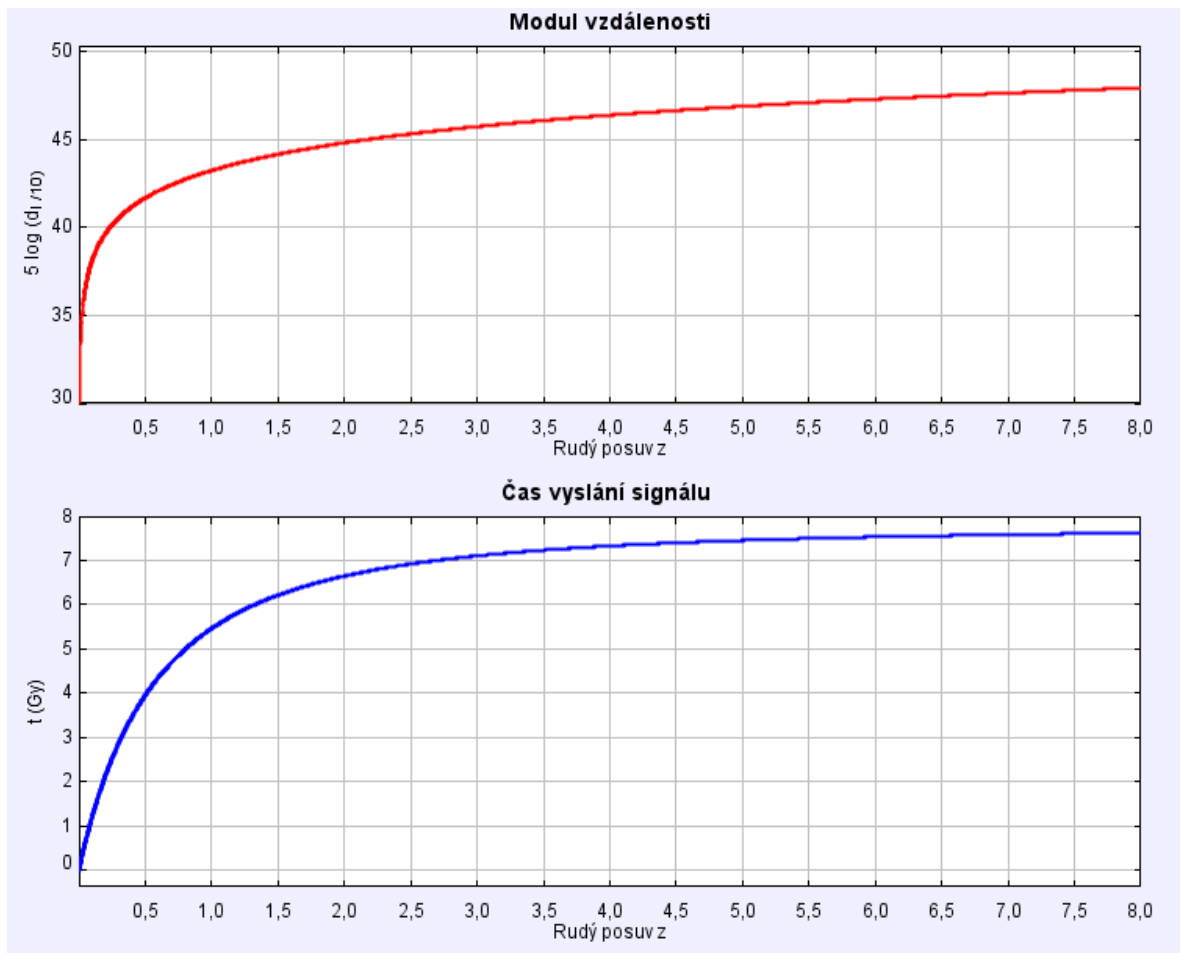
Část použitého zdrojového kódu pro numerické modelování modulu vzdálenosti byla převzata ze zdroje [22]. První model je pro Einstein-de Sitterův model se stejnými parametry jako v předcházející kapitole, tedy $\Omega_c = 0$, $\Omega_v = 0$, $\Omega_m = 0,8$ a $\Omega_r = 0,2$.



Obr.22: Modul vzdálenosti a stáří vyslaného signálu v závislosti na rudém posuvu

Z obrázku je patrné, že větší rudý posuv odpovídá většímu stáří světelného signálu a větší uražené vzdálenosti.

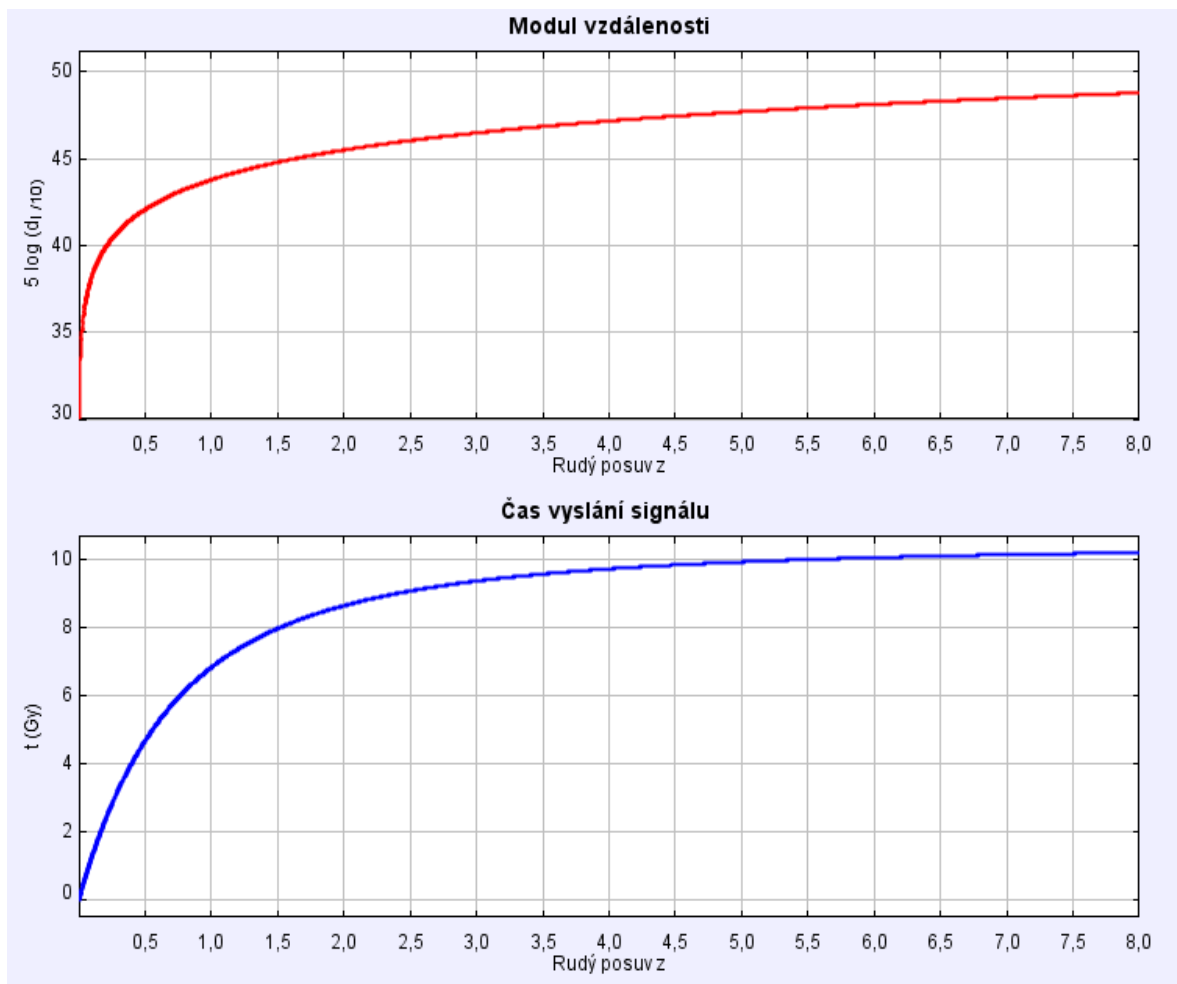
Druhý model popisuje model vesmíru s parametry $\Omega_c = 0,2$, $\Omega_v = -0,3$, $\Omega_m = 0,8$ a $\Omega_r = 0,3$.



Obr.23: Modul vzdálenosti a čas vyslání signálu v závislosti na rudém posuvu

Tento model byl vykreslen jako ukázka pro vesmíry končící velkým křachem.

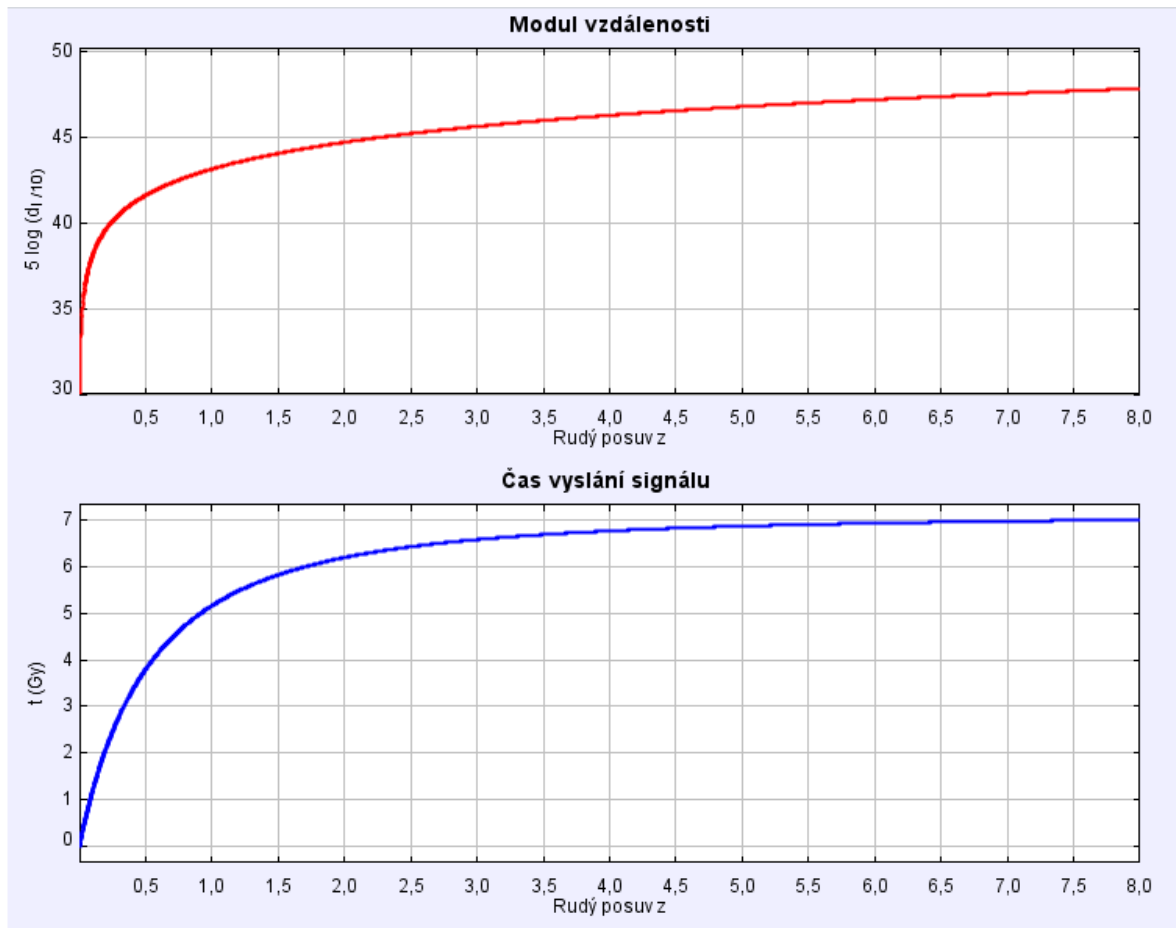
Třetí model byl zpracován s údaji $\Omega_c = 0$, $\Omega_v = 0,5$, $\Omega_m = 0,4$ a $\Omega_r = 0,1$.



Obr.24: Modul vzdálenosti a čas vyslání signálu v závislosti na rudém posuvu

Tento model popisuje chování modulu vzdálenosti a času vyslání světelného signálu na rudém posuvu plochého vesmíru. Je patrné, že hlavně čas vyslání signálu se zdatelně změnil oproti předchozím případům.

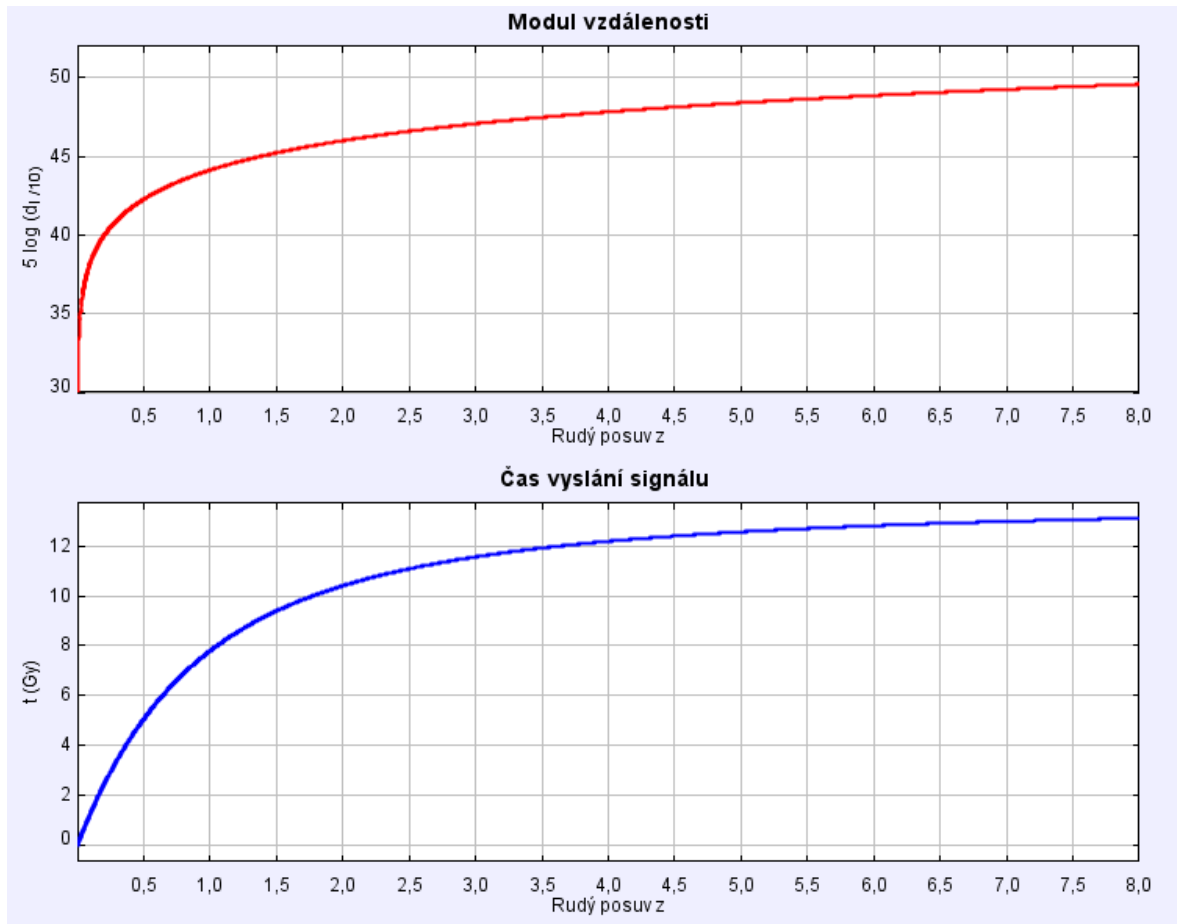
Čtvrtý model pracuje s parametry $\Omega_c = -0,2$, $\Omega_v = -0,3$, $\Omega_m = 1$ a $\Omega_r = 0,5$.



Obr.25: Modul vzdálenosti a čas vyslání světelného signálu na rudém posuvu

Tento model končí velkým křachem, jak jsme si ukázali v minulé kapitole. Z obrázků je patrné že záleží na parametrech vesmíru, a tudíž z nich můžeme tyto parametry určovat.

Poslední model je pro současný vesmír, parametry jsou použity z kapitoly 3:
 $\Omega_c = 0$, $\Omega_v = 0,728$, $\Omega_m = 0.272$ a $\Omega_r = 0,000084$.



Obr.26: Modul vzdálenosti a čas vyslání světelného signálu v závislosti na rudém posuvu pro současný vesmír

Z obrázku je patrné, že stáří objektů, které vidíme s rudým posuvem větším než 6 se velmi blíží stáří vesmíru, jež nám vyšlo v předešlé kapitole. Při srovnání s [9] zjišťujeme, že jsme dosáhli obdobných výsledků. Pro modelování byl použit program *posuv_z.ejs*, dostupný na příloženém CD.

Závěr

Studium vlastností Fridmanových-Lemaîtreových-Robertsonových-Walkerových modelů vesmíru patří ke standardní náplni vysokoškolských kurzů a základních učebnic. Přehledná struktura Friedmannovy rovnice (13), kterou lze sestavit i v rámci newtonovské kosmologie (viz např. [8, 19]), umožňuje diskusi základních scénářů vývoje i role hlavních kosmologických parametrů pomocí užitečného a obecného konceptu zobecněného potenciálu. V práci se omezujeme pouze na tzv. standardní kosmologický model velkého třesku, jež lze považovat v jeho základních rysech za dostatečně potvrzený pozorováními. Moderní teorie velmi raných fází vývoje vesmíru jako inflační teorie nejsou v úvahách ani numerických modelech zahrnuty.

Řešení Fridmanovy představuje také vhodnou příležitost k uplatnění základních numerických metod, jejichž výstup je možné porovnat s výsledky komplexních modelů v dostupné literatuře a internetových zdrojích. Předložená práce proto může posloužit jako doplňující studijní materiál k výuce astrofyziky a kosmologie na PřF UP i jako motivace k dalšímu hlubšímu studiu.

Použité multiplatformní prostředí Easy Java Simulation je poměrně jednoduchý k ovládní a pro daný účel se vcelku osvědčilo. Možnosti volby integrační metody, popř. Sestavení vlastního integračního kódu v kombinaci s intuitivním grafickým ovládním umožňují poměrně rychle získat uspokojivé výsledky. Výstup numerického kódu byl porovnán z výsledky v dané chvíli nejpřesnějších analýz kosmologických parametrů z dat získaných sondou WMAP [3] a jinými didakticky zaměřenými modely v [9]. Lze konstatovat, že soulad je velmi dobrý. Vypočtené stáří vesmíru potvrzuje obecně přijímaný Λ CDM model s kladnou kosmologickou konstantou (temnou energií) a chladnou temnou hmotou, tj. s hodnotami $\Omega_v = 0.7$ a Ω_m . Tento model podle současných poznatků nejlépe odpovídá parametrům našeho vesmíru.

Seznam zdrojů

Knihy a publikace:

- [1] Hartle, J. B.: *Gravity An Introduction to Einstein's General Relativity*, San Francisco, Pearson Education, 2003
- [2] Nemiroff, R. J., Patla, B.: *Adventures in Friedmann cosmology: A detailed expansion of the cosmological Friedmann equations*, Am. J. Phys., 76(3), 265-276, doi:10.1119/1.2830536, 2008
- [3] Jarosik, N., Bennett, L., Dunkley, J. a kol: *WrightSeven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results* [online], Cornell university library: Astrophysics: Cosmology and Extragalactic astrophysics, c2010, [citováno 21.4.2012] <http://arxiv.org/abs/1001.4744v1>
- [4] Fridman, A.: *Über die Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik, 10, 377-387 (1922)
- [5] Einstein, A.: *Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann: Über die Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik, 16, 228 (1922)
- [6] Lemaître, G.: *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 47, série A, (1927)
- [7] Robertson, H.P.: *Relativistic cosmology*, Reviews of Modern Physics 5 (1933), 62–90
- [8] Liddle, A.R.: *An Introduction to Modern Cosmology*, Chichester, John Wiley & Sons Ltd, 2003
- [9] Christiansen J. L.; Siver A.: *Computing accurate age and distance factors in cosmology*, Am. J. Phys., 80(5), doi: 10.1119/1.3698352, 2012
- [10] LEHNERT, M. D. et al. Spectroscopic confirmation of a galaxy at redshift $z = 8.6$. Nature. 2010-10-20, vol. 467, no. 7318, p. 940–942. DOI: 10.1038/nature09462.
- [11] D' INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford: Clarendon Press, 1992.

Internetové zdroje:

- [12] Greenstein, J.L.: *Howard Percy Robertson*, Washington D.C., National academy of sciences, 1980, [citováno 21.4.2012] <http://books.nap.edu/html/biomems/hrobertson.pdf>
- [13] Příspěvatelé Wikipedie: *Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker metric* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2012, [citováno 21.4.2012] http://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lema%C3%AEtre-Robertson-Walker_metric
- [14] Příspěvatelé Wikipedie: *Arthur Geoffrey Walker* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2012, [citováno 21.4.2012] http://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Geoffrey_Walker
- [15] Příspěvatelé Wikipedie: *Howard Percy Robertson* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2010, [citováno 21.4.2012] http://en.wikipedia.org/wiki/Howard_Percy_Robertson
- [16] Příspěvatelé Wikipedie: *Georges Lemaître* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2012, [citováno 21.4.2012] http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Georges_Lema%C3%AEtre&oldid=486588418
- [17] Příspěvatelé Wikipedie: *Kosmologický princip* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2011, [citováno 21. 4. 2012] http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cosmological_principle&oldid=483747665
- [18] Vlachová, M.: *Alexandr Fridman* [online], Slavní matematici, fyzici a vynálezci: Alexandr Fridman, c2009, [citováno 21.4.2012] http://vedci.wz.cz/Osobnosti/Fridman_A.htm
- [19] Opatrný, T.; Richterek, L.: *Vybrané partie ze současné fyziky*, Olomouc, 2005 [citováno 2.5.2012] <http://www.ktf.upol.cz/tom/vkf.pdf>
- [20] Mastin, L.: *Georges Lemaître* [online] The physics of the universe: important scientists, c2009, [citováno 21.4.2012] http://www.physicsoftheuniverse.com/scientists_lemaitre.html
- [21] Příspěvatelé Wikipedie: *Alexander Friedmann* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2012, [citováno 21.4.2012] http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Friedmann

- [22] Moldenhauer, J.: *Fitting Cosmological Supernovae Data Model* [online], Open source physics: Fitting Cosmological Supernovae Data Model, c2011, [citováno 28.4.2012] <http://www.compadre.org/osp/items/detail.cfm?ID=11587&Standards=1>

Přílohy

Pro modelování byl použit program *Easy Javy Simulations 4.3.2*. V něm byly vytvořeny programy *frw.ejs*, *frw_einstein.ejs* a *posuv_z.ejs*.

Programové prostředí Easy Java Simulation 4.3.2 je k nalezení na CD pod cestou *EJS_4.3.2/EjsConsole.jar*.

Program *frw.ejs* numericky řeší rovnice (42), (49) a (50) za použití numerické metody Cash-Karp 4(5). Na CD je k nalezení pod cestou *FRW/frw.ejs*.

Program *frw_einstein.ejs* numericky řeší (42) a (49) za podmínek (56),(57). Opět využívá numerické metody Cash-Karp 4(5). Na CD je k nalezení pod cestou *FRW/frw_einstein.ejs*.

Program *posuv_z.ejs* numericky zpracovává rovnice (58), (60) a (64) za pomoci svého vlastního podprogramu. Na CD je k nalezení pod cestou *FRW/posuv_z.ejs*