Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra experimentální fyziky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sbírka úloh Fyzikální olympiády kategorie D

Vypracovala:	**Markéta Ospálková**
Studijní program:	B0114A110003 Fyzika pro vzdělávání
Studijní obor:	Fyzika pro vzdělávání / Matematika pro vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	srpen 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 3. srpna 2022

. . . .

Markéta Ospálková

Poděkování

V první řadě bych chtěla poděkovat panu Mgr. Lukášovi Richterkovi, Ph.D za vedení mé bakalářské práce, za odborné a cenné rady, které mi poskytl, za jeho ochotu a především za čas, který mi při tvorbě bakalářské práce věnoval. Dále bych chtěla poděkovat předsedům krajských komisí Fyzikální olympiády za jejich ochotu a snahu dohledat výsledky ročníků, které nebyly přístupné na internetových stránkách.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Markéta Ospálková
Název práce	Sbírka úloh Fyzikální olympiády kategorie D
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2022
Abstrakt	Cílem bakalářské práce bylo vytvořit tématicky členěnou sbírku, která poslouží jako pomůcka k přípravě studentů na Fyzikální olympiádu kategorie D. Sbírka obsahuje 50 úloh z celkem 13-ti ročníků (50.-62.rořník). Úlohy jsou v kapitolách řazené sestupně dle indexu obtížnosti a je u nich provedena statistika, spočívajíci ve výpočtu indexu obtížnosti, citlivosti úlohy a procentuálním zastoupení nenormovaných odpovědí. V bakalářské práci se nachází také statistika trendu účasti v krajích pro jednotlivé ročníky a porovnání postupu průměrného a velmi dobrého řešitele.
Klíčová slova	sbírka úloh, fyzikální olympiáda, kategorie D, index obtížnosti, Pearsonův koeficient korelace, nenormované odpovědi, porovnání řešitelů, vývoj účasti, ...
Počet stran	97
Počet příloh	1
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Markéta Ospálková
Title	The Thesis Title
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2022
Abstract	The aim of the bachelor thesis was creating a thematically divided collection, which will serve as an aid for students to prepare for the Physics Olympics, category D. This collection contains 50 tasks from a total of 13 years ($50^{\mathrm{th}}-62^{\mathrm{nd}}$ year). The tasks in chapters of this thesis are sorted in descending order according to the difficulty index and statistics are made, consisting of the calculation of the difficulty index, the sensitivity of the task and the percentage of non-standardized answers. This bachelor thesis also contains statistics of the trend of participation in the regions for individual years and a comparison of the procedure of the average and very good solver.
Keywords	collection of tasks, Physics Olympics, catherogy D, difficulty index, Pearson correlation coefficient, non-standardized answers, comparison of solvers, development of participation, ...
Number of pages	97
Number of appendices	1
Language	czech

Obsah

Úvod

Cílem mé bakalářské práce bylo vytvořit sbírku příkladů Fyzikální olympiády (FO), pomocí které mohou učitelé středních škol připravovat své žáky na krajské kolo fyzikální olympiády kategorie D, která je určena pro 1. ročník středních škol a odpovídající ročníky víceletých gymnázií. Úlohy můžou být také použity jako podpůrný materiál na přípravných seminářích pro řešitele FO případně jako náročnější úlohy pro nadané žáky středních škol. Využít ji mohou i samotní řešitelé k samostatné domácí přípravě.

Sbírka obsahuje celkem 50 úloh z 50.-62. ročníku, vždy po 4 příkladech z každého ročníku kromě 61., z něhož byly do sbírky použity jen 2 příklady. Tento ročník byl v důsledku epidemie COVID-19 společný pro kategorie D, C, B, ale tematicky se kategorie D týkaly jen dvě úlohy.

Úvodní kapitola práce stručně představuje FO jako soutěž a postavení kategorie D v ní. Druhá kapitola se nejprve obecně zmiňuje o charakteristikách testových úloh a jejích určování. Dále následuje konkrétní analýza úloh krajských kol FO kategorie D výše uvedených ročníků, která zahrnuje index obtížnosti, vyhodnocení citlivosti úloh a počtu žáků, kteří v dané úloze nezískali žádný bod.

Třetí kapitola je věnována zadáním krajských kol v jednotlivých ročnících souhrnně, ve čtvrté kapitole jsou na jedné úloze porovnána dvě různá žákovská řešení a diskutován postup úspěšného a méně úspěšného řešitele.

V páté kapitole je v rámci uvedených ročníků FO zmapována účast žáků a trend vývoje počtů řešitelů v krajích, odkud bylo možné získat odpovídající data pro krajské kola FO.

Nejrozsáhlejší 6. kapitola pak obsahuje vlastní sbírku úloh tematicky rozčleněnou do čtyř kapitol (kinematika, dynamika, práce a energie a gravitační pole) odpovídajících obvyklému členění učiva v gymnaziální učebnici [1]. Úlohy jsou tematických celcích řazené podle indexu obtížnosti vypočítaného na základě výsledkových listin krajských kol od nejlehčích po nejobtížnější. Součástí práce je také autorské řešení úloh včetně numerických výsledků.

Protože kategorie D má především motivační charakter, je důležité i zpětně sledovat a hodnotit, nakolik úlohy plní tuto roli a které z nich se v soutěži osvědčily nebo naopak nebyly vhodné. K tomuto účelu se snaží přispět i tato práce.

Kapitola 1

Fyzikální olympiáda (kategorie D)

Jedním z důležitých úkolů současného školství je podpora talentovaných žáků a hlubšího zájmu žáků o konkrétní předmět činnost nebo obor. Tento cíl si kladou i předmětové soutěže vyhlašované každoročně MŠMT. Fyzikální olympiáda, jako jedna z nich, je určená pro žáky základních a středních škol i odpovídající ročníky víceletých gymnázií. Ve školním roce 2021/2022 proběhl již 63. ročník této soutěže. Je rozdělena do více kategorií, přičemž pro střední školy jsou určené kategorie A, B, C a D, pro základní školy pak kategorie E, F a G (též nazývaná Archimédiáda). Žáci se mohou účastnit kategorie odpovídající jejich ročníku (který navštěvují ve škole), ale i kategorií pro ročníky vyšší. Základní informace o soutěži včetně studijních materiálů, zadání a řešení úloh z minulých ročníků lze získat na jejích internetových stránkách [10]. Soutěž organizačně a personálně zajišťují ústřední, krajské a okresní komise ve spolupráci a s podporou Jednoty českých matematiků a fyziků.

Od roku 1967 také probíhá Mezinárodní fyzikální olympiáda – International Physics Olympiad (IPhO, `https://www.ipho-new.org`); Československo bylo jedním z pěti zakládajících států. Do Mezinárodní olympiády vybírá ústřední komise z vítězů ústředního kola kategorie A (maturitní ročník střední školy) a následného výběrového soustředění většinou pět studentů a jednoho náhradníka, viz [11].

FO jako celostátní soutěž proběhla poprvé ve školním roce 1959/1960 pouze v kategoriích A–C. Kategorie D jako „náborová“ pro 9. ročníky ZŠ byla přidána ve školním roce 1963/1964. Současný počet a zaměření kategorií se ustálily od 29. ročníku ve školním roce 1987/1988. Více informací o historii a vývoji FO lze nalézt v řadě příspěvků věnovaných většinou kulatým výročím soutěže, např. v [18].

Nyní je kategorie D určena pro žáky prvních ročníků středních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Tradičně je vnímána jako motivační, s cílem získat pro soutěž mezi středoškoláky co možná největší počet zájemců, jejichž počet ve vyšších a náročnějších kategoriích A–C většinou klesá. Kategorie D se skládá ze dvou kol a to kola školního, které obsahuje celkem sedm úloh po maximálně 10 bodech, z nichž je šest teoretických a jedna praktická. Úlohy školního kola žáci řeší většinou doma s podporou učitelů a jsou opravovány přímo na školách. Do dalšího, krajského kola postupují jen úspěšní řešitelé, což jsou ti žáci, kteří získají alespoň 5 bodů v pěti úlohách a zkusili řešit praktickou úlohu, byť třeba i chybně nebo neúspěšně, o pozvání do krajského kola rozhoduje vždy příslušná krajská komise FO. Krajské a poslední kolo kategorie D obsahuje celkem čtyři teoretické úlohy po maximálně 10 bodech. V obou kolech vždy jedna z úloh vychází ze studijního textu, který je zveřejněn na webových stránkách FO [10] a žáci mají doporučeno ho prostudovat. Každý rok se studijní text pro jednotlivé kategorie mění. Podle organizačního řádu soutěže je úspěšným řešitelem krajského kola student, který získá celkově alespoň 14 bodů a zároveň ve dvou úlohách nejméně 5 bodů.

Úlohy připravuje a recenzuje úlohová komise. V případě kategorie D je ve školním roce 2021/2022 jejím předsedou RNDr. Josef Jírů z Gymnázia a Obchodní akademie Pelhřimov.

Kapitola 2

Analýza úloh

K zadáním krajských kol FO můžeme přistupovat jako ke specifické formě testu a použít tak běžně definované charakteristiky testových úloh i vlastnosti konzistence testu jako celku (v tomto případě soutěžního kola).

2.1 Teoretická část

Při zkoumání vlastností úloh FO byly z dostupných dat vypočteny standardní charakteristiky jako obtížnost a citlivost úloh i počet nenormovaných odpovědí. V následujících podkapitolách stručně připomeňme jejich definice a zavedení.

2.1.1 Obtížnost úlohy

Obtížnost úlohy lze určit pomocí hodnoty obtížnosti Q nebo indexu obtížnosti P. Hodnota obtížnosti udává procentuální zastoupení žáků, kteří úlohu zodpověděli chybně, případně ji vynechali. Index obtížnosti udává procentuální zastoupení žáků, kteří danou úlohu vyřešili správně. Pro výpočet indexu obtížnosti P platí

$$P = 100\,\frac{n}{n_c},$$

kde n je počet žáků se správnou odpovědí u dané úlohy a n_c je celkový počet žáků [12].

Pro vážené skórování máme pro index obtížnosti vztah

$$P = 100\,\frac{\overline{b}}{b}, \tag{2.1}$$

kde $\overline{b}$ je aritmetický průměr získaných bodů v dané úloze pro všechny žáky a b maximální počet bodů, kterého lze v dané úloze dosáhnout [17]. Mezi indexem obtížnosti a hodnotou obtížnosti platí vztah [12]

$$P = 100 - Q.$$

Jako velmi snadné úlohy jsou označovány úlohy, kde P je vyšší než 80, naopak úlohy, kde P je menší než 20, se řadí mezi velmi obtížné [12]. Vzhledem k motivačnímu charakteru kategorie D je vhodné v určité míře zařazovat i úlohy snadnější.

2.1.2 Citlivost úlohy

Citlivost úlohy lze určit pomocí koeficientu ULI, tetrachorického koeficientu citlivosti, bodově biseriálního koeficientu citlivosti a Pearsonova korelačního koeficientu. Podrobnosti o prvních třech způsobech lze najít např. v [12].

Pearsonův korelační koeficient udává vztah mezi bodovým ziskem z dané úlohy a celkovým bodovým ziskem z testu. Platí pro něj vztah

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(h_i - \overline{h})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(h_i - \overline{h})^2}} \tag{2.2}$$

kde x_i je bodový zisk i-tého testovaného pro danou úlohu, $\overline{x}$ je průměrný bodový zisk dosažený v dané úloze, h_i je bodový zisk v celém testu pro i-tého testovaného a $\overline{h}$ je průměrný bodový zisk dosažený v daném testu [17].

Pearsonův korelační koeficient r nabývá hodnot $r \in \langle -1; 1 \rangle$, přičemž záporných hodnot dosahuje u úloh, které žáci s celkovým horším výsledkem řeší úspěšněji. V případě $r = 0$ neexistuje u žáků souvislost mezi body a řešením dané úlohy a jejich celkovým skóre v testu. Úlohy, kde r je kladné, řeší lépe úspěšnější žáci. Čím vetší je r, tím více úloha rozlišuje mezi jednotlivými žáky. Tato vlastnost je u soutěží typu FO žádoucí pro co nejjednoznačnější stanovení pořadí řešitelů.

2.1.3 Nenormované odpovědi

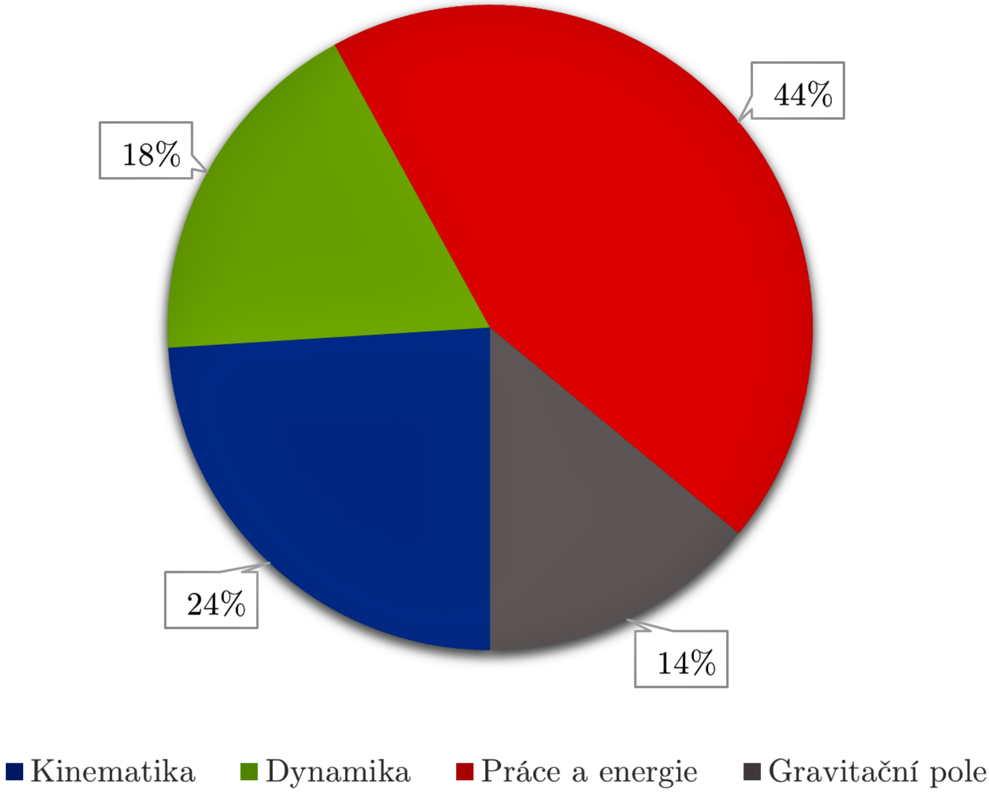
Úloha má tzv. nenormovanou odpověď, pokud žák danou úlohu nezodpověděl nebo jí měl zcela chybně (tedy získal 0 bodů). Uvádí se, že v testu s otevřenými odpovědmi musíme věnovat zvýšenou pozornost úlohám, kde nenormovanou odpověď má 30-40 % řešitelů, u uzavřených úloh pak 20 % řešitelů [12].

2.2 Praktická část: vlastnosti sledovaných úloh FO

Data pro praktickou část byla částečně získána na internetových stránkách krajských komisí FO ([13], [16], [15], [4], [5], [6], [7], [19], [8], [14], [3], [20], [2] a [9]). Údaje volně dohledatelné na internetu byly doplněny o výsledky ročníků, jež poskytli na požádání předsedové krajských komisí. I tak se bohužel nepovedlo dohledat všechny výsledkové listiny. Několik listin mělo uvedeno u žáků jen celkový počet bodů a nebylo patrné kolik bodů student získal z konkrétních úloh, tyto listiny tedy nešly ke statistice úloh použít. Získaná data, ze kterých se vyhodnocovala analýza testových úloh, jsou uvedena v tabulce 1. Kompletní data za všechny ročníky byla k dispozici pouze ze čtyř krajů – Jihočeského, Libereckého, Pardubického a Olomouckého. Žáci s celkovým ziskem 0 bodů byli ze statistiky vyloučeni, v některých krajích není totiž patrné, zda byl žák nepřítomen nebo získal 0 bodů ze všech úloh. Z tohoto důvodu se jevilo jako přínosnější pro statistiku tyto žáky zcela vyloučit, aby nedošlo k výraznému zkreslení dat.

Jako nejpřirozenější a nejvhodnější způsob tematického členění úloh byly použity kapitoly středoškolské učebnice [1]. Úlohy tak byly zařazeny do čtyř kapitol: kinematika, dynamika, práce a energie a gravitační pole. Pokud úloha obsahovala učivo z více kapitol, byla přiřazena do kapitoly probírané podle [1] později. Procentuální zastoupení jednotlivých kapitol zobrazuje diagram na obr. 2.1.

Úlohy z kinematiky jsou seřazené sestupně podle indexu obtížnosti (2.1) v tabulce 2. U úloh je také vypočítaný Pearsonův koeficient korelace (2.2), který udává citlivost



Obrázek 2.1: Procentuální zastoupení jednotlivých kapitol

úlohy. Pro všechny vypočítané úlohy je větší než nula, tedy úlohy by měli lépe řešit nadaní žáci. Poslední počítanou položkou v tabulce je procentuální zastoupení nenormovaných odpovědí, kde s 46,7 % nevyhovuje jedna úloha FO62D2-4 z celkem 12, tj. 8,3 %.

Stejným způsobem jsou seřazené i úlohy z dynamiky v tabulce 3. Z hlediska indexu obtížnosti i citlivosti úloh, vyhovují všechny úlohy, avšak procentuálnímu zastoupení nenormovaných odpovědí nevyhovují hned 4 úlohy z celkových 9, tj. 44 %.

Úlohy z kapitoly práce a energie se v testu vyskytují nejčastěji, podle indexu obtížnosti jsou seřazené v tabulce 4. Z hlediska indexu obtížnosti nevyhovuje úloha FO53D2-1, která se s 18,0 % řadí k obtížným, u této úlohy je i vysoký počet nenormovaných odpovědí a to 61,9 %. V kapitole je dále dalších 5 nevyhovujících úloh z hlediska nenormovaných odpovědí a to FO52D2-3, FO59D2-4, FO61D2-2, FO60D2-4 a FO55D2-1. Nevyhovujících úloh je v této kapitole 6 z celkových 22, tj. 27 %.

Poslední kapitolou je gravitační pole, jehož úlohy jsou stejným způsobem seřazené v tabulce 5. Z hlediska indexu obtížnosti i citlivosti úloh jsou všechny vyhovující, avšak 4 úlohy z celkových 7 mají vysoký počet nenormovaných odpovědí, tj. 57 %. Nevyhovují úlohy FO50D2-3, FO56D2-4, FO51D2-44 a FO55D2-4.

Z celkového počtu 50 úloh jich bylo 15 (30 %) pro žáky obtížných, což je vzhledem k motivačnímu charakteru kategorie D poměrně vysoký podíl.

Z průměrného indexu obtížnosti pro jednotlivé kapitoly vidíme, že s 58,0 % je kinematika pro žáky nejjednodušší, další tři kategorie jsou srovnatelné, pro dynamiku dostaneme průměrný index obtížnosti 39,6 %, pro kategorii práce a energie pak 41,9 % a pro gravitační pole 37,3 %.

Zastoupení vyhovujících a nevyhovujících úloh v rámci jednotlivých kapitol je graficky znázorněn na obr.2.2.

kraj	ročník						
	50	51	52	53	54	55	56
Jihočeský kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Jihomoravský kraj	–	–	–	–	–	ano	ano
Karlovarský kraj	ano	–	ano	ano	ano	ano	ano
Kraj Vysočina	–	–	–	–	ano	ano	ano
Královéhradecký kraj	–	–	ano	ano	ano	ano	ano
Liberecký kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Moravskoslezský kraj	ano	–	ano	ano	–	ano	ano
Olomoucký kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Pardubický kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Plzeňský kraj	–	–	–	–	ano	ano	ano
Praha	–	–	–	–	ano	ano	ano
Středočeský kraj	–	–	–	–	–	–	–
Ústecký kraj	–	–	–	–	–	–	–
Zlínský kraj	–	–	–	ano	ano	ano	ano

kraj	ročník					
	57	58	59	60	61	62
Jihočeský kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Jihomoravský kraj	ano	ano	–	–	–	ano
Karlovarský kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Kraj Vysočina	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Královéhradecký kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Liberecký kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Moravskoslezský kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Olomoucký kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Pardubický kraj	ano	ano	ano	ano	–	ano
Plzeňský kraj	–	ano	ano	ano	–	ano
Praha	ano	ano	ano	ano	ano	ano
Středočeský kraj	–	–	–	–	–	ano
Ústecký kraj	–	–	ano	ano	–	ano
Zlínský kraj	ano	ano	ano	ano	ano	ano

Tabulka 1: Získaná data pro analýzu úloh.

číslo úlohy	index obtížnosti v %	citlivost úlohy	nenormované odpovědi v %
FO59D2-1	74,7	0,663	2,1
FO50D2-1	73,7	0,669	1,3
FO62D2-1	73,5	0,675	2,4
FO51D2-1	64,3	0,721	2,2
FO57D2-2	62,0	0,736	6,3
FO56D2-1	61,2	0,720	9,3
FO54D2-1	60,3	0,671	5,4
FO61D2-1	59,7	0,699	10,4
FO57D2-3	49,1	0,800	6,6
FO53D2-4	45,7	0,737	22,8
FO58D2-1	39,2	0,722	11,8
FO62D2-4	32,0	0,769	46,7
průměr:	58,0	0,715	10,6

Tabulka 2: Charakteristiky úloh z kinematiky

úloha	index obtížnosti v %	citlivost úlohy	nenormované odpovědi v %
FO52D2-2	51,9	0,776	1,0
FO58D2-4	49,9	0,765	13,4
FO55D2-2	49,0	0,782	23,2
FO50D2-2	46,2	0,802	28,2
FO60D2-2	40,7	0,799	31,7
FO54D2-3	35,6	0,744	23,6
FO59D2-2	32,0	0,799	36,7
FO57D2-4	31,0	0,708	38,0
FO52D2-4	20,5	0,742	51,5
průměr:	39,6	0,769	27,5

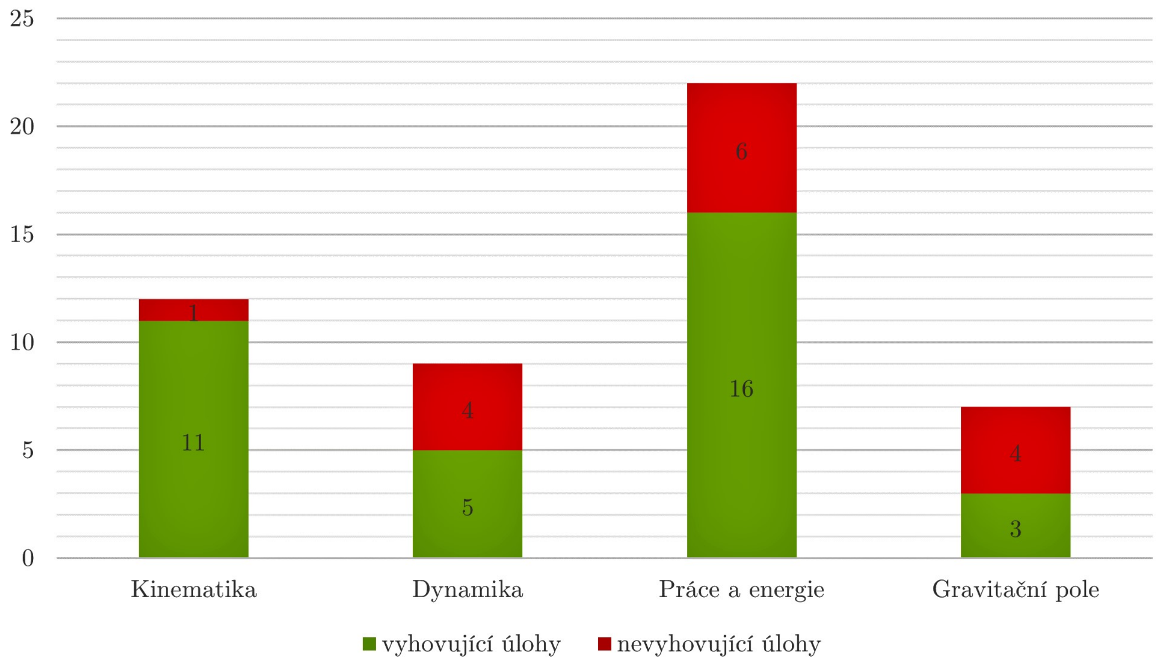
Tabulka 3: Charakteristiky úloh z dynamiky

úloha	index obtížnosti v %	citlivost úlohy	nenormované odpovědi v %
FO55D2-3	57,3	0,656	1,8
FO56D2-3	55,3	0,726	3,3
FO62D2-3	54,3	0,764	12,6
FO54D2-2	50,7	0,663	5,1
FO57D2-1	50,2	0,799	6,6
FO53D2-2	50,0	0,640	9,0
FO52D2-1	49,3	0,737	14,9
FO56D2-2	47,4	0,688	3,3
FO53D2-3	46,7	0,783	25,0
FO62D2-2	43,3	0,796	21,5
FO54D2-4	41,9	0,777	23,3
FO51D2-3	41,7	0,850	7,6
FO52D2-3	40,2	0,835	33,0
FO60D2-3	39,8	0,718	12,2
FO60D2-1	38,3	0,788	20,0
FO58D2-2	36,7	0,659	14,1
FO59D2-3	36,6	0,780	19,1
FO59D2-4	36,4	0,825	42,7
FO61D2-2	33,1	0,742	34,1
FO60D2-4	32,7	0,776	36,2
FO55D2-1	21,7	0,699	38,9
FO53D2-1	18,0	0,695	61,9
průměr:	41,9	0,745	20,3

Tabulka 4: Charakteristiky úloh z tématu práce a energie

úloha	index obtížnosti v %	citlivost úlohy	nenormované odpovědi v %
FO51D2-2	57,8	0,802	13,0
FO58D2-3	43,3	0,809	21,2
FO50D2-4	35,2	0,645	10,1
FO50D2-3	34,0	0,772	46,3
FO56D2-4	32,4	0,770	36,7
FO51D2-4	30,7	0,743	34,8
FO55D2-4	27,5	0,642	39,4
průměr:	37,3	0,740	28,8

Tabulka 5: Charakteristiky úloh z tématu gravitační pole



Obrázek 2.2: Zastoupení vyhovujících a nevyhovujících úloh v rámci jednotlivých kapitol.

Kapitola 3

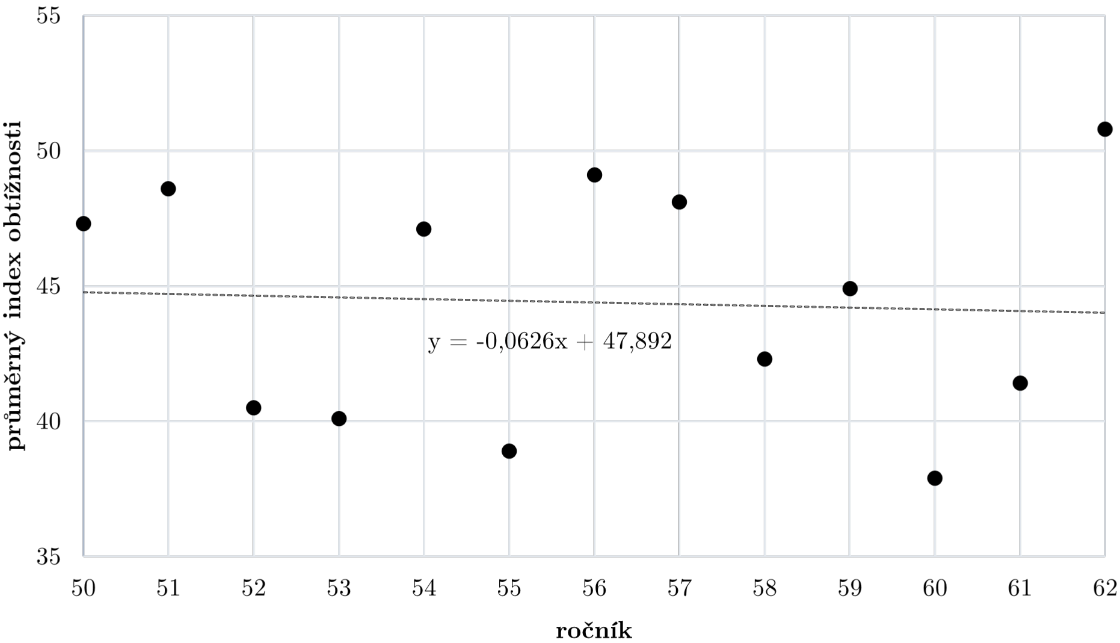
Analýza soutěžních ročníků

V této kapitole uvedeme charakteristiky soutěžních ročníků, přičemž sadu 4 úloh zadaných v každém z nich chápeme jako specifický druh testu. Index obtížnosti testu můžeme vypočítat jako aritmetický průměr indexů obtížnosti jednotlivých úloh. Pro dané ročníky jsou indexy obtížnosti uvedeny v tabulce 6. V tabulce jsou zaznačeny vhodné úlohy (zeleně), hraniční úlohy (oranžově) a nevhodné úlohy (červeně).

ročník	průměrný index obtížnosti [%]	úloha			
		1	2	3	4
50.	47,3				
51.	48,6				
52.	40,5				
53.	40,1				
54.	47,1				
55.	38,9				
56.	49,1				
57.	48,1				
58.	42,3				
59.	44,9				
60.	37,9				
61.	41,4				
62.	50,8				

Tabulka 6: Průměrná obtížnost

Průměrný index obtížnosti pro jednotlivé ročníky jsme proložili lineární křivkou, viz obr. 3.1. Přímka má velmi mírně klesající charakter, klesá se směrnicí -0,0626, tedy obtížnost úloh zůstává prakticky stejná (z grafu je zřejmá fluktuace indexu obtížnosti mezi jednotlivými ročníky). Ročník 62, který probíhal online, má nejvyšší index obtížnosti; mohlo se stát, že někteří žáci navzájem spolupracovali. Průměrný index obtížnosti podle počtu vhodných úloh je uvedený v tabulce 7. Jde vidět, že s přibývajícím množstvím vhodných příkladů, roste průměrný index obtížnosti pro tyto ročníky a blíží se ideální hodnotě 50 %.



Obrázek 3.1: Průměrný index obtížnosti pro jednotlivé ročníky

počet vhodných úloh v ročníku	průměrný index obtížnosti pro dané ročníky v %
2	40,5
3	45,8
4	46,7

Tabulka 7: Závislost počtu vhodných úloh v ročníku na průměrném indexu obtížnosti těchto ročníků

Kapitola 4

Porovnání různých řešení jedné úlohy

Úlohy FO jsou pochopitelně náročnější a komplexnější než ty, s nimiž se žáci většinou setkávají ve výuce fyziky ve škole. Pro řadu řešitelů je kategorie D prvním setkáním s těmito typy úlohy a může být pro ně užitečné si uvědomit a osvojit určité zásady a postupy, jež jim pomohou řešení rozložit do postupných kroků nebo se vyvarovat zbytečných chyb. Za tímto účelem byla popsána řada návodů, jak postupovat, např. podle [21], by se při výpočtu fyzikálních úloh mělo postupovat pomocí následujících kroků, z nichž všechny jsou klíčové pro správné vyřešení úlohy. Žák by měl typicky dodržovat pořadí kroků a žádný nevynechat.

- 1. krok: *Zaměřit se na problém a vytvořit si jeho jasnou představu.*
  V tomto kroku by si žák měl udělat vizualizaci problému, například načrtnutím obrázku. Dále by měl rozpoznat fyzikální koncepty a přístupy, které bude v úloze potřebovat k řešení a jasně si formulovat otázku, kterou po něm zadání úlohy žádá.

- 2. krok: *Popsat a vystihnout fyzikální podstatu problému*
  Zde by měl žák podrobněji upřesnit své představy, nakreslit všechny potřebné diagramy i se souřadnicovými systémy. Dále by si měl definovat symboly, pro všechny použité veličiny, aby byly konzistentní.

- 3. krok: *Naplánování postupu řešení.*
  V tomto kroku by žák měl sestavit rovnice pro výpočet fyzikální hodnoty ze zadání pomocí kroku 2 a měl by mít představu, jak se od hodnot v zadání dostane k požadovaným hodnotám a odpovědím na otázky ze zadání úlohy.

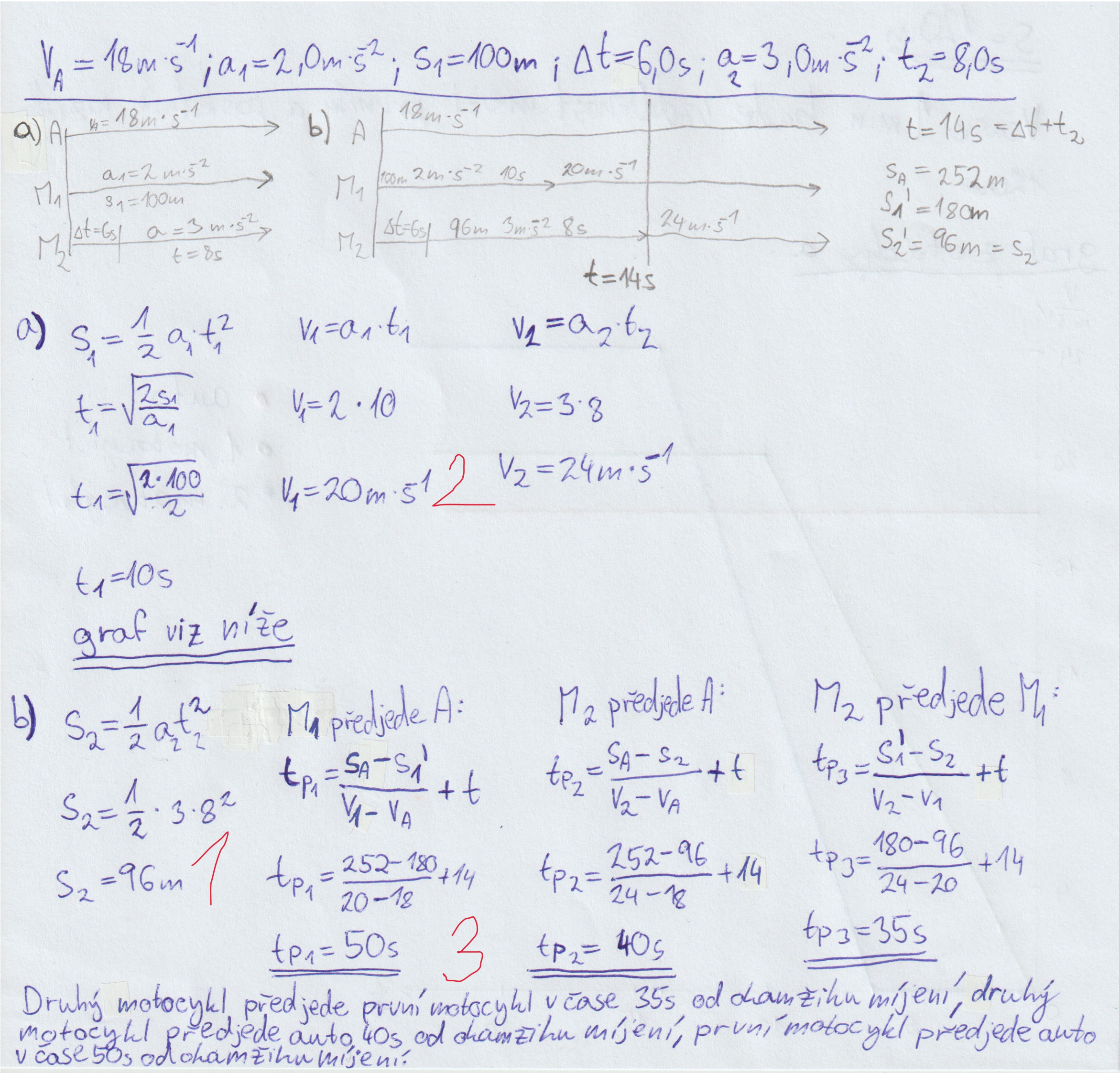
- 4. krok: *Provedení plánu.*
  Zde žák provede plán z kroku 3. Je to tedy numerická část, kdy už pomocí sestavených rovnic spočítá výslednou hodnotu. Měl by dát pozor na správné jednotky případně u složitějších výpočtů provést rozměrovou zkoušku.

- 5. krok: *Vyhodnocení řešení.*
  Zde by měl být žák skeptický a zamyslet se nad správností svého řešení. Zda odpovídá na to, co se po něm požaduje, ale také zda výsledek dává smysl. Měl by také zkontrolovat, jestli odpověděl na všechno, co vyžadovalo zadání.

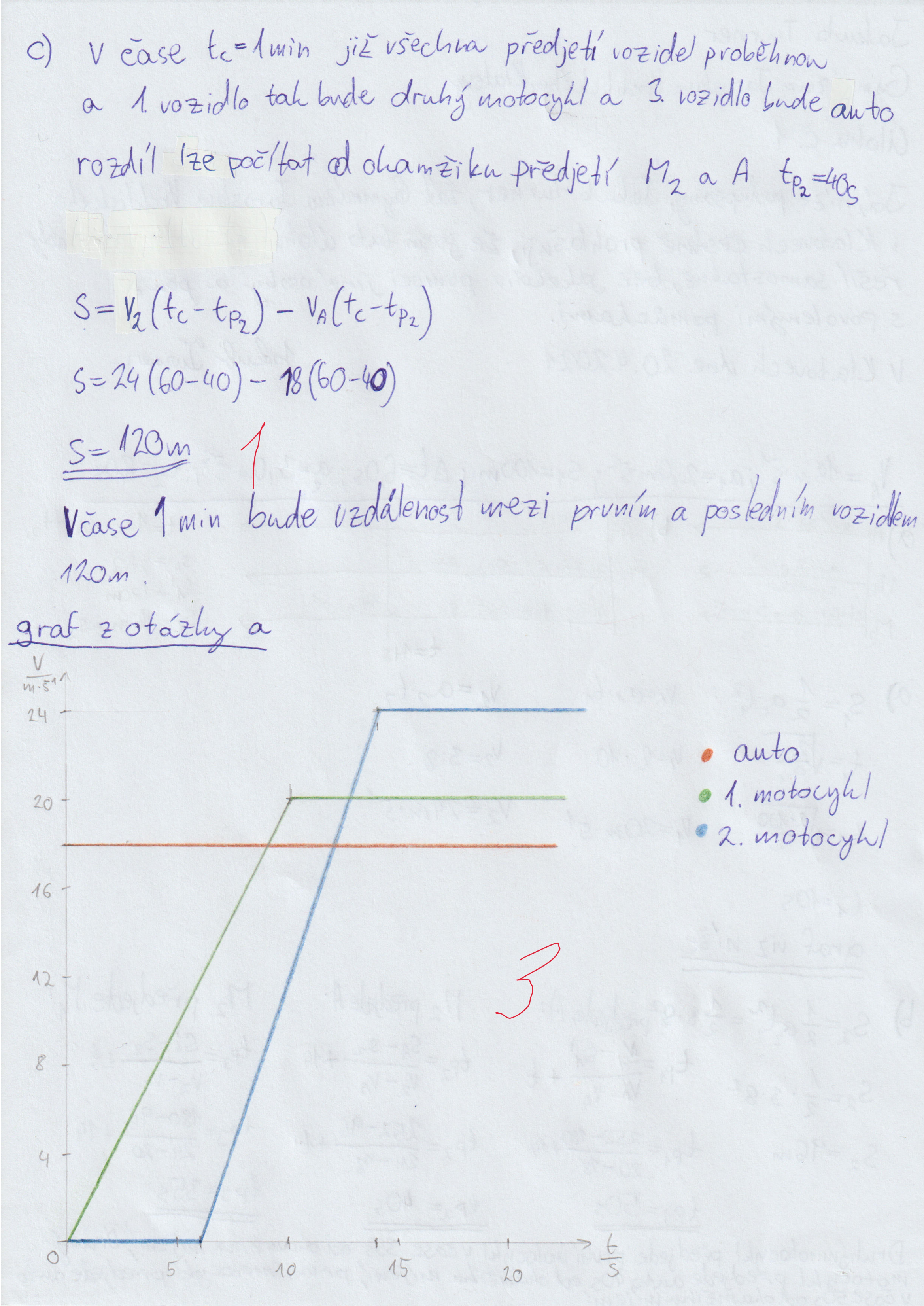
4.1 Rozbor dvou různých řešení

Z důvodu pandemie Covid-19 proběhl 62. ročník online formou, máme tedy k dispozici přímo řešení žáků a můžeme porovnat postup při úspěšně řešené a méně úspěšně řešené úloze. Pro analýzu byla zvolena úloha FO62D2-1, jejíž zadání lze nalézt na s. 35.

Z důvodu GDPR nejsou u řešení uvedena jména studentů. Student A řešil úlohu úspěšně, jeho řešení je na obr. 4.1 a 4.2. Řešení studenta B, který úlohu vyřešil méně úspěšně, nalezneme na obr. 4.3, 4.4 a 4.5.



Obrázek 4.1: Úspěšně řešená úloha 1. část


c) V čase $t_c = 1\,min$ již všechna předjetí vozidel proběhnou a 1. vozidlo tak bude druhý motocykl a 3. vozidlo bude auto rozdíl lze počítat od okamžiku předjetí M_2 a A $t_{P_2} = 40\,s$

$$S = v_2(t_c - t_{P_2}) - v_A(t_c - t_{P_2})$$

$$S = 24(60-40) - 18(60-40)$$

$$\underline{\underline{S = 120\,m}}$$

1

V čase 1 min bude vzdálenost mezi prvním a posledním vozidlem 120 m.

graf z otázky a

Obrázek 4.2: Úspěšně řešená úloha 2. část

Student A

1. krok

Student načrtl obrázek, ze kterého je patrné, že pochopil správně situaci ze zadání.

2. krok
Student si definoval symboly a rozpoznal druh pohybu v jednotlivých úsecích; správně vyhodnotil, že v části a) potřebuje spočítat (dle jeho značení) t_1, v_1 a v_2. V části b) správně vyhodnotil, že na začátku měření (hned po míjení automobilu a 1. motocyklu) jsou vozidla v pořadí: automobil, 1. motocykl, 2. motocykl. Zaměřil se tedy na počítání doby předjetí automobilu 1. motocyklem, automobilu 2. motocyklem a 1. motocyklu 2. motocyklem. V části b) si také ověřil, zda se budou vozidla míjet až po ustálení jejich rychlostí, nebo v části, kde vozidla zrychlují. Podle jeho výpočtů ve 14. sekundě od míjení automobilu a 1. motocyklu byla ujetá dráha všech tří vozidel seřazená vzestupně, ve stejném pořadí jako byla doba vyjetí. Z čehož správně usoudil, že k míjení ještě nedošlo. V části c) správně rozebral situaci a uvědomil si, které vozidlo je první a které poslední.

3. krok
Napsal si potřebné rovnice pro výpočet, v části a) správně použil rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb, v části b) využil znalosti ujeté vzdálenosti v čase $t = 14\,s$ a z tohoto výpočtu vycházel. Použil vzorec pro čas míjení jako $t_x = \dfrac{\Delta s}{\Delta v} + t$, kde za rozdíl vzdálenosti a rychlosti použil konkrétní hodnoty pro dané dva dopravní prostředky. Tady by se dala vytknou neobecnost řešení, kdy si student dělá mezivýpočty, které pak dosazuje do „hlavního“ vzorce. V části c) správně sestavil vzorec pro výpočet dráhy, jako rozdíl u drah v daný okamžik pro obě vozidla.

4. krok
Výpočty student A provedl bez numerické chyby.

5. krok
Nelze ověřit, zde se student zamyslel nad správností výsledku.

Student B
1. krok
Student si nenačrtl obrázek.

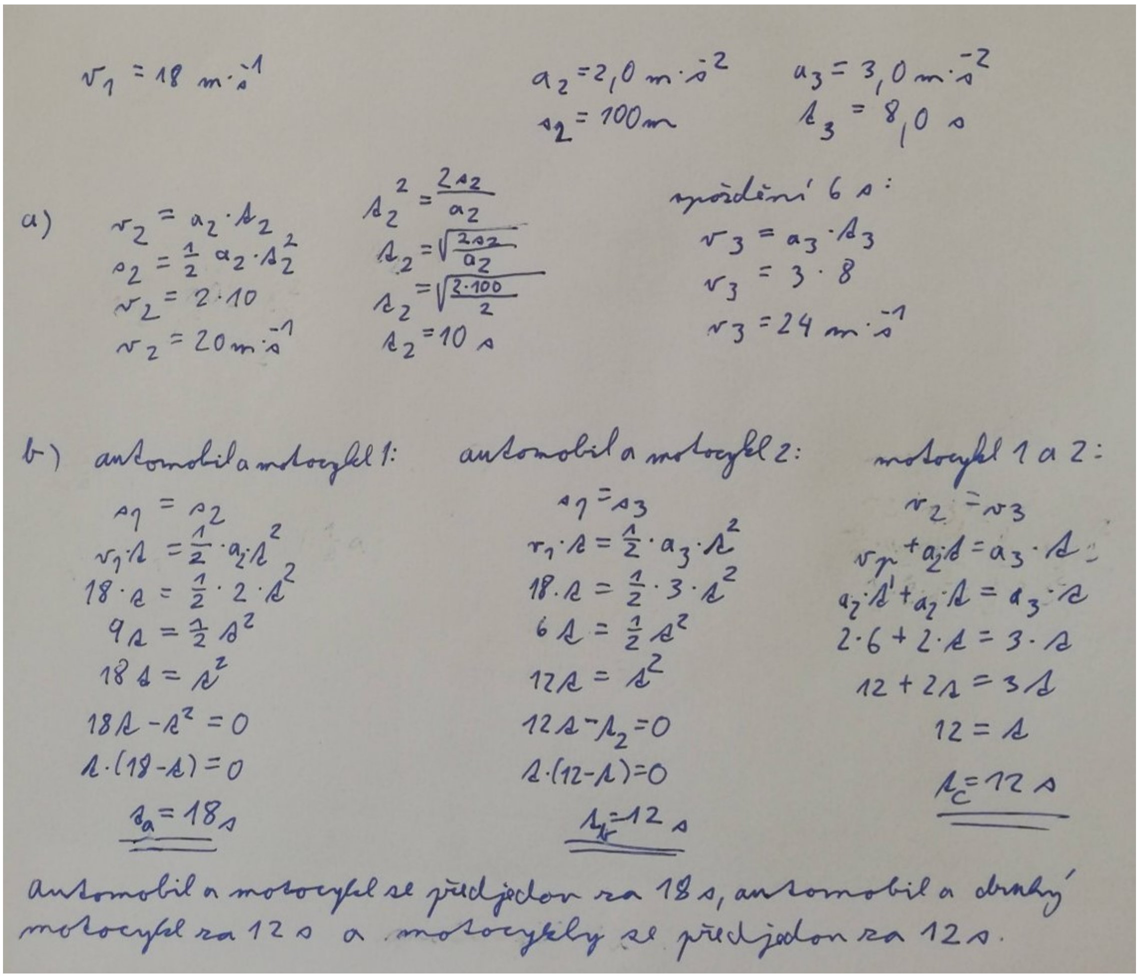
2. krok
Student si označil veličiny, rozpoznal, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb a o pohyb rovnoměrně přímočarý. I přes chybějící obrázek v části a) správně určil veličiny, jež je třeba dopočítat v jednotlivých částech. Jediný nedostatek je v části b), kde používá veličinu t' a nikde není uvedeno, co tato veličina znamená.

3. krok
Tento krok se stal pro studenta klíčový, v části a) správně určil rovnice z nichž dostane potřebné veličiny. V části b) určil správným postupem, že vozidla se budou míjet, když ujedou stejnou dráhu. Pro dvě míjení ze tří dal správně do rovnosti dráhy, u třetího míjení, pravděpodobně z nepozornosti, student dal do rovnosti rychlosti, z nichž jedna byla zadaná a druhá spočítaná v části a), jež ale nemají být stejné. Další chyba v této části je špatný vzorec pro výpočet dráhy 1. motocyklu, kdy student použil vzorec pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Byl to ale pohyb složený, z rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně přímočarého. Pravděpodobně se tak stalo na základě chybějícího obrázku, kdy student zapomněl na tuto skutečnost. Pravděpodobně také ze stejného důvodu zapomněl u dráhy 2. motocyklu zohlednit, že vyjížděl později a že jeho pohyb byl taktéž

složený, vzorec je tedy sestaven chybně. V části c) je u dráhy 2. motocyklu použit vzorec pro složený pohyb z rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně přímočarého, avšak student i tady zapomněl na fakt, že vozidlo vyjíždělo s 6-ti sekundovým zpožděním.

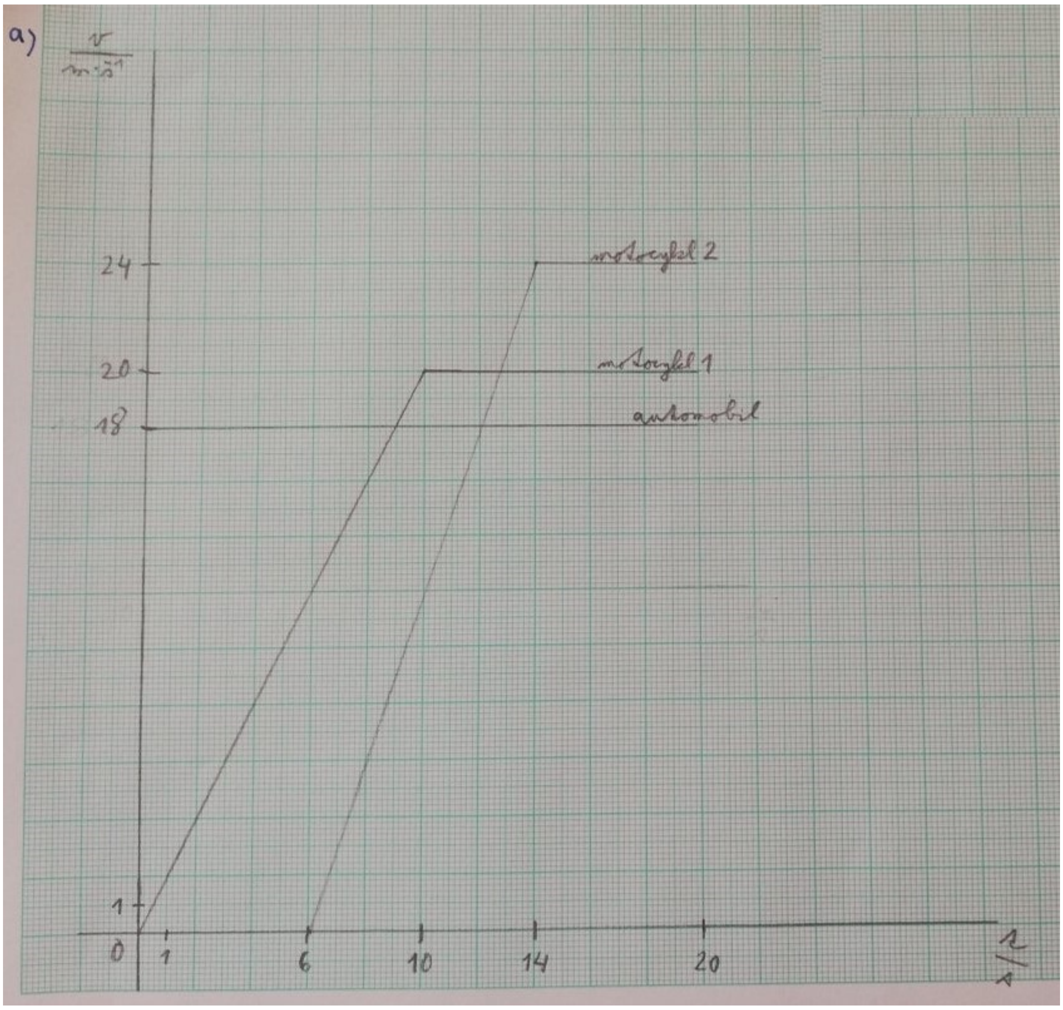
4. krok
V řešení nejsou numerické chyby.

5. krok
Student tento krok neprovedl, neboť by si u části b) všimnul, že spočítaná hodnota času míjení automobilu a 2. motocyklu se rovná době míjení 1. a 2. motocyklu, z toho by mělo být patrné, že by se v tento okamžik míjelo i auto s 1. motocyklem, ale to odporuje jeho vypočítanému času pro tuto dvojici, chyba v řešení je tedy zjevná. Dále si student nevšiml, že dráhu pro 2. motocykl počítá v části b) jiným vzorcem něž v části c).

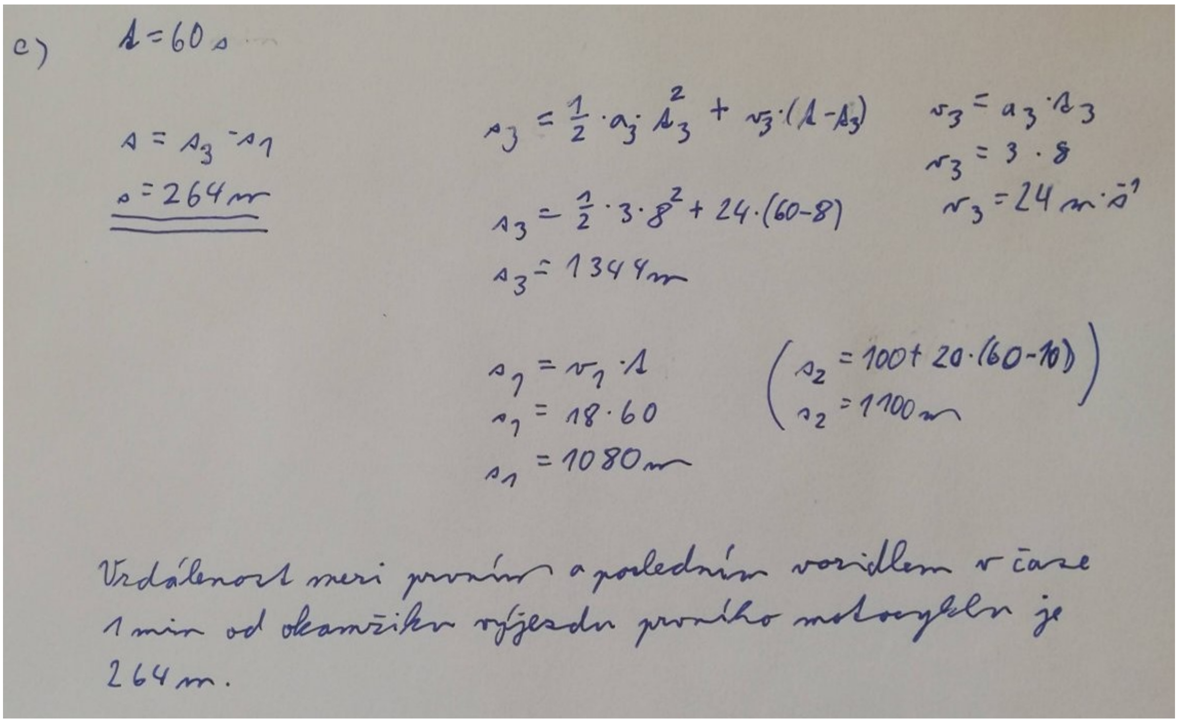


Obrázek 4.3: Méně úspěšně řešená úloha 1. část

Při porovnání studenta A a B můžeme říct, že první student se nedopustil závažné chyby, která by mu znemožnila úlohu správně vyřešit, student postupoval v souladu z kroky z [21]. Student B řádně neprovedl 1. krok, což mohlo vést k potížím, které v průběhu výpočtu měl, například u již zmiňované dráhy 2. motocyklu, kdy u části b) zapomněl, že to byl složený pohyb, části c) si na tuto skutečnost vzpomněl. Domnívám se, že s případným obrázkem, který znázorňuje danou situaci by se to nestalo. Zanedbání kroku 5 vedlo k tomu, že si student B neuvědomil chyby, kterých se dopustil.



Obrázek 4.4: Méně úspěšně řešená úloha 2. část



Obrázek 4.5: Méně úspěšně řešená úloha 3. část

Kapitola 5

Vývoj počtu účastníků v čase

Z hlediska organizace každé soutěže je zajímavé sledovat, jak se s časem vyvíjí zájem o tuto aktivitu a počet zapojených žáků. Zatímco o počtu řešitelů školního kola nejsou k dispozici žádné spolehlivé údaje, u krajských kol jsou počty řešitelů většinou evidovány. V tabulce 8 a 9 jsou přehledně shrnuty dostupné a dohledatelné údaje o počtech účastníků krajských kol kategorie D v 50.–62. ročníku FO. Vidíme, že údaje ze všech ročníků jsou k dispozici pouze ve 4 krajích (Jihočeském, Libereckém, Pardubickém a Olomouckém).

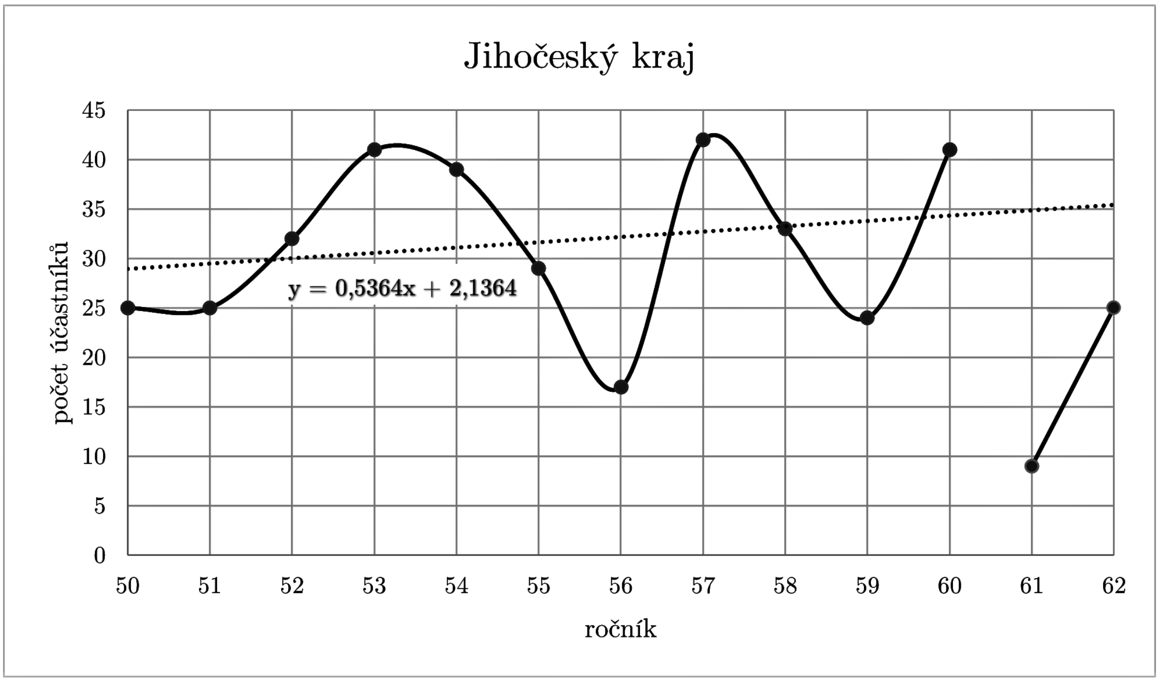
kraj	ročník						
	50	51	52	53	54	55	56
Jihočeský kraj	25	25	32	41	39	29	17
Jihomoravský kraj	–	–	–	–	–	40	52
Karlovarský kraj	15	–	15	9	14	17	16
Kraj Vysočina	–	–	–	–	50	34	31
Královéhradecký kraj	–	–	32	39	25	29	31
Liberecký kraj	17	23	18	27	25	24	11
Moravskoslezský kraj	36	–	44	46	–	45	57
Olomoucký kraj	37	22	39	46	41	44	34
Pardubický kraj	19	22	14	27	19	10	19
Plzeňský kraj	–	–	–	–	28	43	36
Praha	–	–	–	–	26	44	29
Středočeský kraj	–	–	–	–	–	–	–
Ústecký kraj	–	–	–	–	–	–	–
Zlínský kraj	–	–	–	33	29	37	32

Tabulka 8: Získaná data pro počet účastníků v 50.–56. ročníku

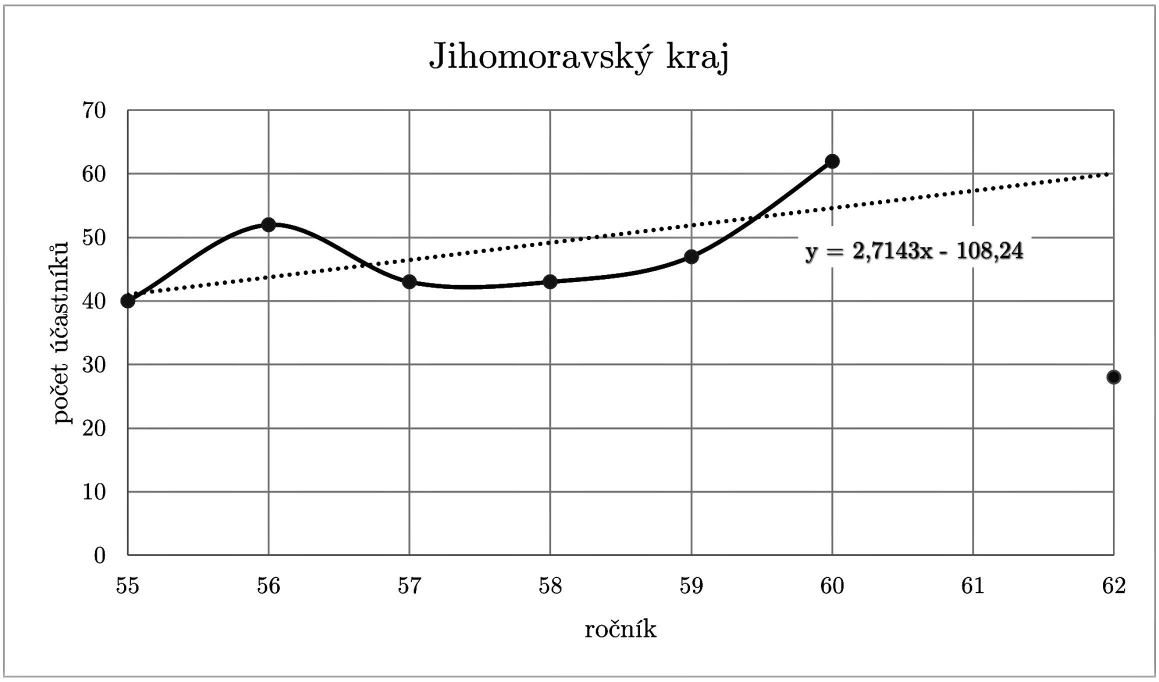
kraj	ročník					
	57	58	59	60	61	62
Jihočeský kraj	42	33	24	41	9	25
Jihomoravský kraj	43	43	47	62	–	28
Karlovarský kraj	15	16	12	18	3	5
Kraj Vysočina	35	37	36	37	6	11
Královéhradecký kraj	34	23	20	28	11	10
Liberecký kraj	28	14	12	28	8	10
Moravskoslezský kraj	40	46	56	48	29	29
Olomoucký kraj	30	34	24	38	11	21
Pardubický kraj	24	16	21	17	–	11
Plzeňský kraj	–	26	36	47	–	17
Praha	60	46	43	62	40	36
Středočeský kraj	–	–	–	–	–	7
Ústecký kraj	–	–	22	30	–	26
Zlínský kraj	28	48	24	42	18	10

Tabulka 9: Získaná data pro počet účastníků v 57.–62.ročníku

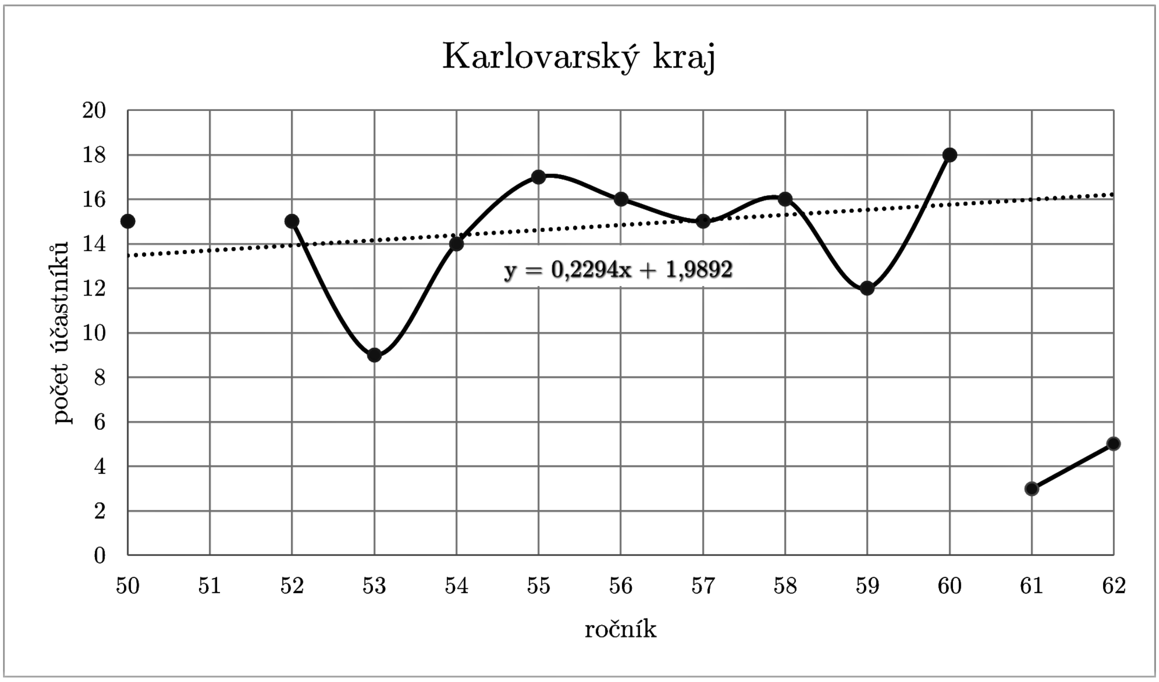
Dostupné údaje pro jednotlivé kraje jsou vyneseny do grafu na obrázcích 5.1-5.12. Grafy pro jednotlivé kraje jsou seřazeny abecedně, Středočeský a Ústecký kraj nejsou zastoupeny neboť nebylo možné údaje získat vůbec. V grafech jsou vyneseny ročníky, z nichž jsou data dostupná. Jak lze předpokládat, počty účastníků krajských kol meziročně fluktuují. Aby bylo možné vysledovat trend vývoje počtu řešitelů, jsou data pro 50.–60. ročník proložena lineární křivkou pomocí standardní lineární regresní analýzy v tabulkovém kalkulátoru Excel. Ročníky 61. a 62. nebyly do výpočtu lineárního trendu zahrnuty, protože proběhly za specifických podmínek – probíhaly v jiném režimu z důvodu covidových opatření a počet účastníků byl ve všech krajích výrazně nižší než předtím, došlo by tak ke zkreslení odhadu trendu vývoje. Nakolik se toto období projeví v počtu řešitelů v dalších letech bude jistě zajímavé po čase vyhodnotit.



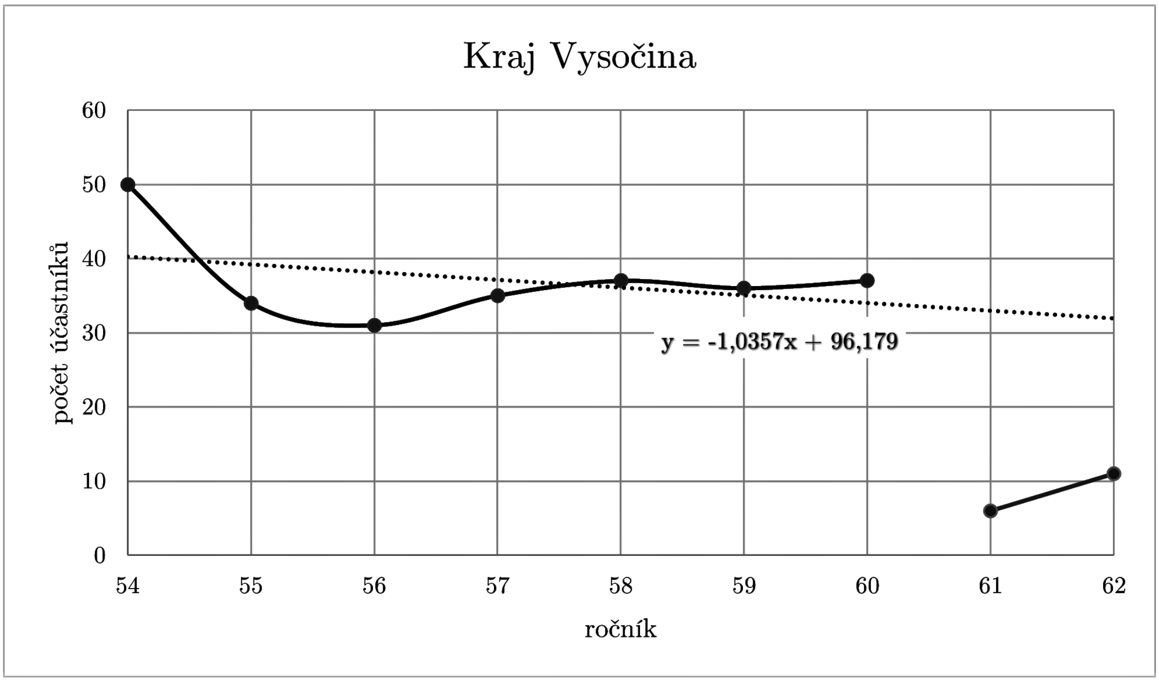
Obrázek 5.1



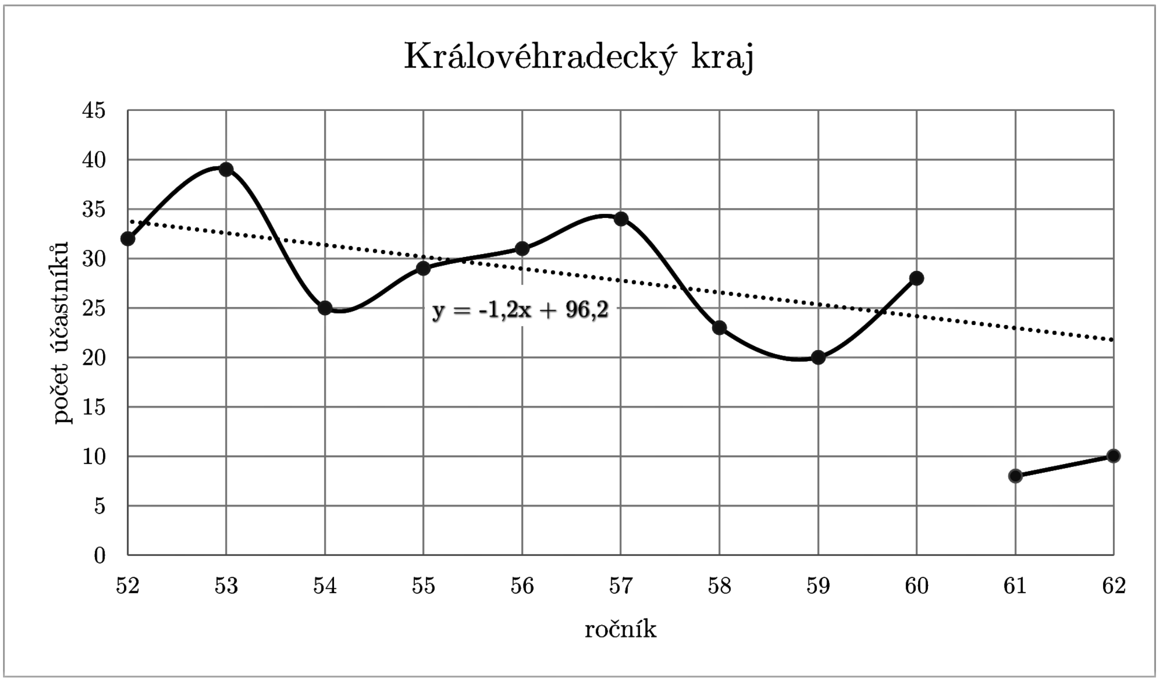
Obrázek 5.2: Počet účastníků jednotlivých ročníků Jihomoravského kraje.



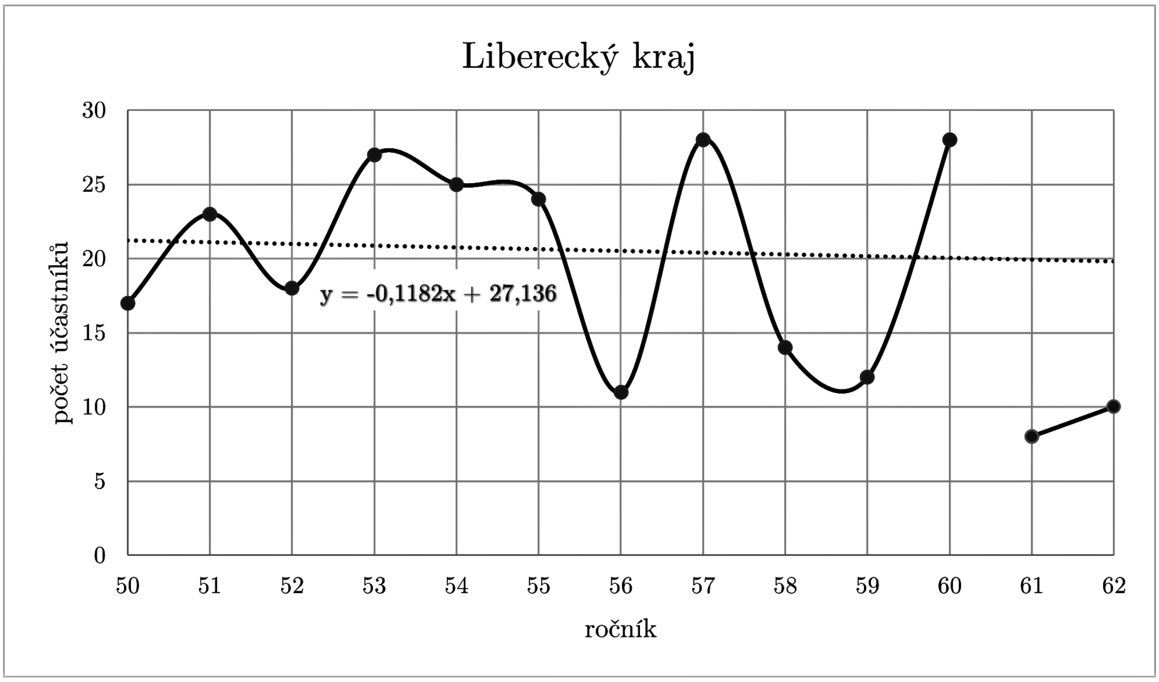
Obrázek 5.3: Počet účastníků jednotlivých ročníků Karlovarského kraje



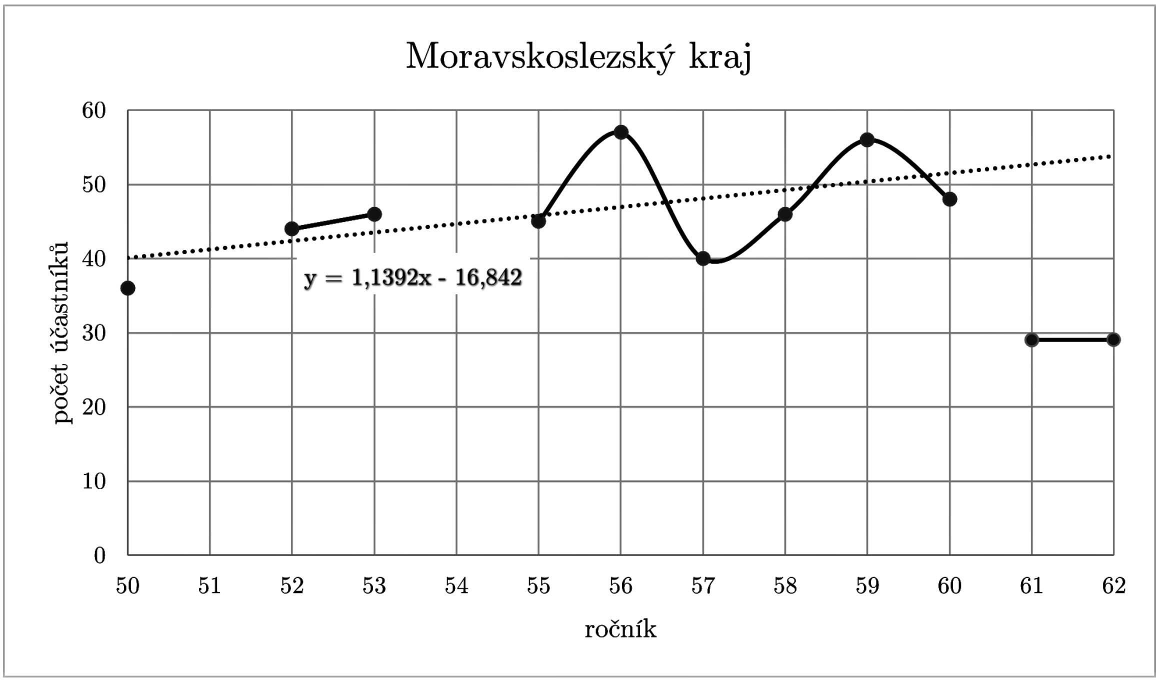
Obrázek 5.4: Počet účastníků jednotlivých ročníků Kraje Vysočina



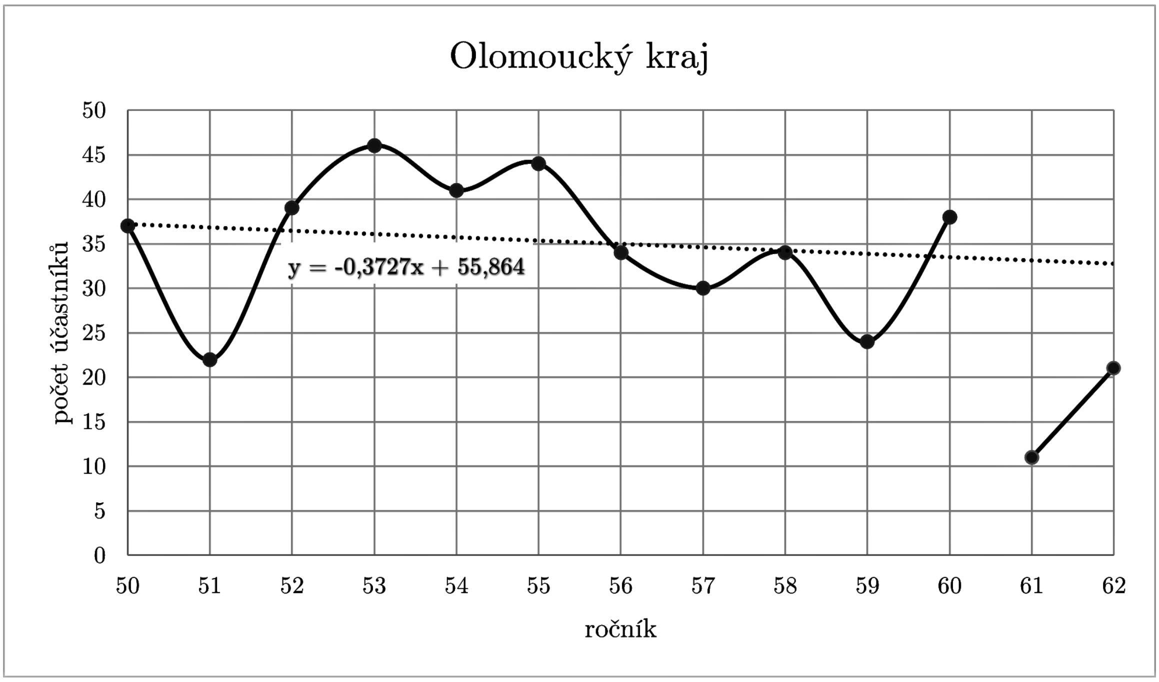
Obrázek 5.5: Počet účastníků jednotlivých ročníků Královéhradeckého kraje



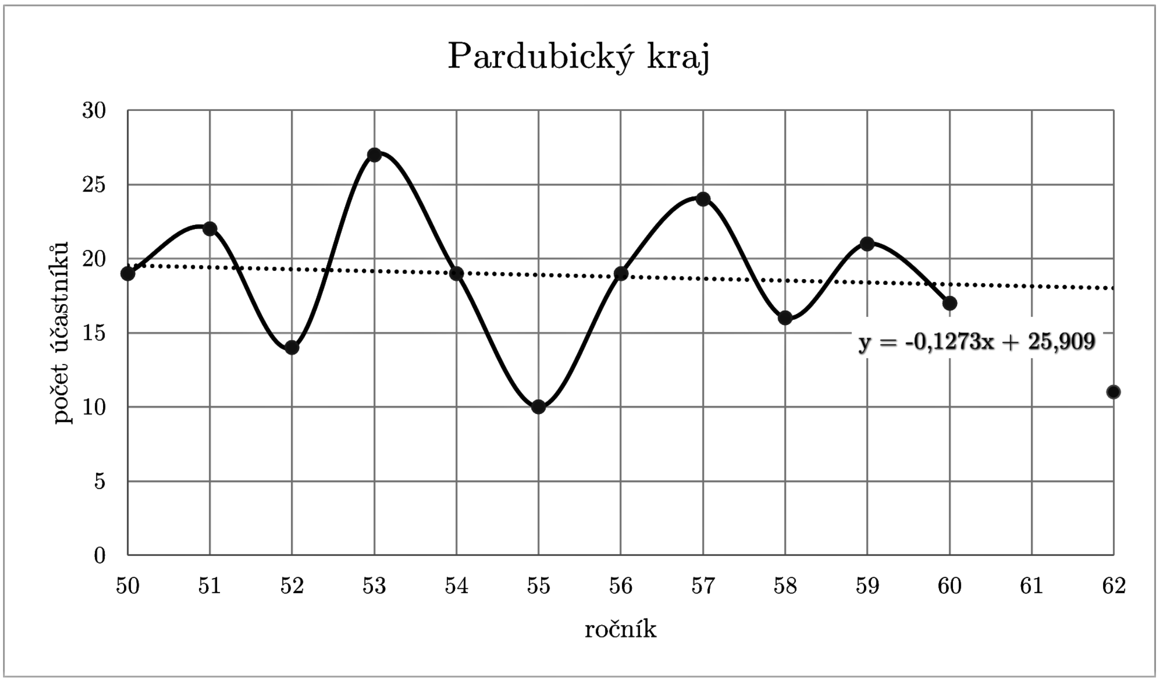
Obrázek 5.6: Počet účastníků jednotlivých ročníků Libereckého kraje



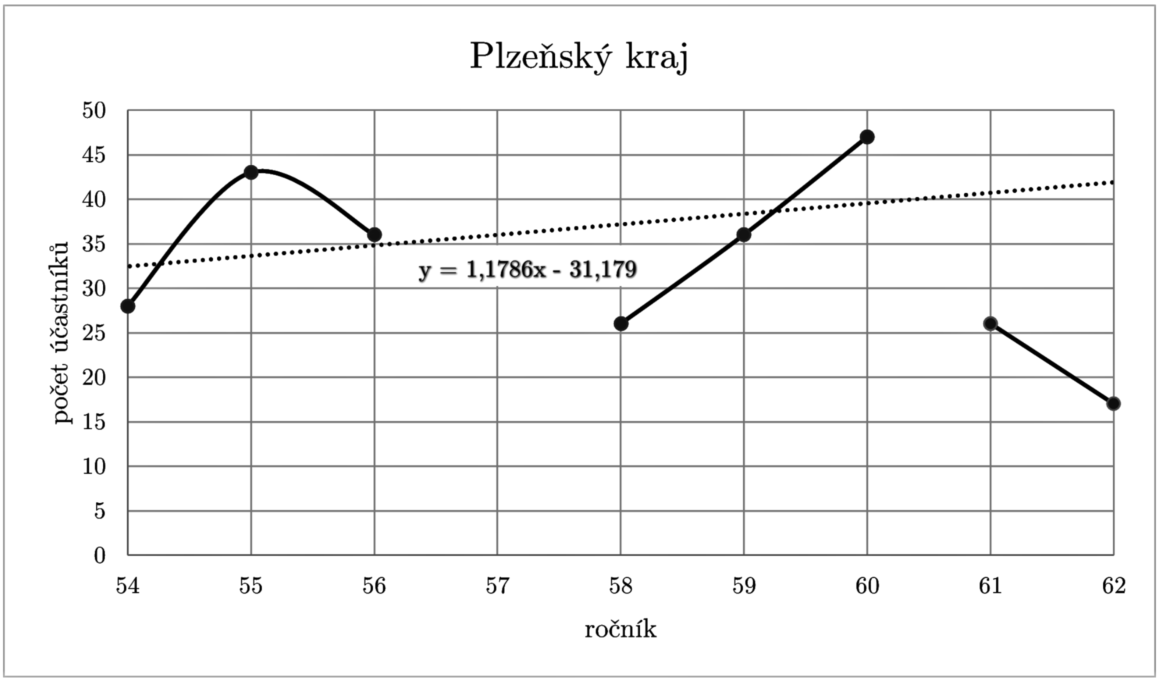
Obrázek 5.7: Počet účastníků jednotlivých ročníků Moravskoslezského kraje



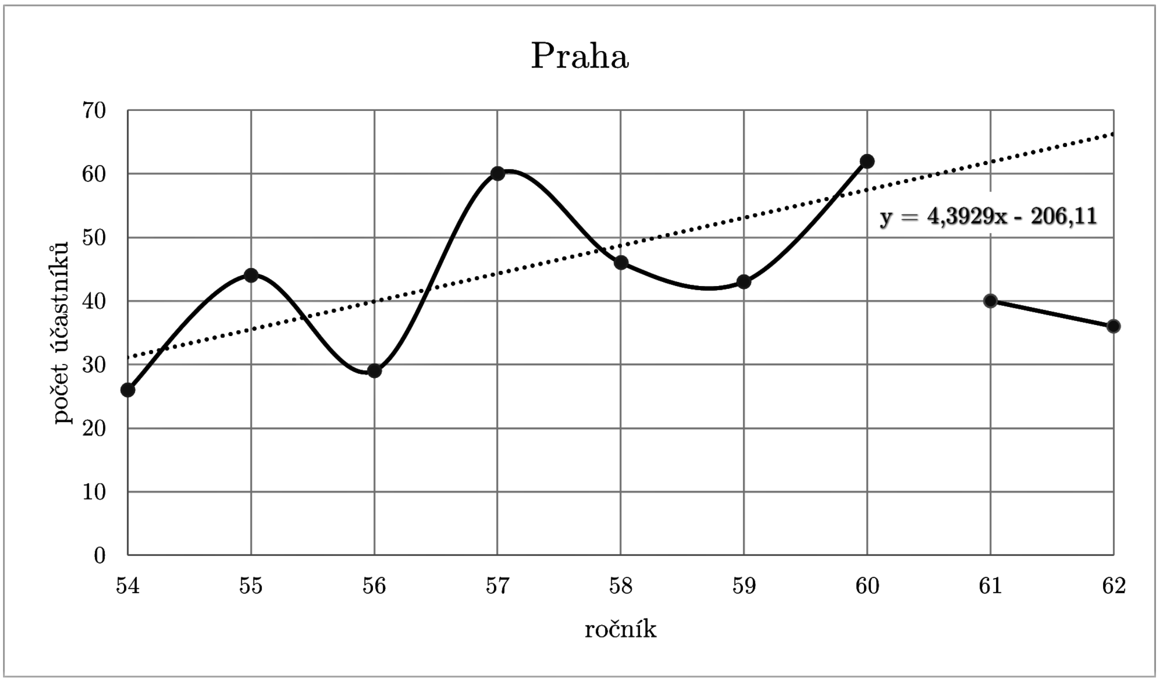
Obrázek 5.8: Počet účastníků jednotlivých ročníků Olomouckého kraje



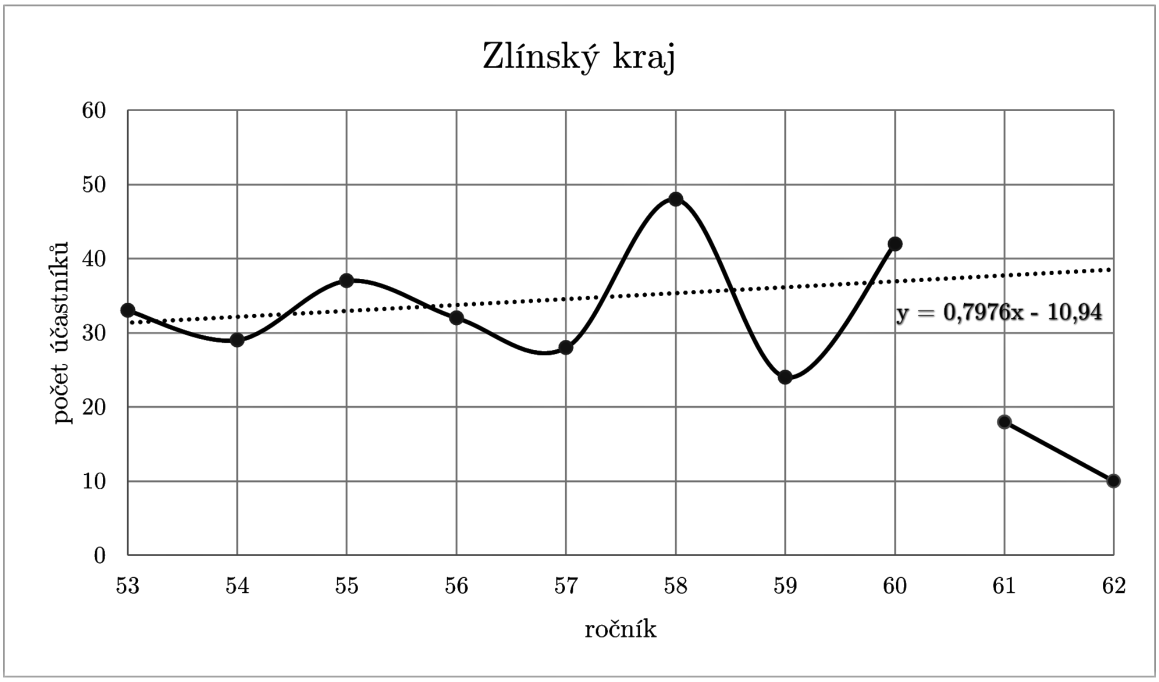
Obrázek 5.9: Počet účastníků jednotlivých ročníků Pardubického kraje



Obrázek 5.10: Počet účastníků jednotlivých ročníků Plzeňského kraje



Obrázek 5.11: Počet účastníků jednotlivých ročníků kraje Praha



Obrázek 5.12: Počet účastníků jednotlivých ročníků Zlínského kraje

Z grafů na obrázku 5.1–5.12 je patrné, že největší trend nárůstu počtu řešitelů má Praha, naopak největší tendenci poklesu počtu řešitelů pozorujeme v kraji Královéhradeckém.

Hodnoty směrnice regresní přímky prokládající dostupné hodnoty pro 50.–60. ročník jsou uvedeny v tabulce 10. Vidíme, že u 7 krajů je trend vzestupný (i když někde prakticky nepatrně; kromě Prahy jde o kraje Jihomoravský, Plzeňský, Moravskoslezský, Zlínský, Jihočeský a Karlovarský) a u 5 krajů sestupný (Liberecký, Pardubický, Olomoucký, Vysočina a již zmíněný Královéhradecký). Bylo by vhodné se snažit zejména v těchto krajích žáky více motivovat a zvýšit povědomí o Fyzikální olympiádě.

kraj	směrnice přímky
Praha	4,3938
Jihomoravský kraj	2,7143
Plzeňský kraj	1,1786
Moravskoslezský kraj	1,1392
Zlínský kraj	0,7976
Jihočeský kraj	0,5364
Karlovarský kraj	0,2294
Liberecký kraj	−0,1182
Pardubický kraj	−0,1273
Olomoucký kraj	−0,3727
Kraj Vysočina	−1,0357
Královéhradecký kraj	−1,2000

Tabulka 10

Kapitola 6

Sbírka řešených úloh

6.1 Kinematika

FO59D2-1: Vlak a cyklista Autor: J. Jírů, 74,7 %

Vlak délky $d = 50$ m se rozjíždí po přímých kolejích se stálým zrychlením o velikosti $a = 0{,}90\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Souběžně s železnicí vede silnice, po níž se v témže směru pohybuje cyklista stálou rychlostí o velikosti $v_1 = 11{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Vlak se začíná rozjíždět od okamžiku, kdy cyklista míjí zadní konec vlaku. Zvolme osu x ve směru pohybu vlaku s počátkem v místě zadního konce stojícího vlaku.

a) Sestrojte graf závislosti souřadnice x_z polohy zadního konce vlaku na čase, graf závislosti souřadnice x_p polohy předního konce vlaku na čase a graf závislosti souřadnice x_c polohy hlavy cyklisty na čase, vše na časovém intervalu $t \in \langle 0\ s;\ 26\ s \rangle$. Nulový čas volte v okamžiku rozjezdu vlaku.

b) Z grafu určete celkovou dobu Δt, po kterou viděl cyklista vlak vedle sebe.

c) S využitím grafu určete maximální možnou velikost rychlosti v_m cyklisty, s níž by se rovnoměrným pohybem před vlak nedostal.

Použijte milimetrový papír formátu A4 v poloze na šířku, volte pro čas měřítko 1 cm $\hat{=}$ 1 s a pro souřadnici polohy měřítko 1 cm $\hat{=}$ 20 m.

Řešení:

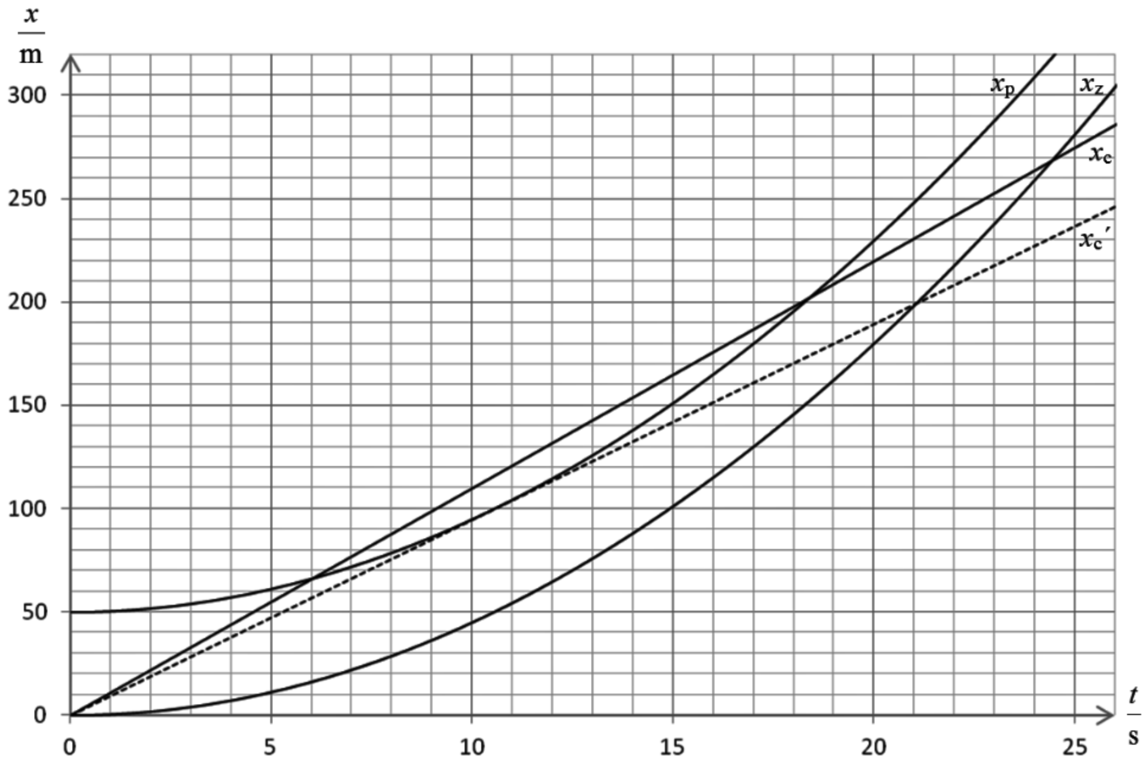
a) Sestavíme tabulku pro sestrojení grafů pro zadní a přední konec vlaku. Souřadnice vypočteme podle vzorců $x_z = \dfrac{1}{2}at^2$, $x_p = x_z + d$.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	2	4	6	8	10	12
$\frac{x_z}{\mathrm{m}}$	0	1,8	7,2	16,2	28,8	45,0	64,8
$\frac{x_p}{\mathrm{m}}$	0	51,8	57,2	66,2	78,8	95,0	115

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	14	16	18	20	22	24	26
$\frac{x_z}{\mathrm{m}}$	88,2	115	146	180	218	259	304
$\frac{x_p}{\mathrm{m}}$	138	165	196	230	268	309	354

3 body

Obě závislosti jsou kvadratické, grafy tvoří shodné paraboly vzájemně posunuté po svislé ose. Závislostí polohy cyklisty na čase je přímá úměrnost, grafem je přímka (viz obr. 6.1).



Obrázek 6.1: Příklad sestrojených grafů

3 body

b) Cyklista jede vedle vlaku, pokud jeho poloha splňuje podmínku $x_z \leq x_c \leq x_p$. Z grafu vyčteme, že podmínka je splněna pro $t \in \langle 0\text{ s}; 6{,}0\text{ s}\rangle \cup \langle 18{,}4\text{ s}; 24{,}4\text{ s}\rangle$. Z toho plyne, že doba Δt pohybu cyklisty vedle vlaku je přibližně 12 s. **2 body**

c) Počátkem vedeme tečnu k horní parabole (závislost x_c') a z grafu vyčteme, že např. v čase $t = 25$ s je souřadnice polohy cyklisty $x_c = 237$ m. Velikost rychlosti pak určuje směrnice této tečny:

$$v_\mathrm{m} = \frac{x_c}{t} = \frac{237}{25}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 9{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ **2 body**

Poznámka: Kontrolní výpočet na 4 platné číslice dává výsledek b) $\Delta t = 12{,}07$ s, c) $v_\mathrm{m} = 9{,}480\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

FO50D2-1: Cesta rychlíkem Autor: M. Jarešová, 73,7 %

Cestující vyjel v 18:28 hod rychlíkem R1182 Chrudimka ze železniční stanice Chrast u Chrudimi a v 18:40 hod dorazil po ujetí 12 km do Chrudimi. Uvažujte, že se rychlík ve stanici Chrast nejprve rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem po dobu t_1, pak se po dobu $t_2 = 2t_1$ pohybuje rovnoměrným pohybem a před stanicí Chrudim začne rovnoměrně zpomaleně brzdit, a to po dobu $t_3 = t_1$. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Určete průměrnou rychlost rychlíku.

b) Určete dobu jízdy rychlíku v jednotlivých úsecích, jeho zrychlení (zpomalení) na začátku (konci) jízdy, délku jednotlivých úseků a maximální rychlost pohybu.

c) Nakreslete ve sledovaném úseku (ve vhodném měřítku) graf závislosti rychlosti pohybu na čase.

Řešení:

a) Průměrná rychlost $v_p = \dfrac{s}{t} = \dfrac{12\,000\ \text{m}}{720\ \text{s}} = 16{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 60\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. **1 bod**

b) Celková doba pohybu $t = t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + 2t_1 + t_1 = 4t_1$.
Potom $t_1 = \dfrac{t}{4} = 3$ min; $t_2 = \dfrac{t}{2} = 6$ min; $t_3 = t_1$. Délky jednotlivých úseků:

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{4}\right)^2 = \frac{1}{32}at^2,$$

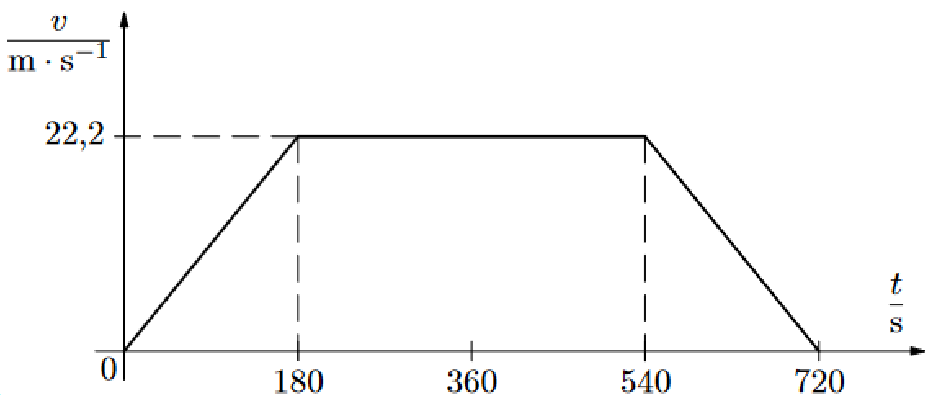
$$s_2 = v_m t_2 = at_1\cdot 2t_1 = 2at_1^2 = 4s_1,$$

$$s_3 = v_m t_3 - \frac{1}{2}at_3^2 = at_1^2 - \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}at_1^2 = s_1.$$

Celková dráha $s = s_1 + s_2 + s_3 = s_1 + 4s_1 + s_1 = 6s_1$.
Z toho $s_1 = \dfrac{1}{6}s = 2$ km; $s_2 = \dfrac{4}{6}s = 8$ km; $s_3 = 2$ km.
Zrychlení pohybu určíme např. ze vztahu $s_1 = \dfrac{1}{2}at_1^2$, po dosazení je $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{1}{16}t^2$, z čehož $a = \dfrac{16}{3}\dfrac{s}{t^2} = 0{,}12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
Maximální rychlost $v_m = at_1 = \dfrac{16}{3}\dfrac{s}{t^2}\cdot\dfrac{t}{4} = \dfrac{4}{3}\dfrac{s}{t} = 22{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 80\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

6 bodů

c) Graf závislosti rychlosti na čase je znázorněn na obr. 6.2.



Obrázek 6.2

3 body

FO62D2-1: Automobil a dva motocykly Autor: J. Jírů , 73,5 %

Po přímé silnici projížděl automobil stálou rychlostí o velikosti 18 m · s^{-1}. Z vedlejší silnice se v okamžiku míjení začal za automobilem rozjíždět motocykl rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti 2,0 m · s^{-2}. Po ujetí vzdálenosti 100 m přešel jeho pohyb na rovnoměrný. Se zpožděním 6,0 s se z téhož místa vedlejší silnice začal rozjíždět druhý motocykl rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti 3,0 m · s^{-2}. Jeho rozjíždění trvalo 8,0 s, poté pokračoval v jízdě rovnoměrným pohybem.

a) Proveďte potřebné výpočty a na časovém intervalu $\langle 0\ \mathrm{s}; 20\ \mathrm{s}\rangle$ sestrojte graf závislosti rychlosti na čase všech tří vozidel.
b) Určete všechny časy vzájemného předjetí vozidel za předpokladu, že jejich rovnoměrný pohyb dlouhodobě pokračuje a že šířka silnice umožňuje libovolné předjetí bez vzájemného omezení.
c) Určete vzdálenost mezi prvním a posledním vozidlem v čase přesně 1 min od okamžiku výjezdu prvního motocyklu.

Řešení:

a) Dobu rozjíždění prvního motocyklu dostaneme ze vztahu

$$s = \frac{1}{2}at^2,$$

z něhož plyne

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{2}}\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{s}.$$

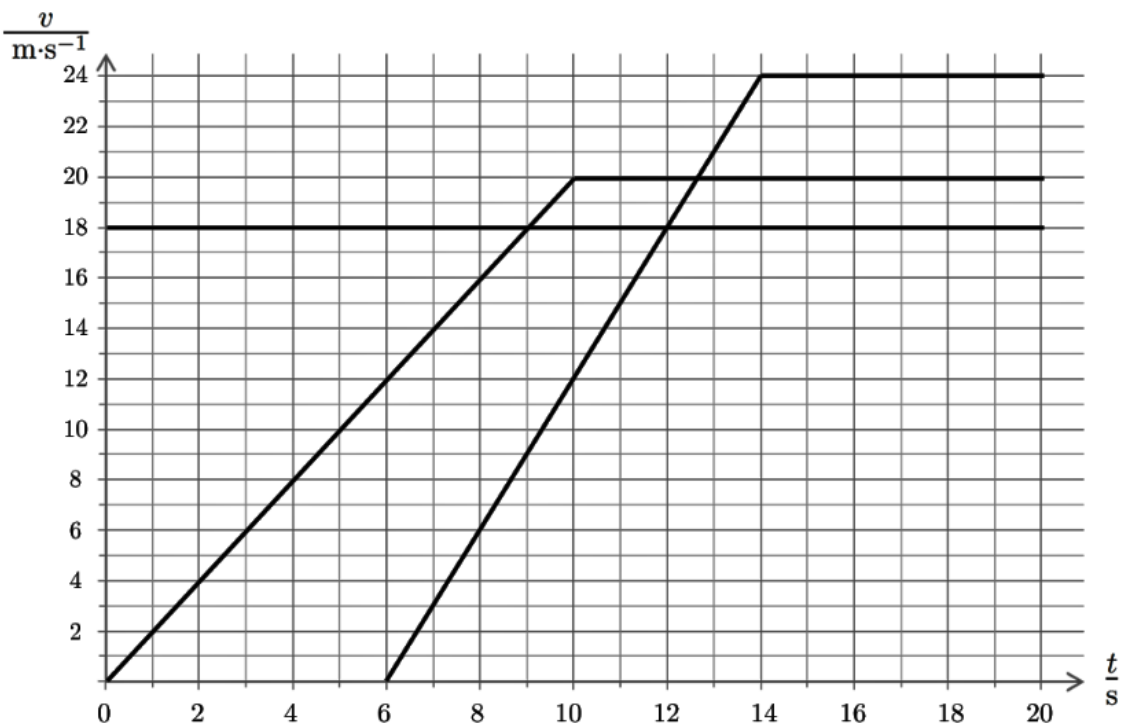
Jeho konečnou rychlost určíme ze vztahu

$$v = at = 2 \cdot 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Užitím téhož vztahu dostaneme i konečnou rychlost druhého motocyklu.

$$v = at = 3 \cdot 8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$ **2 body**

Graf závislosti rychlosti na čase všech tří vozidel je na obr. 6.3. **3 body**



Obrázek 6.3

b) Označme pro automobil $v_0 = 18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ rychlost rovnoměrného pohybu, dále po řadě pro první a druhý motocykl rychlosti rovnoměrného pohybu $v_1 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, časy začátku rovnoměrného pohybu $t_1 = 10$ s, $t_2 = 14$ s a dráhy ujeté během rozjíždění $s_1 = 100$ m, $s_2 = \dfrac{24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 8\ \mathrm{s}}{2} = 96$ m (obsah plochy pod grafem). **1 bod**

Během rovnoměrného pohybu je pak funkční závislost dráhy na čase dána vztahy:

$s_\mathrm{a} = v_0 t, \qquad \{s_\mathrm{a}\} = 18\{t\},$

$s_\mathrm{m1} = s_1 + v_1(t - t_1), \qquad \{s_\mathrm{m1}\} = 100 + 20(\{t\} - 10),$

$s_\mathrm{m2} = s_2 + v_2(t - t_2), \qquad \{s_{m2}\} = 96 + 24(\{t\} - 14).$

Hledáme časy, v nichž nastane rovnost ujetých drah ve všech kombinacích dvojic vozidel.

Z rovnice $s_\mathrm{a} = s_\mathrm{m1}$ dostaneme čas 50 s, kdy první motocykl předjíždí automobil.
Z rovnice $s_\mathrm{a} = s_\mathrm{m2}$ dostaneme čas 40 s, kdy druhý motocykl předjíždí automobil.
Z rovnice $s_\mathrm{m1} = s_\mathrm{m2}$ dostaneme čas 35 s, kdy druhý motocykl předjíždí první motocykl. **3 body**

c) Podle časů předjetí jede v čele druhý motocykl a poslední jede automobil. Vzdálenost d mezi nimi v čase $t = 60$ s je

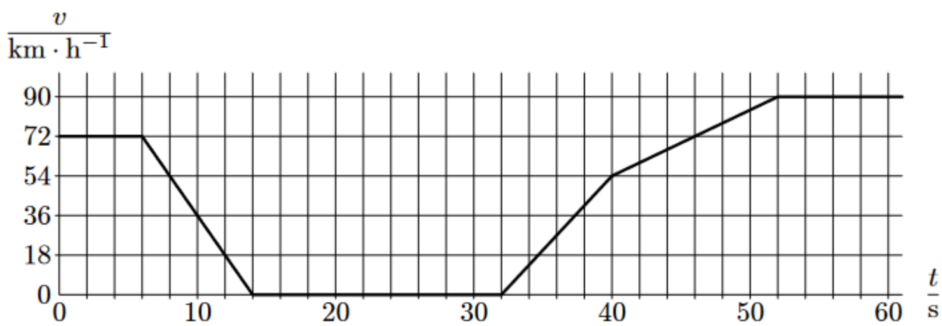
$$d = s_{m2} - s_a = s_2 + v_2(t - t_2) - v_0 t = [96 + 24 \cdot (60 - 14) - 18 \cdot 60]\ \mathrm{m} = 120\ \mathrm{m}$$

1 bod

FO51D2-1: Dva automobily Autor: J. Jírů, 64,3 %

Dva automobily jedou po dvouproudové silnici vedle sebe rychlostí o stejné velikosti $72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Zatímco první pokračuje v jízdě dále rovnoměrným pohybem, druhý se zastaví, nabere dalšího cestujícího a opět se rozjede – časový průběh jeho rychlosti udává graf na obr. 6.4. Po rozjezdu se pohybuje rovnoměrně, dokud se nedostane na úroveň prvního automobilu. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Určete velikost zrychlení a_1 při brzdění a velikosti zrychlení a_2 a a_3 při rozjíždění.
b) Určete čas t_m, v němž je vzdálenost mezi vozidly maximální.
c) Určete maximální vzdálenost d_m mezi vozidly.
d) Určete čas t_k, v němž se druhý automobil ocitne vedle prvního.



Obrázek 6.4

Řešení:

a) Z grafu plyne:

$$a_1 = \frac{20 - 0}{14 - 6}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}},$$

$$a_2 = \frac{15-0}{40-32}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = \frac{15}{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 1{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_3 = \frac{25-15}{52-40}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = \frac{5}{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}83\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

3 body

b) Vzdálenost mezi vozidly je maximální v čase $t_\mathrm{m} = 46$ s, kdy při rozjíždění dosáhne druhé vozidlo velikosti rychlosti prvního vozidla. **1 bod**

c) Vzdálenost mezi vozidly se zvětšovala od času 6 s do času 46 s, za tuto dobu 40 s urazilo první vozidlo rovnoměrným pohybem dráhu

$$s_0 = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \cdot 40\ \mathrm{s} = 800\ \mathrm{m}.$$

Druhé vozidlo za stejnou dobu urazilo dráhu během brzdění

$$s_1 = \frac{20\cdot(14-6)}{2}\ \mathrm{m} = 80\ \mathrm{m}.$$

a během rozjíždění

$$s_2 = \frac{15\cdot(40-32)}{2}\ \mathrm{m} + \frac{(15+21)\cdot(46-40)}{2}\ \mathrm{m} = 165\ \mathrm{m}.$$

Maximální vzdálenost mezi vozidly je dána rozdílem drah

$$d_\mathrm{m} = s_0 - (s_1 + s_2) = 800\ \mathrm{m} - (80\ \mathrm{m} + 165\ \mathrm{m}) = 555\ \mathrm{m}.$$ **3 body**

d) V čase $t_\mathrm{m} = 46$ s se začíná druhé vozidlo přibližovat k prvnímu, nejprve rovnoměrně zrychleným pohybem po dobu 6 s, poté rovnoměrným pohybem rychlostí $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Rovnoměrně zrychleným pohybem se přiblíží o vzdálenost

$$\frac{(25-20)\cdot(52-46)}{2}\ \mathrm{m} = 15\ \mathrm{m}.$$

tedy v čase 52 s je okamžitá vzdálenost vozidel 555 m − 15 m = 540 m. Vzájemnou rychlostí $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se pak vozidla přibližují po dobu $\frac{540}{5}$ s = 108 s. K dojetí dojde v čase $t_\mathrm{k} = 52\ \mathrm{s} + 108\ \mathrm{s} = 160\ \mathrm{s}$. **3 body**

FO57D2-2: Malý a velký kolotoč Autor: J. Jírů, 62,0 %

Na malém kolotoči se Matěj pohybuje po kružnici o poloměru $r_1 = 3{,}5$ m, na velkém Vendulka po kružnici o poloměru $r_2 = 4{,}8$ m. Otáčky každého kolotoče jsou nastaveny tak, aby se každý pasažér pohyboval s dostředivým zrychlením o velikosti $a_\mathrm{d} = 5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Rozhodněte se zdůvodněním, které z dětí se točí s větší úhlovou rychlostí.

b) Rozhodněte se zdůvodněním, které z dětí se točí s větší obvodovou rychlostí.

c) Během produkce se každý kolotoč otáčí rovnoměrným pohybem po dobu $\Delta t = 4\ \mathrm{min}\ 30\ \mathrm{s}$. Určete počet otáček N_1 a uraženou dráhu s_1 Matěje a počet otáček N_2 a uraženou dráhu s_2 Vendulky během rovnoměrného otáčení kolotoče.

d) Každý kolotoč se zastaví rovnoměrně zpomaleným pohybem, přičemž vykoná tři otáčky. Určete doby t_1 a t_2 rovnoměrně zpomaleného pohybu velkého a malého kolotoče.

Úlohy c) a d) řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

a) Ze vztahu $a_\mathrm{d} = r\omega^2$ plyne $\omega = \sqrt{\frac{a_\mathrm{d}}{r}}$. Při konstantním dostředivém zrychlení s rostoucím poloměrem úhlová rychlost klesá, proto má větší úhlovou rychlost Matěj. Ke stejnému závěru dojdeme přímými výpočty a porovnáním výsledků. **1 bod**

b) Ze vztahu $a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{r}$ plyne $v = \sqrt{a_\mathrm{d} r}$. Při konstantním dostředivém zrychlení s rostoucím poloměrem obvodová rychlost roste, proto má větší obvodovou rychlost Vendulka. Ke stejnému závěru dojdeme přímými výpočty a porovnáním výsledků. **1 bod**

c) Počet otáček každého kolotoče vypočteme ze vztahu

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\omega \Delta t}{2\pi} = \frac{\Delta t}{2\pi}\sqrt{\frac{a_\mathrm{d}}{r}}.$$

Po dosazení dostaneme pro Matěje $N_1 = 51$, pro Vendulku $N_2 = 44$. **2 body**
Uraženou dráhu každého kolotoče vypočteme ze vztahu

$$s = v\Delta t = \sqrt{a_\mathrm{d} r}\Delta t.$$

Po dosazení dostaneme pro Matěje $s_1 = 1130$ m, pro Vendulku $s_2 = 1\,320$ m. **2 body**

d) Během zastavování urazí každý pasažér dráhu

$$3 \cdot 2\pi r = \frac{1}{2}at^2,$$

kde

$$a = \frac{v}{t}, \quad v = \sqrt{a_\mathrm{d} r}.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$t = 12\pi\sqrt{\frac{r}{a_\mathrm{d}}}.$$

Matěj se zastaví za čas $t_1 = 12\pi\sqrt{\frac{r_1}{a_\mathrm{d}}} = 32\mathrm{s}$, Vendulka za čas $t_2 = 12\pi\sqrt{\frac{r_2}{a_\mathrm{d}}} = 37\,\mathrm{s}$. **4 body**

FO56D2-1: Dva cyklisté Autor: J. Jírů, 61,2 %

Cyklista Adam začíná svůj tréninkový okruh délky $s = 18{,}80$ km v nejnižší nadmořské výšce. V první části okruhu, do nejvyššího místa na trase, se pohyboval průměrnou rychlostí $v_1 = 24{,}20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, druhou část okruhu projel za čas $t_2 = 15{:}42$ min. Průměrná rychlost na celém okruhu byla $v_\mathrm{p} = 27{,}41\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

a) Určete dobu t_1 jízdy na prvním úseku.
b) Určete dráhy s_1 a s_2 první a druhé části okruhu.
c) Určete průměrnou rychlost v_2 na druhé části okruhu.

d) Cyklista Jan jezdí svoji trasu neznámé délky tak, že dojede na vrchol kopce a po stejné trase se vrací zpět. Průměrná rychlost do kopce byla $u_1 = 21{,}76\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, průměrná rychlost na celé trase $u_\mathrm{p} = 26{,}90\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Určete průměrnou rychlost u_2 s kopce – nejprve obecně, pak pro danée hodnoty.

Řešení:

a) Doba jízdy na prvním úseku je

$$t_1 = t - t_2 = \frac{s}{v_\mathrm{p}} - t_2 = 25{:}27\ \mathrm{min}. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Dráha první části okruhu:

$$s_1 = v_1 t_1 = v_1\left(\frac{s}{v_\mathrm{p}} - t_2\right) = 10{,}27\ \mathrm{km}.$$

Dráha druhé části okruhu:

$$s_2 = s - s_1 = s - v_1\left(\frac{s}{v_\mathrm{p}} - t_2\right) = 8{,}53\ \mathrm{km}. \qquad \textbf{3 body}$$

c) Průměrná rychlost na druhé části okruhu:

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s}{t_2} - \frac{v_1 s}{v_\mathrm{p} t_2} + v_1 = 32{,}61\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}. \qquad \textbf{2 body}$$

d) Dráha do kopce i s kopce je stejná, označme ji s. Dále označme t_1 čas jízdy do kopce, t_2 čas jízdy s kopce a t celkový čas jízdy. Janova průměrná rychlost jízdy s kopce pak je:

$$u_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{s}{t - t_1} = \frac{s}{\frac{2s}{u_\mathrm{p}} - \frac{s}{u_1}} = \frac{u_1 u_\mathrm{p}}{2u_1 - u_\mathrm{p}} = \frac{21{,}76\cdot 26{,}90}{2\cdot 21{,}76 - 26{,}90}\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 35{,}22\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}.$$

3 body

FO54D2-1: Cyklista na 3 okruzích Autor: J. Jírů, 60,3 %

Cyklista projel třikrát svůj tréninkový okruh. Po jednom okruhu si na svém computeru přečetl průměrnou rychlost $31{,}50\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ a computer vynuloval. Na dráze zbývajících dvou okruhů zaznamenal čas 38 min 45 s a průměrnou rychlost $30{,}24\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

a) Určete délku jednoho okruhu, celkovou dobu jízdy a celkovou průměrnou rychlost.

b) Další trénink absolvoval na jiném okruhu neznámé délky, který též projel třikrát. V tomto případě urazil první kolo průměrnou rychlostí $v_1 = 32{,}08\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ a dráhu zbývajících dvou kol projel průměrnou rychlostí $v_{23} = 30{,}37\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Vyjádřete obecně celkovou průměrnou rychlost v_p pomocí rychlostí v_1 a v_{23}. Poté ji pro dané číselné hodnoty vypočtěte.

Řešení:

a) Označme s délku okruhu, $v_1 = 31{,}50\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 8{,}75\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ průměrnou rychlost v prvním kole, $v_{23} = 30{,}24\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 8{,}40\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ průměrnou rychlost a $t_{23} =$ 38 min 45 s dobu jízdy ve druhém a třetím kole. Platí rovnice:

$$2s = v_{23} t_{23}.$$

Z rovnice plyne

$$s = \frac{v_{23}t_{23}}{2} = \frac{8{,}4 \cdot 2\,325}{2}\ \mathrm{m} = 9\,765\ \mathrm{m}.$$

Doba jízdy je

$$t = t_1 + t_{23} = \frac{s}{v_1} + t_{23} = \left(\frac{9\,765}{8{,}75} + 2\,325\right)\ \mathrm{s} = 3\,441\ \mathrm{s} = 57\ \mathrm{min}\ 21\ \mathrm{s}.$$

Průměrná rychlost je

$$v_\mathrm{p} = \frac{3s}{t} = \frac{3 \cdot 9\,765}{3\,441}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 30{,}65\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$ **6 bodů**

b) Při zavedeném označení z úlohy a) platí:

$$v_\mathrm{p} = \frac{3s}{t},$$

kde

$$t = t_1 + t_{23} = \frac{s}{v_1} + \frac{2s}{v_{23}}.$$

Po dosazení za t do výše uvedeného vztahu pro v_p a úpravě dostaneme

$$v_\mathrm{p} = \frac{3s}{\frac{s}{v_1} + \frac{2s}{v_{23}}} = \frac{3v_1v_{23}}{2v_1 + v_{23}}.$$

Číselně vychází

$$v_\mathrm{p} = \frac{3 \cdot 32{,}08 \cdot 30{,}37}{2 \cdot 32{,}08 + 30{,}37}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 30{,}92\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$ **4 body**

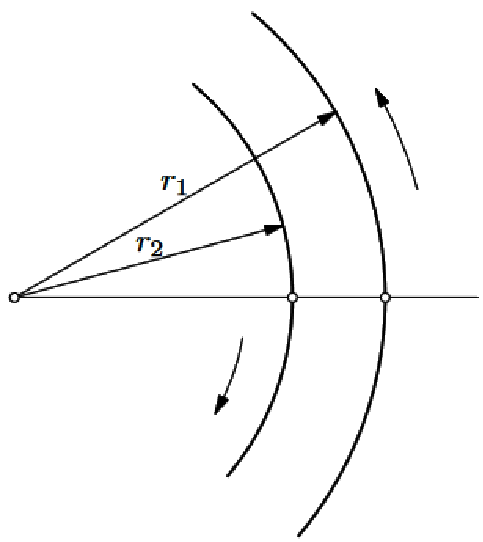
FO61D2-1: Silniční okruh Autor: I. Volf, 59,7 %

Městský silniční okruh je tvořen tříproudovými silnicemi v obou směrech. Poloměr středního zeleného dělicího pásu $R = 500$ m, poloměry trajektorií automobilů jedoucích v pravých jízdních pruzích $r_1 = 508$ m, $r_2 = 492$ m (obr. 6.5). Automobil jedoucí po okruhu ve směru hodinových ručiček jede stálou rychlostí o velikosti $v_0 = 60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, druhý automobil jedoucí v protisměru jede stálou rychlostí o velikosti v.

a) Automobily se potkaly v určitém místě. Určete vzhledem k této poloze místa dalších dvou setkání, jestliže $v = v_0$. Výsledek vyjádřete v úhlových stupních.

b) Jakou stálou rychlostí se musí pohybovat druhý automobil, aby ke třetímu setkání došlo v témže místě jako k setkání prvnímu?

c) Jakou průměrnou rychlostí v_2 se musí pohybovat třetí automobil jedoucí městem po průměru tohoto okruhu, aby se dvakrát křižoval na nadjezdech s prvním automobilem jedoucím rychlostí v_0 (mimoúrovňové křižování)?



Obrázek 6.5

Řešení:

a) Značíme ω_1, ω_2 úhlové rychlosti obou automobilů při jejich pohybech po trajektoriích, které považujeme za kruhové.
V tomto případě platí

$$\omega_1 = \frac{v_0}{r_1}, \qquad \omega_2 = \frac{v_0}{r_2}. \tag{6.1}$$

Čas prvního setkání označíme t_1. V tomto čase urazí první automobil úhlovou dráhu $\phi_1 = \omega_1 t_1$, druhý automobil $\phi_2 = \omega_2 t_1$.
K setkání dojde, když $\phi_1 + \phi_2 = 2\pi$, tedy $t_1(\omega_1 + \Omega_2) = 2\pi$. Odtud

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}. \tag{6.2}$$

Místo prvního setkání je určeno úhly ϕ_1, ϕ_2. Když do vztahu $\phi = \omega_1 t_1$ dosadíme za t_1 z (6.2), dostaneme

$$\phi_1 = 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2},$$

a po dosazení z (6.1)

$$\phi_1 = 2\pi \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad \phi_2 = 2\pi - \phi_1 = 2\pi \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

Tím jsou úhly ϕ_1, ϕ_2 vyjádřeny v obloukové míře. Pro zadané hodnoty vyjde $\phi_1 = 177^\circ$, $\phi_2 = 183^\circ$. **4 body**

Místo druhého setkání je určeno úhly ϕ_3, ϕ_4, pro které nyní platí $\phi_3 + \phi_4 = 4\pi$. Obdobným způsobem nalezneme hodnoty $\phi_3 = 2\phi_1 = 354^\circ$, $\phi_4 = 2\phi_2 = 366^\circ$.
2 body

b) Nyní platí vztahy

$$\omega_1 = \frac{v_0}{r_1}, \qquad \omega_2 = \frac{v}{r_2}. \tag{6.3}$$

Označíme t_1 čas prvního setkání, t_3 čas třetího setkání. Potom

$$\omega_1(t_3 - t_1) = 2\pi,$$
$$\omega_2(t_3 - t_1) = 2\pi;$$

odtud $\omega_1 = \omega_2$ a po dosazení z (6.3)

$$v = v_0 \frac{r_2}{r_1} = 58 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$ **2 body**

c) Pro oba průjezdy z rovnosti časů plyne

$$\frac{2r_1}{v_2} = \frac{\pi r_1}{v_0},$$

odtud

$$v_2 = \frac{2v_0}{\pi} = 38 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$ **2 body**

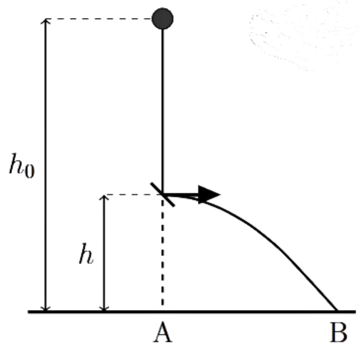
Poznámka: Jiný způsob řešení částí a), b):

a) Označme ω_1, ω_2 úhlové rychlosti každého automobilu a t čas jejich setkání. Pak platí:
$$\phi_1 = \omega_1 t = \frac{v_0}{2\pi r_1}t, \quad \phi_2 = \omega_2 t = \frac{v_0}{2\pi r_2}t.$$
Z podílu dostaneme
$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{6.4}$$
Od tohoto okamžiku lze za ϕ_1, ϕ_2 dosazovat přímo ve stupních, což je požadovaná jednotka. Podmínku setkání pak ještě vyjadřuje rovnice
$$\phi_1 + \phi_2 = 360°. \tag{6.5}$$
Ze soustavy rovnic (6.4) a (6.5) dostaneme
$$\phi_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot 360° = 177°,$$
$$\phi_2 = 360° - \phi_1 = 183°.$$
Místo prvního opětovného setkání je určeno středovými úhly $\phi_1 = 177°$ automobilu na vnějším okruhu a $\phi_2 = 183°$ automobilu na vnitřním okruhu. Do místa příštího setkání opíše každý automobil svůj středový úhel, polohy setkání jsou $\phi_3 = 2\phi_1 = 354°$ a $\phi_4 = 2\phi_2 = 366°$.

b) Má-li být místo třetího a prvního setkání shodné, opíše každý automobil za stejný čas stejný úhel 360°. Z toho plyne, že jejich úhlové rychlosti se rovnají $\omega_1 = \omega_2$. Dosazením do této rovnosti dostaneme
$$\frac{v_0}{r_1} = \frac{v}{r_2}.$$
Z rovnice plyne
$$v = \frac{r_2}{r_1}v_0 = 58\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

FO57D2-3: Pád kuličky Autor: R. Baník, 49,1 %

Z výšky $h_0 = 50$ cm nad vodorovnou podlahou necháme volně padat ocelovou kuličku. Ve výšce $h = 20$ cm nad podlahou kulička dopadne na šikmou plošku a dokonale pružně se od ní odrazí do vodorovného směru. Kdyby nenarazila na plošku, dopadla by na podlahu v bodě A (obr. 6.6).



Obrázek 6.6

a) Určete dobu t_1 pádu kuličky a velikost rychlosti v_1 jejího dopadu na podlahu, kdyby nenarazila na překážku.
b) Jaká bude celková doba t_2 pádu kuličky v případě jejího odrazu od překážky a jaká bude velikost její rychlosti v_2 v okamžiku dopadu na podlahu.
c) V jaké vzdálenosti d od bodu A v případě b) dopadne kulička na podlahu?

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, odpor vzduchu považujte za zanedbatelný.

Řešení:

a) Z rovnice $h_0 = \frac{1}{2}gt_1^2$ plyne

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 0{,}32 \text{ s.}$$

Dále platí

$$v_1 = gt_1 = g\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{2gh_0} = 3{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$ **2 body**

b) Celková doba t_2 pádu kuličky se skládá z doby t_2' volného pádu po dráze $h_0 - h$ a doby t_2'' vodorovného vrhu, která je totožná s dobou volného pádu z výšky h:

$$t_2 = t_2' + t_2'' = \sqrt{\frac{2(h_0 - h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}45 \text{ s.}$$ **3 body**

Velikost rychlosti dopadu kuličky na podlahu určíme ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Z rovnice plyne

$$v_2 = \sqrt{2gh_0} = v_1 = 3{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$ **2 body**

Velikost rychlosti dopadu lze též určit ze složek rychlosti ve vodorovném a ve svislém směru

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2},$$

kde dosadíme $v_{2x} = \sqrt{2g(h_0 - h)}$, $v_{2y} = \sqrt{2gh}$.

c) Opět ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$v_0 = \sqrt{2g(h_0 - h)}.$$

Rychlostí této velikosti se kulička pohybuje rovnoměrně vodorovným směrem po dobu vodorovného vrhu, čímž se vodorovně posune o délku

$$d = v_0 t_2'' = \sqrt{2g(h_0 - h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(h_0 - h)h} = 49 \text{ cm.}$$ **3 body**

FO53D2-4: Roztáčení kolotoče Autor: J. Jírů, 45,7 %

Petr posadil svoji mladší sestru Lenku na dětský kolotoč v parku a začal jej roztáčet. Během první otočky roztáčel kolotoč rovnoměrně zrychleným pohybem, druhou otočku udržoval kolotoč v rovnoměrném pohybu, během třetí otočky kolotoč urychloval rovnoměrně zrychleným pohybem, potom kolotoč uvolnil. První otočka trvala po dobu $t_1 = 9{,}0$ s, třetí otočka $t_3 = 4{,}0$ s. Poloměr otáčení Lenky je $r = 2{,}1$ m. Určete

a) dobu t_2 druhé otočky kolotoče.
b) velikost tečného zrychlení a_1 během první otočky kolotoče.
c) velikost dostředivého zrychlení a_d během druhé otočky kolotoče.
d) velikost konečné obvodové rychlosti v_2.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

a) Označme v_1 velikost obvodové rychlosti na konci první otočky,$a_2$velikost tečného zrychlení během třetí otočky.
Pro první otočku platí:

$$2\pi r = \frac{1}{2}a_1 t_1^2, \tag{6.6}$$

$$v_1 = a_1 t_1.$$

Z rovnic plyne

$$2\pi r = \frac{1}{2}v_1 t_1. \tag{6.7}$$

Pro druhou otočku platí

$$2\pi r = v_1 t_2.. \tag{6.8}$$

Z rovnic (6.7) a (6.8) dostaneme $t_2 = \dfrac{t_1}{2} = 4{,}5$ s. **2 body**

b) Z rovnice (6.6) dostaneme $a_1 = \dfrac{4\pi r}{t_1^2} = 0{,}33\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. **2 body**

c) Z rovnice (6.7) plyne $v_1 = \dfrac{4\pi r}{t_1}$. Dosazením do vzorce $a_d = \dfrac{v_1^2}{r}$ dostaneme $a_d =$
$= \dfrac{16\pi^2 r}{t_1^2} = 4{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. **2 body**

d) Hledanou velikost rychlosti určíme ze vztahu $v_2 = v_1 + a_2 t_3$, do něhož potřebujeme pro třetí otočku velikost počáteční rychlosti v_1 a velikost tečného zrychlení a_2. Pro velikost počáteční rychlosti užitím výsledku úlohy b) dostaneme

$$v_1 = a_1 t_1 = \frac{4\pi r}{t_1}.$$

Dále pro třetí otočku platí $2\pi r = v_1 t_3 + \dfrac{1}{2}a_2 t_3^2$.
Z rovnice plyne $a_2 = 2 \cdot \dfrac{2\pi r - v_1 t_3}{t_3^2}$.
Po dosazení a úpravě dostaneme $v_2 = 4\pi r \dfrac{t_1 - t_3}{t_1 t_3} = 3{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **4 body**

FO58D2-1: Vagón a běžec Autor: J. Jírů, 39,2 %

Lokomotiva roztlačila vagón, který se po přímé trati s konstantním stoupáním pohybuje samostatně. V okamžiku, kdy vagón během jízdy do kopce mine svým předním koncem kilometrovník při rychlosti o velikosti $v_0 = 9{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, začneme měřit čas. Vagón stejným koncem mine při jízdě zpět kilometrovník podruhé v čase 27 s, přičemž vlivem valivého odporu je doba jízdy nahoru o 3,0 sekundy kratší než doba jízdy dolů. Zvolme osu x ve směru stoupající trati s počátkem v místě kilometrovníku. Podél trati vede přímá stezka, po níž se s kopce ke kilometrovníku pohybuje stálou rychlostí běžec. V čase 0 s se nachází ve vzdálenosti 90 m od kilometrovníku.

a) Určete dobu Δt_1 jízdy do kopce a dobu Δt_2 jízdy s kopce.

b) Určete velikost zrychlení a_1 vagónu při jízdě do kopce a velikost zrychlení a_2 při jízdě s kopce.

c) Sestrojte na milimetrový papír graf závislosti polohy předního konce vagónu na čase během jeho jízdy nahoru a zpět, tj. graf funkce $x = x(t)$. Měřítko na svislé ose volte tak, aby bylo možné vynést i hodnotu $x = 90$ m.

d) Určete s přesností na dvě platné číslice s využitím sestrojeného grafu velikost rychlosti běžce, jestliže se během pohybu dvakrát ocitl na úrovni předního okraje vagónu.

Řešení:

a) Ze soustavy rovnic

$$\{\Delta t_1\} + \{\Delta t_2\} = 27$$

$$\{\Delta t_2\} - \{\Delta t_1\} = 3$$

plyne $\Delta t_1 = 12$ s, $\Delta t_2 = 15$ s. **1 bod**

b) Při jízdě do kopce je velikost zrychlení

$$a_1 = \frac{v_0}{\Delta t_1} = 0{,}75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Z rovnosti drah ujetých vagónem tam a zpět plyne

$$a_2 = \frac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2^2} a_1 = 0{,}48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

c) Souřadnice polohy předního konce vagónu je při jízdě do kopce

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2,\ t \in \langle 0 \text{ s}; 12 \text{ s}\rangle,$$

a při jízdě s kopce

$$x(t) = x(12 \text{ s}) - \frac{1}{2} a_2 (t - \Delta t_1)^2,\ t \in \langle 12 \text{ s}; 27 \text{ s}\rangle.$$

Vypočtené hodnoty sestavíme do tabulky:

$\frac{t}{\text{s}}$	0	2	4	6	8	10	12	14
$\frac{x}{\text{m}}$	0	16,5	30,0	40,5	48,0	52,5	54,0	53,0

$\frac{t}{\text{s}}$	16	18	20	22	24	26	27	
$\frac{x}{\text{m}}$	50,2	45,4	38,6	30,0	19,4	7,0	0	

2 body

Sestrojíme graf (části dvou různých parabol se společným vrcholem), viz obr. 6.7.

2 body

d) Sestrojíme krajní grafy (přímky) pro rovnoměrný pohyb běžce, při němž dojde právě k jednomu setkání, viz obr. (6.7). **1 bod**

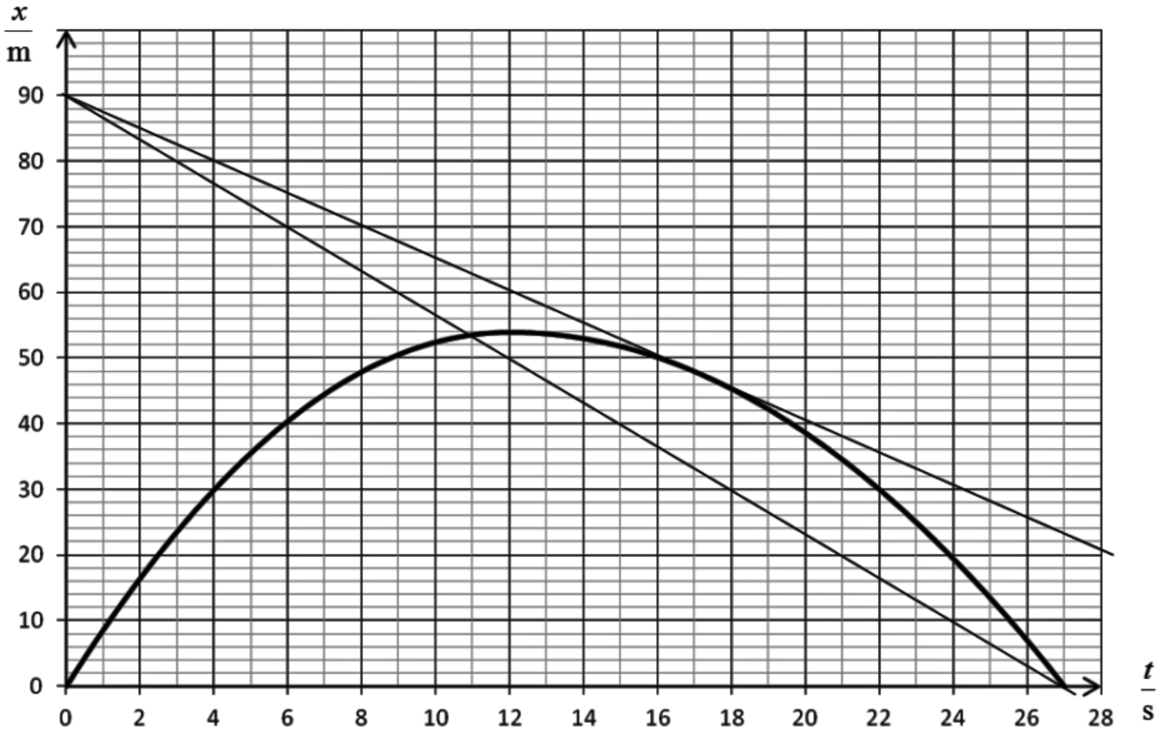
Sklon každé přímky určuje velikost rychlosti běžce. Velikost minimální možné rychlosti je určena sklonem tečné přímky:

$$v_{\min} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|21 - 90|\ \mathrm{m}}{(28 - 0)\ \mathrm{s}} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Velikost maximální možné rychlosti je určena sklonem sečné přímky:

$$v_{\max} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|0 - 90|\ \mathrm{m}}{(27 - 0)\ \mathrm{s}} = 3{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Podmínce zadání vyhovují velikosti rychlosti běžce v rozmezí od $2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ do $3{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**

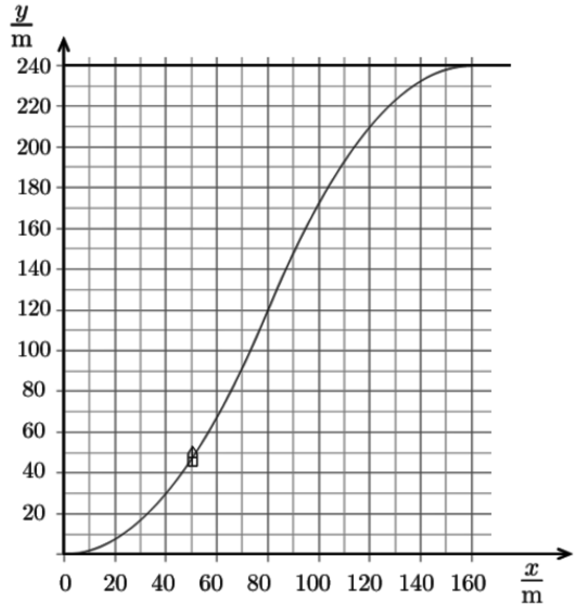


Obrázek 6.7

Poznámka: Přesný výpočet dává limitní hodnoty 2,47028... $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $3{,}\overline{3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

FO62D2-4: Člun na řece Autor: J. Jírů, 32,0 %

Řeka s rovnými rovnoběžnými břehy má šířku $d = 240$ m a voda teče v celém řečišti rychlostí o velikosti $v_0 = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Malý motorový člun je u jednoho břehu ukotven tak, že jeho podélná osa směřuje kolmo k břehu. V jednom okamžiku člun uvolníme a současně motor začne loďku uvádět do rovnoměrně zrychleného pohybu kolmo ke směru toku. Když člun dorazí do středu řeky, bude jej motor udržovat v rovnoměrně zpomaleném pohybu se zrychlením o stejné velikosti. V obrázku 6.8 je v souřadnicovém systému Oxy pevně spojeném s břehy řeky znázorněna trajektorie člunu, tvoří ji dvě na sebe navazující shodné části paraboly.



Obrázek 6.8

a) Určete čas t_0, ve kterém člun dopluje k protilehlému břehu.
b) Určete velikost a zrychlení člunu.
c) Určete velikost okamžité rychlosti v_1 člunu vzhledem k břehu v poloze znázorněné v obrázku.
d) Určete souřadnice x_2, y_2 polohy v okamžiku, kdy velikost rychlosti člunu vzhledem k břehům je $v_2 = 5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Rozměry člunu vzhledem k uvažovaným vzdálenostem zanedbejte.

Řešení:

a) Pohyb člunu vzhledem k souřadnicovému systému Oxy se skládá z pohybu rovnoměrného ve směru osy x (ve směru toku řeky) rychlostí o velikosti v_0 a z pohybu rovnoměrně zrychleného a poté rovnoměrně zpomaleného ve směru osy y. Označíme-li $x_0 = 160$ m, je hledaný čas

$$t_0 = \frac{x_0}{v_0} = \frac{160}{2}\ \mathrm{s} = 80\ \mathrm{s}.$$

1 bod

b) Pro rovnoměrně zrychlený pohyb člunu ve směru osy y platí

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{t_0}{2}\right)^2.$$

Z rovnice plyne

$$d = \frac{4d}{t_0^2} = \frac{4 \cdot 240}{80^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\ 0{,}15\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

2 body

c) Rychlost člunu vzhledem k břehu lze zapsat pomocí složek $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, kde $v_x = v_0 = \text{konst.}$, $v_y = at_1$. Čas t_1 odpovídá poloze člunu v obrázku, z něhož vyčteme x-ovou souřadnici $x_1 = 50$ m. Pak

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0} = \frac{50}{2}\ \mathrm{s} = 25\ \mathrm{s}.$$

Alternativně je možné z obrázku vyčíst y-ovou souřadnici $y_1 = 47$ m. Pak z rovnice

$$y_1 = \frac{1}{2}at_1^2,$$

dostaneme

$$t_1 = \sqrt{\frac{2y_1}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 47}{0{,}15}}\ \mathrm{s} = 25\ \mathrm{s}.$$

Nyní dopočteme y-ovou složku rychlosti

$$v_y = at_1 = 0{,}15\cdot 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 3{,}75\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Hledaná rychlost pak je

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + 3{,}75^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 4{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body

d) Složka v_y je

$$v_{y2} = \sqrt{v_2^2 - v_0^2} = \sqrt{5^2 - 2^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 4{,}58\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Dosáhne jí v čase

$$t_2 = \frac{v_{y2}}{a} = \frac{4{,}58}{0{,}15}\ \mathrm{s} = 30{,}5\ \mathrm{s}.$$

Hledané souřadnice polohy pak jsou

$$x_2 = v_0t_2 = 2\cdot 30{,}5\ \mathrm{m} = 61\ \mathrm{m},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}15\cdot 30{,}5^2\ \mathrm{m} = 70\ \mathrm{m}.$$

Pokud spočteme jednu ze souřadnic, lze výpočet zbývající souřadnice nahradit vyčtením z grafu. Případné nepožadované obecné řešení:

$$x_2 = v_0t_2 = v_0\frac{v_{y2}}{a} = v_0\frac{\sqrt{v_2^2 - v_0^2}}{a} = 2\cdot\frac{\sqrt{5^2 - 2^2}}{0{,}15}\ \mathrm{m} = 61\ \mathrm{m},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{1}{2}a\frac{v_{y2}^2}{a^2} = \frac{v_2^2 - v_0^2}{2a} = \frac{5^2 - 2^2}{2\cdot 0{,}15}\ \mathrm{m} = 70\ \mathrm{m}.$$

3 body

Ještě existuje druhé řešení, a to při rovnoměrně zpomaleném pohybu:

$$x_2' = (160 - 61)\ \mathrm{m} = 99\ \mathrm{m},$$
$$y_2' = (240 - 70)\ \mathrm{m} = 170\ \mathrm{m}.$$

1 bod

6.2 Dynamika

FO52D2-2: Pohyb po ledě Autor: J. Jírů, 51,9 %

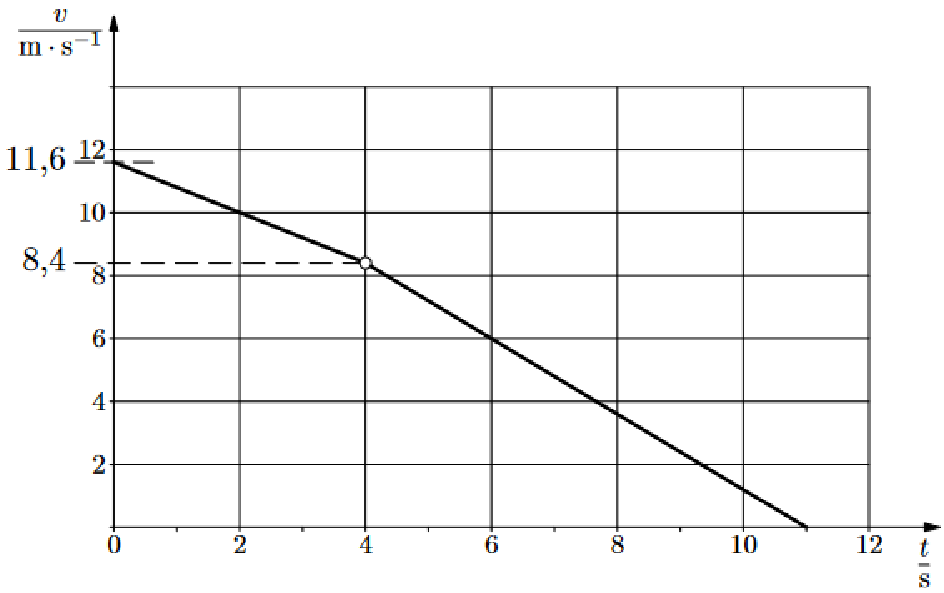
Chlapci si na velkém zamrzlém rybníku vymezili hřiště na hokej. Plochu hřiště vyčistili, na zbývající ploše rybníka zůstala tenká vrstva sněhu. Jeden puk vystřelený po ledě se pohyboval přímočaře až do zastavení, přičemž první část své dráhy urazil na čistém a zbývající část na neupraveném povrchu ledu. Závislost rychlosti puku na čase udává graf na obr. 6.9. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Určete velikost a_1 zrychlení puku na upravené ploše a velikost a_2 zrychlení puku na neupravené ploše.

b) Určete součinitel smykového tření f_1 na upravené ploše a součinitel smykového tření f_2 na neupravené ploše.

c) Určete celkovou dráhu, kterou puk urazil.

d) Nyní jeden z chlapců puk z místa zastavení odehrál po ledě zpět počáteční rychlostí stejné velikosti, jako když vystřelil na upraveném ledě. Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase.



Obrázek 6.9

Řešení:

a) Z grafu získáme velikost zrychlení na každém úseku:

$$a_1 = \frac{11{,}6 - 8{,}4}{4 - 0}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad a_2 = \frac{8{,}4 - 0}{11 - 4}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

2 body

b) Zrychlení je způsobeno brzdící třecí silou, pro kterou platí $F_t = ma = fmg$. Ze vztahu plyne $f_1 = \dfrac{a_1}{g} = 0{,}08$, $f_2 = \dfrac{a_2}{g} = 0{,}12$. **2 body**

c) Dráhu na prvním a druhém úseku určíme jako obsah plochy pod grafem: $s_1 = \left[8{,}4 \cdot 4 + \dfrac{(11{,}6 - 8{,}4) \cdot 4}{2}\right]\ \mathrm{m} = 40\ \mathrm{m}$, $s_2 = \dfrac{(8{,}4 - 0) \cdot 7}{2}\ \mathrm{m} = 29\ \mathrm{m}$. Celková dráha puku je $s = s_1 + s_2 = 69\ \mathrm{m}$. **1 bod**

d) Při pohybu tam i zpět působila na odpovídajících drahách brzdící síla stejné velikosti, která vzhledem ke stejné počáteční rychlosti puku, a tedy stejné počáteční kinetické energii, vykonala stejnou práci – proto puk při cestě zpět urazil stejnou celkovou dráhu. Puk při cestě zpět urazil nejprve dráhu s_2 se zrychlením a_2, poté dráhu s_1 se zrychlením a_1. K sestrojení grafu musíme zjistit obě doby pohybu a velikost rychlosti při vstupu do hřiště.

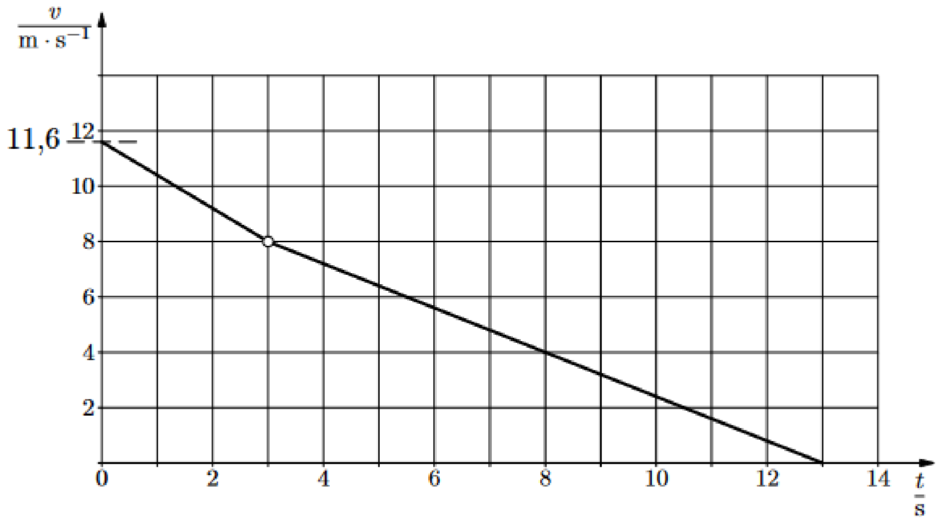
Doba pohybu v druhé fázi je $\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40}{0{,}8}}\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{s}$.

Při vstupu do hřiště měl puk rychlost o velikosti

$$v = a_1 \Delta t_2 = 0{,}8 \cdot 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Doba pohybu v první fázi $\Delta t_1 = \frac{v_0 - v}{a_2} = \frac{11{,}6 - 8}{1{,}2}\ \mathrm{s} = 3\ \mathrm{s}$. **3 body**

Graf závislosti rychlosti na čase je znázorněn na obr. 6.10.



Obrázek 6.10

2 body

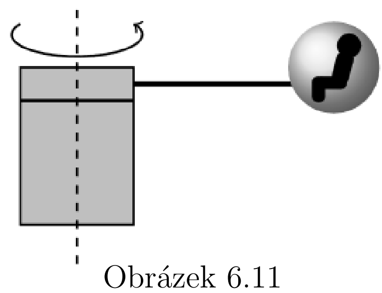
FO58D2-4: Centrifuga Autor: J. Jírů, 49,9 %

Centrifugu pro výcvik kosmonautů tvoří kabina umístěná na konci vodorovného ramene. Druhý konec ramene je spojen s rotorem elektromotoru se svislou osou otáčení. Kosmonaut o hmotnosti m v kabině obíhá po vodorovné kružnici o poloměru r.

a) Kabina obíhá s frekvencí f. Určete velikost setrvačné odstředivé síly působící v rotující soustavě na kosmonauta.

b) Určete při frekvenci f přetížení $k = \frac{F}{F_G}$, kde F je velikost výslednice tíhové a setrvačné odstředivé síly působící na kosmonauta v rotující soustavě.

c) Určete periodu T_k, při níž kosmonaut pociťuje k-násobné přetížení.



Obrázek 6.11

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m = 70$ kg, $r = 4{,}5$ m, $f = 0{,}35$ Hz, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Periody T_k v části c) vypočtěte pro $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

Řešení:

a) Velikost setrvačné odstředivé síly v rotující soustavě je

$$F_s = mr\omega^2 = 4\pi^2 mrf^2 = 1\,500\ \text{N}.$$

2 body

b) Přetížení je

$$k = \frac{\sqrt{F_G^2 + F_s^2}}{F_g} = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (4\pi^2 mrf^2)^2}}{mg} = \frac{\sqrt{g^2 + (4\pi^2 rf^2)^2}}{g} = 2{,}4.$$

3 body

c) Ze vztahu $k = \dfrac{\sqrt{F_G^2 + F_s^2}}{F_g}$ plyne

$$F_s = F_G\sqrt{k^2 - 1}.$$

Současně je

$$F_s = mr\frac{4\pi^2}{T_k^2}.$$

Z rovnic plyne

$$T_k = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{k^2 - 1}}.$$

2,5 bodu

Pro výpočet je vhodné částečně dosadit a ponechat pouze proměnnou k:

$$T_k = \frac{4{,}256}{\sqrt[4]{k^2 - 1}}\ \text{s}.$$

Číselně pak dostaneme

$$T_2 = 3{,}2\ \text{s},$$
$$T_3 = 2{,}5\ \text{s},$$
$$T_4 = 2{,}2\ \text{s},$$
$$T_5 = 1{,}9\ \text{s},$$
$$T_6 = 1{,}7\ \text{s}.$$

2,5 bodu

FO55D2-2: Chlapec na saních Autor: J. Jírů, 49,0 %

Na svah délky $s_1 = 70$ m se stálým sklonem navazuje vodorovná rovina. Chlapec na vrcholu svahu nasedl na saně a z klidu začal sjíždět dolů. Na vodorovné rovině zastavil na dráze $s_2 = 58$ m během doby $t_2 = 12$ s. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) Určete maximální velikost rychlosti v_m během jízdy.

b) Určete součinitel f smykového tření.

c) Určete velikost a_1 zrychlení saní na svahu.

d) Určete celkovou dobu t jízdy.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

a) Z rovnic pro rovnoměrně zpomalený pohyb na vodorovné rovině

$$s_2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2, \tag{6.9}$$

$$v_\mathrm{m} = a_2t_2,$$

plyne $v_\mathrm{m} = \dfrac{2s_2}{t_2} = 9{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**

b) Rovnoměrně zpomalený pohyb saní na vodorovné rovině způsobuje třecí síla, pro jejíž velikost platí $F_t = ma_2 = fmg$. Užitím vztahu (6.9) dostaneme

$$f = \frac{2s_2}{gt_2^2} = \frac{2 \cdot 58}{9{,}81 \cdot 12^2} = 0{,}082.$$

3 body

c) Konečná velikost rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na svahu je současně velikostí počáteční rychlosti rovnoměrně zpomaleného pohybu na vodorovné rovině. Proto podle výsledku úlohy a) platí

$$v_\mathrm{m} = \frac{2s_2}{t_2} = \frac{2s_1}{t_1}, \text{ z čehož plyne } t_1 = t_2\frac{s_1}{s_2}.$$

Dosazením do rovnice $s_1 = \dfrac{1}{2}a_1t_1^2$ pak dostaneme

$$a_1 = \frac{2s_2^2}{s_1t_2^2} = \frac{2 \cdot 58^2}{70 \cdot 12^2} = 0{,}67\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

3 body

d) Celková doba jízdy byla

$$t = t_1 + t_2 = t_2\frac{s_1}{s_2} + t_2 = t_2\frac{s_1 + s_2}{s_2} = 12 \cdot \frac{70 + 58}{58}\ \mathrm{s} = 26\ \mathrm{s}.$$

2 body

FO50D2-2: Nakloněná rovina Autor: Ľ. Konrád, 46,2 %

Na dlouhé nakloněné rovině s úhlem sklonu α jsme udržovali vedle sebe v klidu vozík a kvádr. Po uvolnění se obě tělesa začala pohybovat dolů. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Určete dráhu s_1, kterou vozík urazil za dobu t od uvolnění.

b) Určete hodnotu f koeficientu smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou, jestliže dráha kvádru v čase t byla o d menší než dráha vozíku.

c) Oč menší byla v čase t rychlost kvádru než rychlost vozíku?

Valivý odpor kol vozíku, jejich moment setrvačnosti, tření v ložiskách a odpor vzduchu jsou zanedbatelné. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $\alpha = 30°$, $t = 1{,}00$ s, $d = 1{,}00$ m.

Řešení:

a) Po uvolnění byla velikost zrychlení vozíku $a_1 = g \sin \alpha$. Za dobu t urazil vozík dráhu

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 = 2{,}45 \text{ m}.$$

2 body

b) Kvádr se po uvolnění pohyboval se zrychlením o velikosti

$$a_2 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Za dobu t urazil dráhu

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 = s_1 - d.$$

Ze vztahu

$$d = s_1 - s_2 = \frac{1}{2} (a_1 - a_2)\, t^2 = \frac{1}{2} g f t^2 \cos \alpha,$$

odvodíme

$$f = \frac{2d}{g t^2 \cos \alpha} = 0{,}24.$$

5 bodů

c) V čase t se rychlosti obou těles liší o

$$v_1 - v_2 = (a_1 - a_2) t = g f t \cos \alpha = \frac{2d}{t} = 2{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

FO60D2-2: Sáňkaři Autor: J. Jírů, 40,7 %

Na sáňkařský svah se sklonem $\alpha = 12°$ navazuje vodorovná rovina. Přes noc napadla vrstva sněhu. Sáňkaři se rozhodli, že horní polovinu svahu zametou, aby se dostali na původní povrch. Součinitel smykového tření na zameteném úseku je $f_1 = 0{,}065$. Při své první jízdě projeli zametený úsek svahu z klidu za čas $t_1 = 8{,}0$ s, na druhém neupraveném úseku se pohybovali rovnoměrně a na vodorovné rovině nechali saně dojet do zastavení. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) Určete obecně i číselně velikost a_1 zrychlení na prvním úseku a velikost a_3 zrychlení na vodorovné rovině.
b) Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase během celé jízdy.
c) Z grafu určete celkovou dráhu, kterou sáňkaři ujeli.

Řešení:

a) Na prvním úseku se saně rozjíždějí rovnoměrně zrychleným pohybem působením výslednice složky tíhové síly ve směru pohybu a třecí síly proti směru pohybu. Velikost zrychlení na prvním úseku je

$$a_1 = \frac{mg \sin \alpha - f_1 mg \cos \alpha}{m} = g(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha) = 1{,}416 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq 1{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

Na druhém úseku při rovnoměrném pohybu jsou složka tíhové síly ve směru nakloněné roviny a třecí síla v rovnováze. Z rovnosti velikostí těchto sil

$$mg \sin \alpha = f_2 mg \cos \alpha$$

dostaneme součinitel smykového tření na druhém úseku

$$f_2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\ \alpha.$$

Třetí úsek je rovnoměrně zpomalený způsobený třecí silou se stejným součinitelem f_2 na neupraveném sněhu. Velikost zrychlení na vodorovném úseku pak je

$$a_3 = \frac{f_2 mg}{m} = f_2 g = g\text{tg}\ \alpha = 2{,}085\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \doteq 2{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

2 body

b) K sestrojení grafu potřebujeme vypočítat velikost rychlosti dosažené na prvním úseku a doby jízdy na druhém a třetím úseku. Velikost rychlosti je:

$$v = a_1 t_1 = 11{,}33\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 11{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Dráha prvního úseku

$$s = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}v t_1$$

je stejná jako dráha druhého úseku

$$s = v t_2.$$

Z rovnosti plyne

$$t_2 = \frac{t_1}{2} = 4{,}0\ \text{s}.$$

Na třetím úseku platí

$$t_3 = \frac{v}{a_3} = 5{,}434\ \text{s} = 5{,}4\ \text{s}.$$

Graf je na obrázku 6.12.

c) Celkovou dráhu určíme jako obsah plochy pod grafem (viz obr. 6.12)

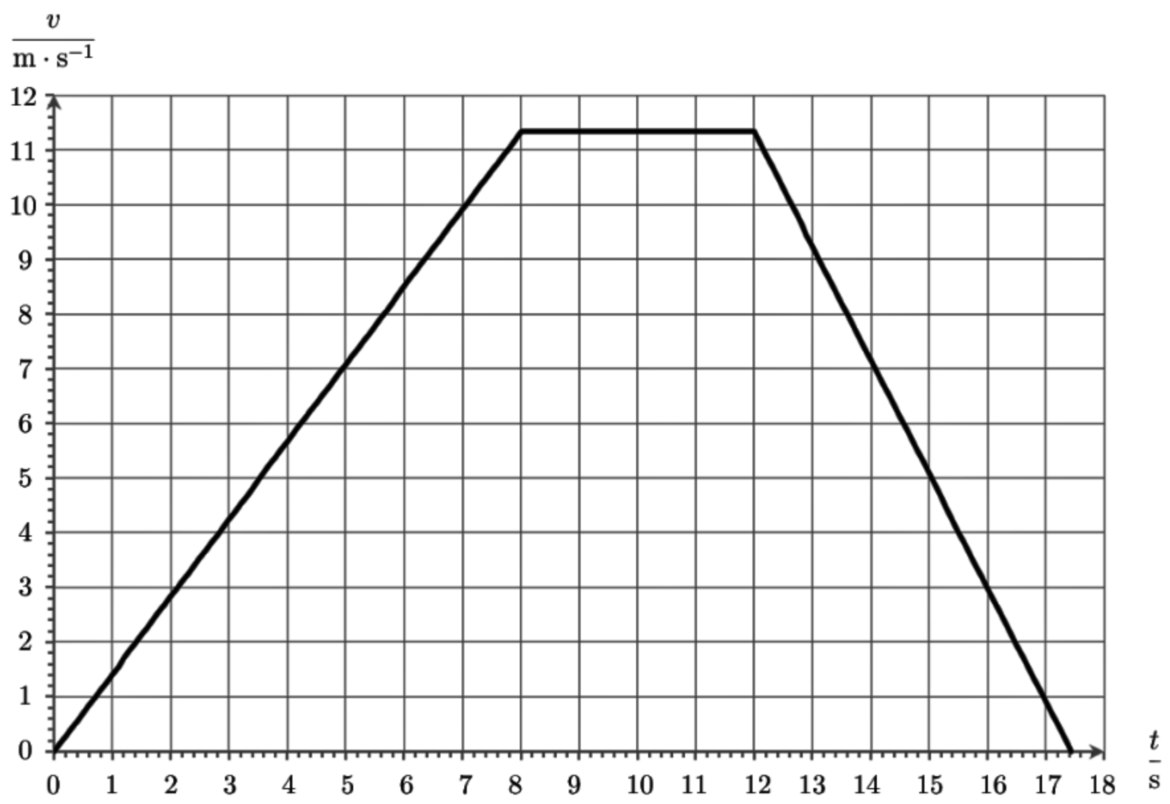
$$s = \left(\frac{1}{2}\cdot 11{,}8 + 11{,}3\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 11{,}3\cdot 5{,}4\right)\ \text{s} = 120{,}9\ \text{m} \doteq 120\ \text{m}$$

2 body

Poznámka: Požadované velikosti zrychlení a_1 a a_3 v části a) jsou zaokrouhleny na 2 platné číslice, další pomocné výsledky (velikost rychlosti v a čas t_3) nutné k sestrojení grafu jsou počítány z přesněji uváděných hodnot obou zrychlení. Podle míry zaokrouhlování se v grafu hodnoty konečné rychlosti a doby pohybu při zastavování mohou mírně lišit, což při hodnocení tolerujeme. Celková dráha však po zaokrouhlení na 2 platné číslice vyjde vždy 120 m.

FO54D2-3: Dva chlapci na kolotoči Autor: J. Jírů, 35,6 %

Na dvojsedačce kolotoče sedí vedle sebe dva chlapci o stejné hmotnosti, Emil a Ota. Emil má poloměr otáčení svého těžiště kolem osy otáčení kolotoče $r_1 = 3{,}0$ m, Ota $r_3 = 3{,}6$ m. Kolotoč se roztáčí rovnoměrně zrychleným pohybem z klidu tak, že po třech otáčkách v čase $t_3 = 27{,}0$ s dosáhne konečné rychlosti, od tohoto okamžiku se otáčí rovnoměrně.



Obrázek 6.12

a) Chlapci se dohadovali, na kterého z nich bude během rovnoměrného pohybu působit větší setrvačná odstředivá síla. Emil tvrdil: „Na mne! Podle vzorce $F = \dfrac{mv^2}{r}$ je velikost odstředivé síly nepřímo úměrná poloměru a já jsem přece blíže k ose otáčení.“ Ota odpověděl:„Ale podle vzorce $F = m\omega^2 r$ je odstředivá síla přímo úměrná poloměru otáčení a od osy otáčení jsem dále já. Proto větší setrvačná síla bude působit na mne!“ Kdo měl pravdu? Zdůvodněte.
b) Určete periodu T otáčení během rovnoměrného pohybu. Řešte obecně a číselně.
c) Určete doby Δt_1, Δt_2 a Δt_3 první, druhé a třetí otočky kolotoče během roztáčení.

Řešení:

a) Oba chlapci mají stejnou hmotnost a úhlovou rychlost, ale různou velikost obvodové rychlosti. Ve vzorci $F = \dfrac{mv^2}{r}$ je kromě různého poloměru ještě různá velikost obvodové rychlosti, která je přímo úměrná poloměru (ve výrazu jsou konstanta m a dvě proměnné v, r), proto nejde o nepřímou úměrnost. Ve vzorci $F = m\omega^2 r$ je úhlová rychlost pro oba chlapce stejná (ve výrazu je konstanta $m\omega^2$ a jediná proměnná r), proto vzorec vyjadřuje závislost velikosti síly na poloměru jako přímou úměrnost. Pravdu má pouze Ota. **2 body**

b) Zvolme bod kolotoče ve vzdálenosti r od osy otáčení, který obíhá při rovnoměrném pohybu obvodovou rychlostí o velikosti v. Pro jeho dráhu při rovnoměrně zrychleném pohybu platí

$$3 \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} a t_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t_3} \cdot t_3^2 = \frac{1}{2} v t_3.$$

Při rovnoměrném pohybu platí

$$2\pi r = vT.$$

Porovnáním dostaneme

$$T = \frac{t_3}{6} = 4{,}5\ \mathrm{s}.$$

3 body

c) Pro zvolený bod z úlohy b) platí:

$$2\pi r = \frac{1}{2}a(\Delta t_1)^2, \quad 6\pi r = \frac{1}{2}at_3^2.$$

Z podílu rovnic plyne $\Delta t_1 = \dfrac{t_3}{\sqrt{3}} = 15{,}6\ \mathrm{s}$.
Označme $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$ čas dokončení druhé otočky. Pak obdobně platí

$$4\pi r = \frac{1}{2}at_2^2, \quad 6\pi r = \frac{1}{2}at_3^2.$$

Z podílu rovnic plyne $t_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot t_3 = 22{,}0\ \mathrm{s}$
a dále $\Delta t_2 = t_2 - \Delta t_1 = 6{,}5\ \mathrm{s}$.
Dobu třetí otočky spočteme již snadno $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 5{,}0\ \mathrm{s}$. **5 bodů**

FO59D2-2: Brzdící traktor Autor: J. Jírů, 32,0 %

Traktor jede po vodorovné, blátem silně znečištěné vozovce a zabrzdí až do zastavení zadními koly tak, že se zablokují a jedou smykem. Přední kola jsou přitom nebrzděná. Během brzdění je pohyb traktoru rovnoměrně zpomalený a přední kola se otočí přesně třikrát. Doba brzdění je $t = 3{,}3\ \mathrm{s}$. Poloměr zadního kola traktoru je $R = 0{,}69\ \mathrm{m}$, poloměr předního $r = \dfrac{2}{3}R$. Během brzdění je poměr tlakových sil zadních a předních kol na vozovku 3 : 1.

a) Určete součinitel f smykového tření.
b) Určete frekvence otáčení f_p a f_z předního a zadního kola před brzděním.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

a) Během brzdění ujede traktor dráhu

$$s = 3 \cdot 2\pi r = 6\pi \cdot \frac{2}{3}R = 4\pi R.$$

Ze vzorce pro brzdnou dráhu $s = \dfrac{1}{2}at^2$ dostaneme velikost zrychlení

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{8\pi R}{t^2}.$$

Brzdění způsobuje třecí síla o velikosti $F_t = f \cdot \frac{3}{4}mg = ma$, z čehož pro součinitel smykového tření plyne

$$f = \frac{4a}{3g} = \frac{32\pi R}{3gt^2} = 0{,}22.$$

5 bodů

b) Z rovnic $s = \dfrac{1}{2}at^2$ a $v = at$ pro rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení plyne pro rychlost traktoru před začátkem brzdění

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{8\pi R}{t}. \tag{6.10}$$

Frekvence otáčení zadního kola před brzděním byla

$$f_\mathrm{z} = \frac{1}{T_\mathrm{z}} = \frac{v}{2\pi R}.$$

Po dosazení vztahu (6.10) a po úpravě dostaneme

$$f_\mathrm{z} = \frac{4}{t} = 1{,}2\ \mathrm{Hz}.$$

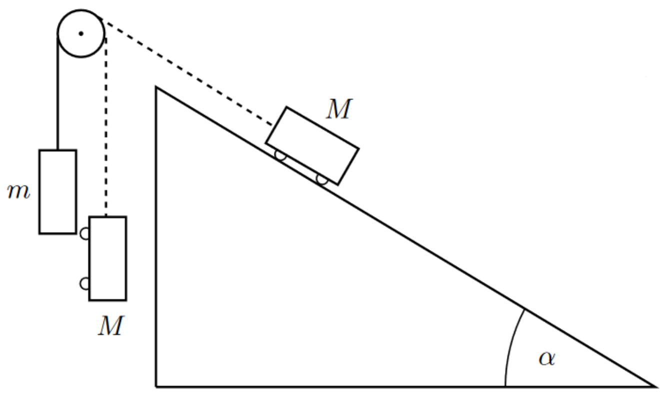
Obdobně frekvence otáčení předního kola byla

$$f_\mathrm{p} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{3v}{4\pi R} = \frac{6}{t} = 1{,}8\ \mathrm{Hz}.$$

5 bodů

FO57D2-4: Kladka a nakloněná rovina Autor: J. Jírů, 31,0 %

Přes kladku zanedbatelné hmotnosti je vedeno vlákno, na jednom konci se závažím o hmotnosti $m = 0{,}22$ kg a na druhém konci s vozíkem o hmotnosti $M = 0{,}26$ kg. Pokud je vozík na nakloněné rovině, pohybuje se soustava v jednom směru, pokud visí vedle nakloněné roviny, pohybuje se soustava v opačném směru. Velikost zrychlení je v obou případech stejná.



Obrázek 6.13

a) Určete velikost zrychlení a a úhel α nakloněné roviny.
b) Určete velikost síly F_1, kterou je napínáno vlákno, jestliže vozík visí mimo nakloněnou rovinu, a velikost síly F_2, kterou je napínáno vlákno, jestliže se pohybuje po nakloněné rovině.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Řešení:

a) Vozík působí na vlákno větší silou, visí-li vedle nakloněné roviny, proto se pohybuje dolů. Z pohybové rovnice

$$Mg - mg = (M+m)a$$

plyne

$$a = \frac{M-m}{M+m}g = \frac{1}{12}g = 0{,}82\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

Na nakloněné rovině je vozík naopak tažen nahoru. Z pohybové rovnice

$$mg - Mg\sin\alpha = (M+m)a$$

po dosazení za velikost zrychlení plyne

$$\sin\alpha = \frac{2m - M}{M} = \frac{9}{13} \Rightarrow \alpha = 44^\circ.$$

3 body

b) Při pohybu vozíku svisle dolů lze velikost síly napínající vlákno vyjádřit jedním ze dvou způsobů

$$F_1 = mg + ma = mg + m\frac{M - m}{M + m}g$$

nebo

$$F_1 = Mg - Ma = Mg - M\frac{M - m}{M + m}g.$$

V obou případech dostaneme

$$F_1 = \frac{2Mm}{M + m}g = 0{,}24g = 2{,}3\ \mathrm{N}.$$

2,5 bodu

Při pohybu vozíku po nakloněné rovině nahoru lze velikost síly napínající vlákno vyjádřit jedním ze dvou způsobů

$$F_2 = mg - ma = mg - m\frac{M - m}{M + m}g$$

nebo

$$F_2 = Mg\sin\alpha + Ma = Mg\frac{2m - M}{M} + M\frac{M - m}{M + m}g.$$

V obou případech dostaneme

$$F_2 = \frac{2m^2}{M + m}g = 0{,}20g = 2{,}0\ \mathrm{N}.$$

2,5 bodu

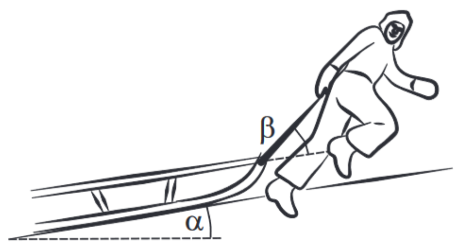
FO52D2-4: Sáňkař Autoři I. Volf a M. Jarešová:, 20,5 %

Sáňkař sjíždí dolů ze svahu o sklonu $\alpha = 10^\circ$ na saních o hmotnosti $m = 4{,}5$ kg. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Určete dobu t_1, za kterou sáňky sjedou ze svahu délky $l = 100$ m, je-li součinitel smykového tření mezi skluznicemi saní a sněhem $f_1 = 0{,}05$.

b) Během dne se změní sněhové podmínky (začne více mrznout, a tím dojde ke změně součinitele smykového tření), takže sáňkař sjede ze stejného svahu za dobu $t_2 =$ 12,0 s. Určete hodnotu součinitele smykového tření f_2 v tomto případě.

c) Když sjede sáňkař dolů ze svahu, musí zase saně vytáhnout nahoru na svah. Lano, za které táhne saně, svírá s rovinou svahu úhel $\beta = 40^\circ$ (obr. 6.14). Určete velikost síly F, kterou je napínáno lano, za které sáňkař táhne saně do kopce, pohybuje-li se sáňkař rovnoměrným pohybem. Při řešení uvažujte situaci za původních sněhových podmínek, tj. když součinitel smykového tření měl hodnotu 0,05. Než začnete matematicky řešit tuto část úlohy, nakreslete obrázek znázorňující síly, které na sáňkaře působí. Teprve na základě obrázku pak napište příslušné vztahy.



Obrázek 6.14

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty. Odpor vzduchu zanedbáváme.

Řešení:

a) Pro dráhu l ujetou sáňkařem při sjíždění ze svahu platí

$$l = \frac{1}{2} g(\sin\alpha - f_1 \cos\alpha) t_1^2,$$

z čehož

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - f_1\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 100}{9{,}81\cdot(\sin 10^\circ - 0{,}05\cdot\cos 10^\circ)}}\ \mathrm{s} = 12{,}8\ \mathrm{s}.$$

3 body

b) Za změněných sněhových podmínek můžeme obdobně jako v úloze a) psát

$$l = \frac{1}{2} g(\sin\alpha - f_2 \cos\alpha) t_2^2,$$

z čehož

$$f_2 = \ \mathrm{tg}\ \alpha \frac{2l}{g t_2^2 \cos\alpha} = \ \mathrm{tg}\ 10^\circ - \frac{2\cdot 100}{9{,}81\cdot 12{,}0^2\cdot\cos 10^\circ} = 0{,}03.$$

2 body

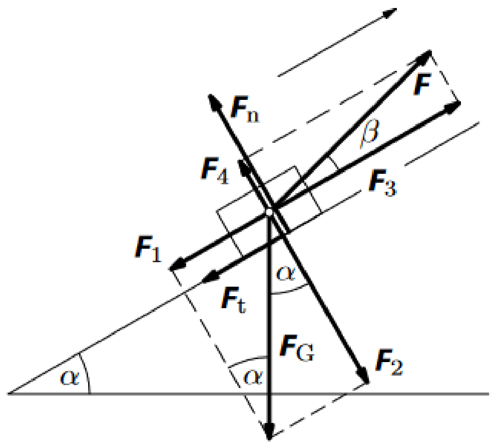
c) Nejprve provedeme rozbor úlohy, tj. zakreslíme síly a provedeme jejich rozklad do dvou navzájem kolmých směrů (obr. 6.15).

Z obr. 6.15 platí ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou $F_1 + F_t - F_3 = 0$, ve směru kolmém na nakloněnou rovinu $F_2 - F_4 - F_n = 0$. Tyto rovnice ještě doplníme vztahem pro výpočet třecí síly $F_t = F_n \cdot f_1$. Po dosazení z obr. 6.15 dostáváme

$$mg\sin\alpha + F_n\cdot f_1 - F\cos\beta = 0,$$

$$mg\cos\alpha - F\sin\beta - F_n = 0.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme



Obrázek 6.15

$$F = mg\frac{\sin\alpha + f_1\cos\alpha}{\cos\beta + f_1\sin\beta} = 4{,}5\cdot 9{,}81\cdot\frac{\sin 10^\circ + 0{,}005\cos 10^\circ}{\cos 40^\circ + 0{,}05\sin 40^\circ}\ \mathrm{N} = 12{,}3\ \mathrm{N}.$$

5 bodů

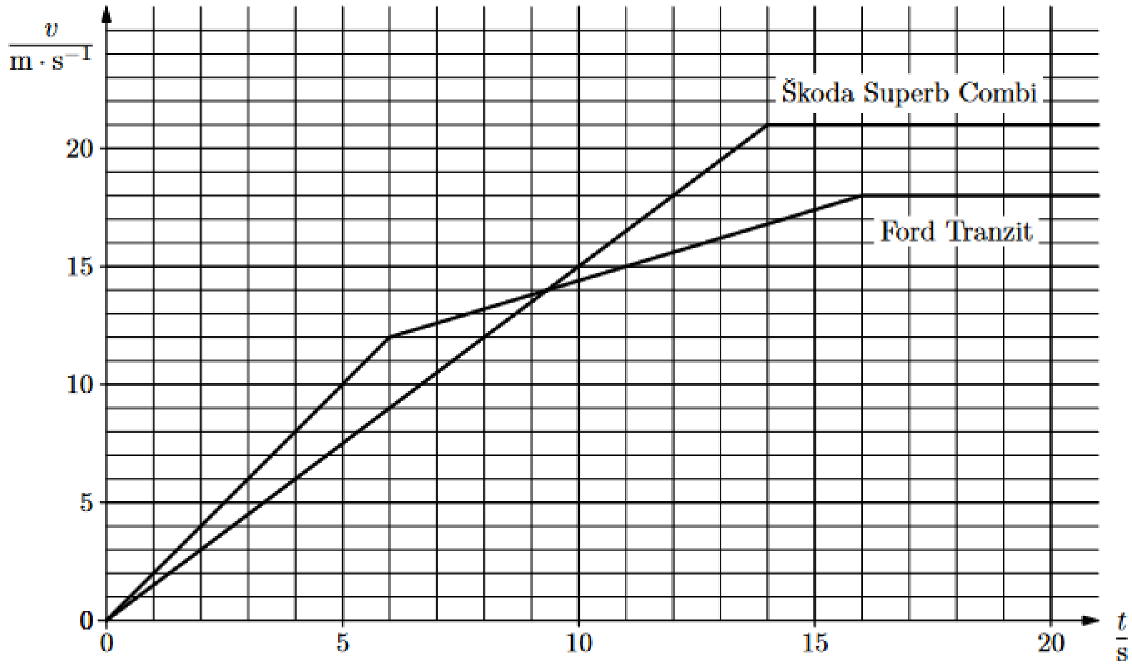
6.3 Práce a energie

FO55D2-3: Dva automobily Autor: J. Jírů, 57,3 %

Dva automobily se rozjíždějí podle grafu. Hmotnost automobilu Škoda Superb Combi je $m_\mathrm{S} = 1\,800$ kg, hmotnost automobilu Ford Transit je $m_\mathrm{T} = 2\,500$ kg. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Z grafu určete:

a) dráhu každého automobilu v čase 20 s,
b) největší velikost tahové síly každého automobilu,
c) práci vykonanou každým automobilem během rozjíždění,
d) největší okamžitý výkon každého automobilu,
e) průměrný výkon každého automobilu během celého rozjíždění, tj. během zrychleného pohybu.

Odpor vzduchu a valivý odpor zanedbejte.



Obrázek 6.16

Řešení:

a) Dráhu každého automobilu určíme jako obsah plochy pod grafem na časovém intervalu 0 s až 20 s:

$$s_S = \left(\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 14 + 21 \cdot (20 - 14)\right) \text{ m} = 273 \text{ m},$$

$$s_T = \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot (12 + 18) \cdot (16 - 6) + 18 \cdot (20 - 16)\right) \text{ m} = 258 \text{ m}.$$

2 body

b) Velikost tahové síly Superbu při rozjíždění je

$$F_\mathrm{S} = m_\mathrm{S} a_\mathrm{S} = 1\,800 \cdot 1{,}5 \text{ N} = 2\,700 \text{ N}.$$

Velikost tahové síly Transitu je větší na prvním úseku, kde měl větší velikost zrychlení:

$$F_\mathrm{T} = m_\mathrm{T} a_\mathrm{T} = 2\,500 \cdot 2 \text{ N} = 5\,000 \text{ N}.$$

2 body

c) Vykonaná práce je rovna získané kinetické energii

$$W_{\mathrm{S}} = E_{\mathrm{kS}} = \frac{1}{2} \cdot 1\,800 \cdot 21^2 \text{ J} = 397 \text{ kJ},$$

$$W_{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{kT}} = \frac{1}{2} \cdot 2\,500 \cdot 18^2 \text{ J} = 405 \text{ kJ}.$$

2 body

d) Největší okamžitý výkon během rovnoměrně zrychleného pohybu má automobil vždy na konci zrychleného úseku, kdy má největší velikost rychlosti ($P = Fv = mav$). Superb má největší okamžitý výkon v okamžiku dosažení rychlosti $v = 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$P_{\mathrm{S}} = m_{\mathrm{S}} a_{\mathrm{S}} v_{\mathrm{S}} = 1\,800 \cdot 1{,}5 \cdot 21 \text{ W} = 56{,}7 \text{ kW}.$$

Transit má v okamžiku dosažení rychlosti $v_{\mathrm{T1}} = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ výkon

$$P_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{T}} a_{\mathrm{T1}} v_{\mathrm{T1}} = 2\,500 \cdot 2 \cdot 12 \text{ W} = 60{,}0 \text{ kW},$$

v okamžiku dosažení rychlosti $v_{\mathrm{T2}} = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ výkon

$$P_{\mathrm{T2}} = m_T a_{\mathrm{T2}} v_{\mathrm{T2}} = 2500 \cdot 0{,}6 \cdot 18 \text{ W} = 27{,}0 \text{ kW}.$$

Tedy největšího výkonu dosáhl na konci prvního úseku $P_{\mathrm{T1}} = 60{,}0$ kW. **2 body**

e) Průměrné výkony automobilů během rozjíždění jsou

$$P_{\mathrm{S}} = \frac{W_{\mathrm{S}}}{t_{\mathrm{S}}} = \frac{397\,000}{14} \text{ W} = 28{,}4 \text{ kW}, \quad P_{\mathrm{T}} = \frac{W_{\mathrm{T}}}{t_{\mathrm{T}}} = \frac{405\,000}{16} \text{ W} = 25{,}3 \text{ kW}.$$

2 body

FO56D2-3: Rozjíždějící se automobil Autor: J. Jírů, 55,3 %

Automobil o hmotnosti $m = 1\,500$ kg se na prvním úseku rozjíždí z klidu působením stálé tažné síly o velikosti $F = 2\,500$ N do dosažení rychlosti o velikosti $v_1 = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. V tomto okamžiku dosáhne jistého užitečného výkonu, se kterým v rozjíždění na druhém úseku pokračuje do konečné rychlosti o velikosti $v_2 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Určete dobu t_1 jízdy na prvním úseku.
b) Určete dráhu s_1 prvního úseku.
c) Určete okamžitý výkon P na konci prvního úseku.
d) Určete dobu t_2 jízdy na druhém úseku.
e) Jak se mění okamžitý výkon v závislosti na čase na prvním úseku?

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

Řešení:

a) Z druhého Newtonova pohybového zákona

$$F = \frac{mv_1}{t_1}$$

dostaneme

$$t_1 = \frac{mv_1}{F} = 7{,}2 \text{ s}.$$

2 body

b) Tažná síla na prvním úseku vykonala práci, která je rovna získané kinetické energii automobilu:

$$W = Fs_1 = \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Z rovnice plyne

$$s_1 = \frac{mv_1^2}{2F} = 43 \text{ m}.$$

Je možné též vyjít ze vztahů $s_1 = \dfrac{1}{2}at_1^2$, $v_1 = at_1$, $F = ma$. **3 body**

c) Okamžitý výkon na konci prvního úseku je

$$P = Fv_1 = 30 \text{ kW}.$$

1 bod

d) Na druhém úseku vykoná motor automobilu užitečnou práci $W_2 = Pt_2 = Fv_1t_2$, která je rovna přírůstku kinetické energie automobilu:

$$W_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Z rovnic plyne

$$t_2 = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2Fv_1} = 12 \text{ s}.$$

3 body

e) Na prvním úseku podle vztahu $P = Fv = Fat$, kde velikosti síly a zrychlení jsou konstantní, je okamžitý výkon přímo úměrný času. **1 bod**

FO62D2-3: Zastavení automobilu Autor: J. Jírů , 54,3 %

Automobil působením stálé brzdící síly o velikosti $F = 3\,400$ N zastavil za čas $t = 12{,}0$ s na dráze $s = 150$ m.

a) Určete kinetickou energii E_k automobilu před začátkem brzdění.
b) Určete hmotnost m automobilu.
c) Určete dráhu s_1 ujetou za první třetinu doby brzdění.
d) Určete čas t_2 měřený od začátku brzdění, v němž rychlost automobilu klesla na třetinu počáteční rychlosti.

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty.

Řešení:

a) Kinetická energie automobilu je rovna práci vykonané brzdící silou:

$$E_\mathrm{k} = Fs = 510 \text{ kJ}.$$

2 body

Alternativní řešení: Užijeme vztah pro kinetickou energii a postupně dostaneme:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{a} \cdot (at)^2 = F \cdot \frac{1}{2}at^2 = Fs.$$

b) Z dráhy rovnoměrně zpomaleného pohybu do úplného zastavení

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

plyne pro velikost zrychlení

$$a = \frac{2s}{t^2} \tag{6.11}$$

Z druhého Newtonova pohybového zákona pak dostaneme

$$m = \frac{F}{a} = \frac{F}{\frac{2s}{t^2}} = \frac{Ft^2}{2s} = 1\,600\ \text{kg}.$$

3 body

c) Hledaná dráha je rozdíl celkové brzdné dráhy a dráhy ujeté v posledních dvou třetinách doby brzdění:

$$s_1 = s - \frac{1}{2}a\left(\frac{2}{3}t\right)^2 = s - \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{t^2}\cdot\frac{4}{9}t^2 = s - \frac{7}{9}s = 83\ \text{m}.$$

3 body

Alternativní řešení: Užijeme vzorec pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu v čase $\frac{t}{3}$:

$$s_1 = v\frac{t}{3} - \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{3}\right)^2 = at\cdot\frac{t}{3} - \frac{1}{2}a\frac{t^2}{9} = \frac{2s}{t^2}\cdot\frac{t^2}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{t^2}\cdot\frac{t^2}{9} = \frac{2}{3}s - \frac{1}{9}s = \frac{5}{9}s.$$

d) Při rovnoměrně zpomaleném pohybu rychlost klesá rovnoměrně s časem. To znamená, že rychlost bude třetinová v okamžiku, kdy do zastavení bude zbývat třetina času, tj. od začátku brzdění uplyne čas

$$t_2 = \frac{2}{3}t = 8{,}0\ \text{s}$$ **2 body**.

2 body

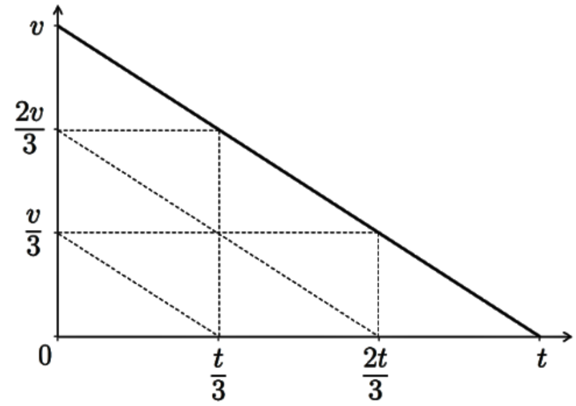
Alternativní řešení: Užijeme vztah pro rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu v čase $\frac{t}{3}$:

$$\frac{v}{3} = v - at_1 = v - \frac{v}{t}t_1.$$

Z rovnosti prvního a třetího výrazu dostaneme

$$t_1 = \frac{2}{3}t.$$

Poznámka: Úlohy c) a d) je možné vyřešit užitím grafu. Obsah plochy pod grafem na časovém intervalu $\left\langle 0; \frac{t}{3}\right\rangle$ tvoří $\frac{5}{9}$ celkového obsahu plochy pod grafem. Funkční hodnota v čase $\frac{2}{3}t$ je $\frac{v}{3}$.



Obrázek 6.17

FO54D2-2: Rozjezd automobilu Autor: J. Jírů, 50,7 %

Automobil o celkové hmotnosti $m = 1\,500$ kg se rozjížděl na vodorovné silnici z klidu tak, že na prvním úseku v čase $t_1 = 6{,}0$ s dosáhl rychlosti o velikosti $v_1 = 8{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a v čase $t_2 = 13{,}5$ s od začátku pohybu měl rychlost o velikosti $v_2 = 12{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Na každém úseku se pohyboval rovnoměrně zrychleným pohybem.

a) Rozhodněte, na kterém z úseků se pohyboval s větším zrychlením.
b) Rozhodněte, na kterém z úseků vykonal větší práci.
c) Rozhodněte, na kterém z úseků se automobil rozjížděl s větším průměrným výkonem.
d) Určete maximální okamžitý výkon během rozjíždění.
e) Určete dráhu uraženou během celého rozjíždění.

Odpor vzduchu a valivý odpor zanedbejte. Odpovědi v úlohách a), b), c) podložte výpočtem nebo zdůvodněte logickou úvahou.

Řešení:

a) Velikosti a_1, a_2 zrychlení na prvním a na druhém úseku jsou

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1} = 1{,}33\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad a_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 0{,}53\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

S větším zrychlením se pohyboval na prvním úseku. Místo výpočtů je možné uvážit, že na prvním úseku dosáhl větší změny rychlosti za kratší čas než na úseku druhém.
2 body

b) Práce W_1 na prvním úseku je rovna získané kinetické energii v čase t_1:

$$W_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = 48\ \mathrm{kJ}.$$

Práce W_2 na druhém úseku je rovna přírůstku kinetické energie mezi časy t_1 a t_2:

$$W_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = 60\,\mathrm{kJ}.$$

Větší práci vykonal na druhém úseku. **2 body**

c) Průměrný výkon na prvním úseku je $P_1 = \dfrac{W_1}{t_1} = 8$ kW.

Průměrný výkon na druhém úseku je $P_2 = \dfrac{W_2}{t_2 - t_1} = 8$ kW. Na obou úsecích se pohyboval se stejným průměrným výkonem. **2 body**

d) K výpočtu použijeme součin velikosti okamžité pohybové síly $F = ma$ a velikosti okamžité rychlosti v:

$$P = Fv = mav.$$

Na každém z úseků je síla konstantní, velikost rychlosti se zvětšuje. Stačí proto porovnat okamžité výkony na koncích úseků. Na konci prvního úseku je okamžitý výkon $P_1 = m a_1 v_1 = 16$ kW, na konci druhého úseku $P_2 = m a_2 v_2 = 9{,}6$ kW. Maximální okamžitý výkon během celého rozjíždění je tedy $P_{\max} = 16$ kW. **2 body**

e) Dráha na prvním úseku je $s_1 = \dfrac{1}{2} a_1 t_1^2 = 24$ m.

Dráha na druhém úseku je $s_2 = v_1(t_2 - t_1) + \dfrac{1}{2} a_2 (t_2 - t_1)^2 = 75$ m.

Automobil se rozjížděl na celkové dráze $s = s_1 + s_2 = 99$ m. **2 body**

FO57D2-1: Výlet automobilem Autor: J. Jírů, 50,2 %

Pan Dvořák jel svým automobilem o celkové hmotnosti $m = 1\,300$ kg na výlet. Na prvním rovinatém úseku délky $s_1 = 21$ km se pohyboval stálou rychlostí $v_1 = 90\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Druhý úsek délky $s_2 = 7{,}0$ km vedl do kopce se stálým stoupáním $p = 8{,}5$ % a pan Dvořák jej vyjel stálou rychlostí $v_2 = 70\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Při jízdě působí proti pohybu odporová síla vzduchu o velikosti $F_{\mathrm{odp}} = kv^2$, kde $k = 0{,}94\ \mathrm{N\cdot m^{-2}\cdot s^2}$, a konstantní síla valivého odporu o velikosti $F_{\mathrm{v}} = 280$ N.

a) Určete výkon P_1, s nímž projíždí automobil první úsek, a výkon P_2, s nímž projíždí druhý úsek.

b) Určete velikost rychlosti v, s níž by se musel pohybovat celou trasu, aby ji projel za stejný čas jako při uvedeném způsobu jízdy.

c) Kdyby při jízdě zpět pan Dvořák sjížděl kopec bez brzdění a bez zařazeného rychlostního stupně, automobil by na dostatečně dlouhé dráze již dále nezrychloval, jeho rychlost by se již nezvyšovala. Určete velikost $v_{\max}$ této dosažené rychlosti.

d) Pan Dvořák se vrací zpět z kopce rychlostí stejné velikosti $v_2 = 70\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ jako při jízdě do kopce, přitom musí brzdit (motorem či brzdami). Určete tento brzdící výkon P.

Účinnost motoru považujte za nezávislou na jeho výkonu. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Řešení:

Pro některé výpočty je nutné převést hodnoty rychlosti na m/s: $v_1 = 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = 19{,}\overline{4}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

a) Výkon motoru při jízdě po rovině je

$$P_1 = (F_{\mathrm{v}} + kv_1^2)v_1 = 22\ \mathrm{kW}.$$

Výkon motoru při jízdě do kopce je

$$P_2 = (F_{\mathrm{v}} + pmg + kv_2^2)v_2 = 33\ \mathrm{kW}.$$

4 body

b) Průměrná rychlost je

$$v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{\dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2}} = \frac{(s_1 + s_2)v_1 v_2}{s_1 v_2 + s_2 v_1} = 84\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

(Rychlost a dráhu je vhodné dosazovat v původních jednotkách.) **2 body**

c) Z rovnosti velikostí urychlující síly a brzdících sil

$$pmg = F_{\mathrm{v}} + kv_{\max}^2$$

dostaneme

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{pmg - F_{\mathrm{v}}}{k}} = 29{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 105\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

2 body

d) Brzdící výkon automobilu je

$$P = (pmg - F_{\mathrm{v}} - kv_2^2)v_2 = 8{,}7\ \mathrm{kW}.$$

2 body

FO53D2-2: Krasobruslařský pár Autor: J. Jírů, 50,0 %

Krasobruslařský pár tvoří partner o hmotnosti $m_1 = 80$ kg a partnerka o hmotnosti $m_2 = 56$ kg. Pár se pohybuje společně rychlostí o velikosti $v = 3{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Partner partnerku odstrčí silou stálé velikosti ve směru jízdy, čímž velikost jeho rychlosti klesne na $v_1 = 2{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Doba silového působení je $\Delta t = 0{,}80$ s. Určete:

a) velikost rychlosti v_2 partnerky;

b) práci W, kterou partner vykonal;

c) velikost zrychlení a_1, a_2 partnera a partnerky a velikost F působící síly.

Řešení:

a) Ze zákona zachování hybnosti

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_1 + m_2v_2$$

plyne

$$v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1v_1}{m_2} = 4{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body

b) Práce je rovna rozdílu kinetických energií po působení síly a před jejím působením:

$$W = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 48\ \mathrm{J}.$$

3 body

c) Velikost zrychlení partnera je

$$a_1 = \frac{v - v_1}{\Delta t} = 0{,}88\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

velikost zrychlení partnerky

$$a_2 = \frac{v_2 - v}{\Delta t} = 1{,}25\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Velikost působící síly určíme jako akci partnera nebo jako reakci partnerky pomocí druhého Newtonova pohybového zákona

$$F = m_1a_1 = m_2a_2 = 70\ \mathrm{N}.$$

4 body

Poznámka:

V případě, že student vyřeší úlohu b) obecně (což se v zadání nepožaduje), vyjde

$$W = \frac{m_1(m_1 + m_2)(v - v_1)^2}{2m_2}.$$

FO52D2-1: Srážka vagónů Autor: J. Jírů, 49,3 %

Po přímých vodorovných kolejích se pohybuje vagón o hmotnosti m rychlostí o velikosti v a vagón o hmotnosti m_2 rychlostí o velikosti $2v$. Po vzájemné srážce se vagóny automaticky spojí. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Určete poměr kinetických energií před srážkou.

b) Určete velikost u rychlosti soupravy po srážce a zlomkem vyjádřete, k jakému úbytku původní celkové kinetické energie obou vagónů při srážce dojde, jestliže se vagóny pohybují proti sobě.
c) Určete velikost u rychlosti soupravy po srážce a zlomkem vyjádřete, k jakému úbytku původní celkové kinetické energie obou vagónů při srážce dojde, jestliže se vagóny pohybují v témže směru.

Řešení:

a) Poměr kinetických energií prvního a druhého vagónu je

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot(2v)^2} = \frac{1}{2}.$$

Tedy druhý vagón má dvakrát větší kinetickou energii než první vagón. **1 bod**

b) Směry hybností vagónů před srážkou jsou navzájem opačné, podle ZZH platí:

$$mv - \frac{m}{2}\cdot 2v = \left(m + \frac{m}{2}\right)u.$$

Z rovnice plyne $u = 0$, souprava zůstane v klidu. Při srážce ztratí oba vagóny veškerou kinetickou energii. **3 body**

c) Směry hybností vagónů před srážkou jsou shodné, podle ZZH platí:

$$mv + \frac{m}{2}\cdot 2v = \left(m + \frac{m}{2}\right)u.$$

Z rovnice plyne $u = \frac{4}{3}v$. **3 body**

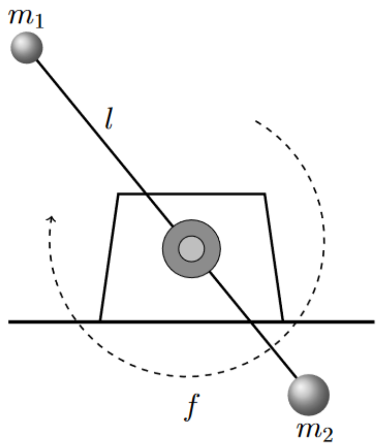
Označme E_k kinetickou energii obou vagónů před srážkou a E'_k kinetickou energii soupravy vagónů po srážce. Pak platí:

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2}\left(m + \frac{m}{2}\right)u^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}(2v)^2} = \frac{\frac{3}{4}m\cdot\left(\frac{4}{3}v\right)^2}{\frac{3}{2}mv^2} = \frac{8}{9}.$$

Původní celková kinetická energie obou vagónů se při srážce zmenší o $\frac{1}{9}$. **3 body**

FO56D2-2: Rotující kuličky na tyči Autor: J. Jírů, 47,4 %

Tuhá tyč délky $l = 0{,}500$ m a zanedbatelné hmotnosti je upevněna kolmo na vodorovnou otočnou hřídel tak, že osa hřídele dělí délku tyče v poměru 4:3. Na konci delší části je umístěna ocelová kulička o hmotnosti $m_1 = 0{,}135$ kg, na konci kratší části ocelová kulička o hmotnosti $m_2 = 0{,}240$ kg, přičemž střed kuličky je vždy přesně v konci tyče. Soustavu udržuje elektromotor v rovnoměrném otáčivém pohybu s frekvencí $f = 2{,}50$ Hz.



Obrázek 6.18

a) Určete velikosti obvodových rychlostí v_1, v_2 kuliček.
b) Na základě úvahy nebo výpočtu rozhodněte, která kulička má větší kinetickou energii.
c) Určete velikost a směr maximální síly $F_{\max}$ a velikost a směr minimální síly $F_{\min}$, kterými je osa otáčení namáhána.
d) Po odpojení pohonu se tyč s kuličkami vlivem tření v ložisku a odporové síly vzduchu po určité době zastaví. Stanovte se zdůvodněním polohu po zastavení.

Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Dostředivá síla či setrvačná odstředivá síla působí na kuličky v jejich středu stejně jako tíhová síla.

Řešení:

a) Velikosti rychlostí jsou

$$v_1 = \frac{4}{7} l \cdot 2\pi f = 4{,}49\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \quad v_2 = \frac{3}{7} l \cdot 2\pi f = \frac{3}{4} v_1 = 3{,}37\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

b) Poměr kinetických energií je

$$\frac{E_{k2}}{E_{12}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{3}{7} \cdot 2\pi f\right)^2}{\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{4}{7} \cdot 2\pi f\right)^2} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{9}{16} = \frac{0{,}240}{0{,}135} \cdot \frac{9}{16} = 1.$$

Kinetické energie obou kuliček jsou stejné. Místo výpočtu můžeme uvažovat takto: Podle obecného vzorce

$$E_k = \frac{1}{2} m v_2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

mají obě kuličky stejnou úhlovou rychlost ω. První kulička má 16/9 krát větší druhou mocninu poloměru otáčení, naopak druhá kulička má 16/9 krát větší hmotnost, proto je kinetická energie obou kuliček stejná. **2 body**

c) Z hlediska neinerciálního pozorovatele spojeného s rotorem elektromotoru působí na osu otáčení ve směru svisle dolů stálá tíhová síla F_G obou kuliček o velikosti

$$F_G = (m_1 + m_2) g = 3{,}68\ \mathrm{N}$$

a odstředivé síly F_{o1} a F_{o2}, které mají navzájem opačný směr, a to od osy otáčení k příslušné kuličce. Velikost výsledné odstředivé síly je

$$F_o = |F_{o1} - F_{o2}| = \left| m_1 \cdot \frac{4}{7} l \cdot (2\pi f)^2 - m_2 \cdot \frac{3}{7} l \cdot (2\pi f)^2 \right| = |4m_1 - 3m_2| \cdot \frac{4}{7} l \cdot \pi^2 f^2 = 3{,}17\ \mathrm{N}.$$

Osa otáčení je namáhána výslednou silou $F = F_G + F_o$. Maximum její velikosti nastane při souhlasném směru sil, minimum její velikosti při navzájem opačném směru:

$$F_{\max} = F_G + F_o = 6{,}85\ \mathrm{N},$$

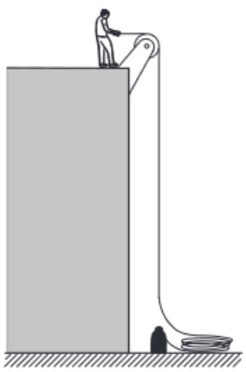
$$F_{\min} = |F_G - F_o| = 0{,}51\ \mathrm{N}, \quad F_G > F_o.$$

V obou případech směřuje výsledná síla svisle dolů. **4 body**

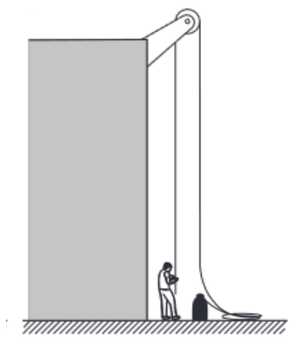
d) Poměr ramen ve vodorovné poloze (ale i v šikmé poloze) tyče je 4:3, poměr hmotností kuliček 9:16, proto moment tíhové síly působící na hmotnější kuličku je větší než moment druhé tíhové síly (poměr momentů je (3·16) : (4·9) = 48 : 12 = 4:3). Těžší ulička tak většinou zůstane dole, kde se vlivem třecí síly v ložisku zastaví v okolí nejnižší polohy, ale z téhož důvodu se může zastavit i nahoře v okolí nejvyšší polohy. Konečnou polohu je možné zdůvodnit též porovnáním potenciálních energií kuliček nad sebou. **2 body**

FO53D2-3: Zvedání břemene kladkou Autor: J. Jírů, 46,7 %

Na opravu domu byla použita plošina, na jejímž konci je ve výšce 15 m nad povrchem země připevněna pevná kladka, přes níž je vedeno lano celkové délky 35 m, kterým se má do uvedené výšky vytáhnout břemeno o hmotnosti 25 kg. Každý metr lana má hmotnost 0,4 kg. Uvažujme dvě možnosti, jak břemeno vytáhnout.
Pan Hořejší uvažoval, že začne tahat za druhý konec lana na plošině (obr. 6.19), zatímco pan Dolejší předpokládal, že zůstane na zemi a začne tahat za druhý konec lana, který se vedle břemene dotýká země (obr. 6.20).



Obrázek 6.19



Obrázek 6.20

a) Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti velikosti síly na dráze, po které každý na lano touto silou působí během celého vytahování.
b) Určete v každém z obou případů vykonanou práci.

Uvažujte, že po celou dobu pohybu se kladka otáčí rovnoměrně. Tření v ložisku kladky zanedbejte. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Řešení:

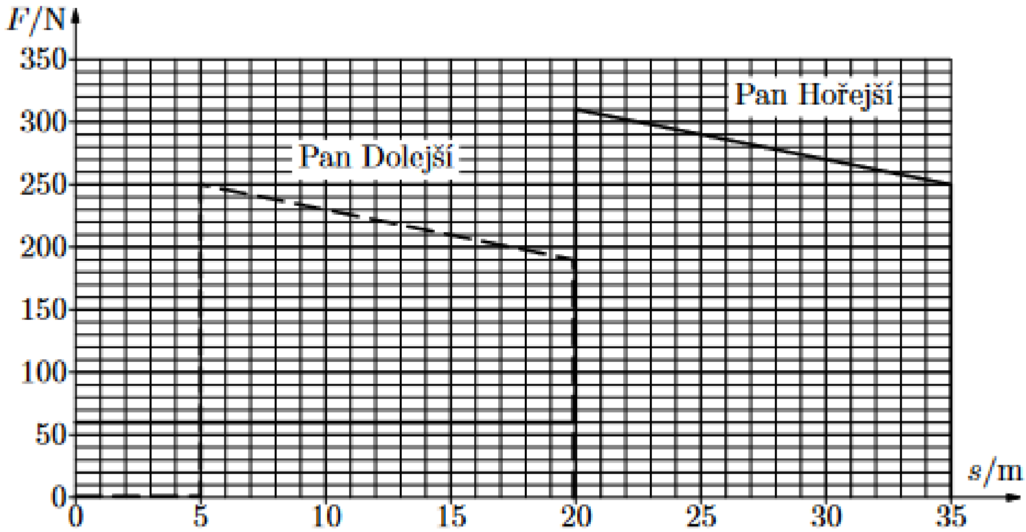
a) Grafy závislostí sil na dráze jsou na obrázku 6.21.
b) Práci lze určit z grafu jako obsah plochy pod grafem. Pan Hořejší vykonal práci

$$W_\mathrm{H} = \left(60 \cdot 20 + 250 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 15\right)\ \mathrm{J} = 5\,400\ \mathrm{J}.$$

Pan Dolejší vykonal práci

$$W_\mathrm{D} = \left(190 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 15\right)\ \mathrm{J} = 3\,300\ \mathrm{J}.$$

Jiná možnost určení práce:
Hmotnost celého lana je 14 kg, hmotnost lana délky 15 m je 6 kg.Pan Hořejší musí vytáhnout celé lano, přičemž visící část lana délky 15 m má již počáteční



Obrázek 6.21

potenciální energii $E_0 = mgh = 6 \cdot 10 \cdot 7{,}5$ J = 450 J (těžiště visící části je v poloviční výšce plošiny). Potenciální energie celého lana na plošině vzhledem k zemi je $E_1 = 14{\cdot}10{\cdot}15$ J = 2 100 J, potenciální energie břemene $E_\mathrm{b} = 25{\cdot}10{\cdot}15$ J = 3 750 J. Práce, kterou vykonal pan Hořejší je

$$W_\mathrm{H} = E_\mathrm{b} + E_1 - E_0 = 5\,400\ \mathrm{J}.$$

Pan Dolejší vytáhl břemeno vykonáním práce 3 750 J a spotřeboval práci 450 J tím, že o tuto hodnotu během druhé fáze vytahování zmenšil potenciální energii lana. Vykonal tedy práci

$$W_\mathrm{D} = E_\mathrm{b} - E_0 = 3\,300\ \mathrm{J}.$$

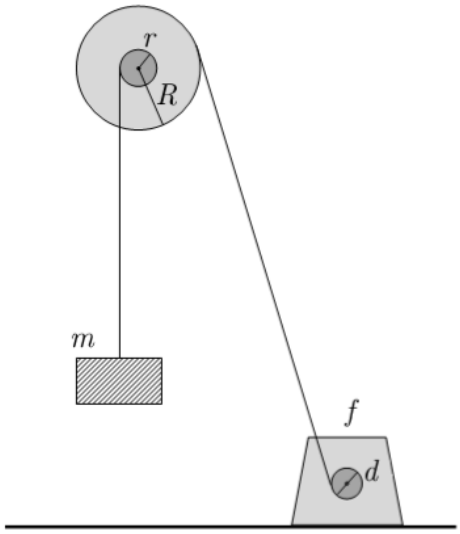
4 body

FO62D2-2: Kolo na hřídeli Autor: J. Jírů, 43.3 %

Břemeno o hmotnosti $m = 80$ kg je přes kolo na hřídeli taženo elektromotorem vzhůru do konečné výšky $h = 7{,}5$ m. Hnací kolo elektromotoru má průměr $d = 6{,}0$ cm a otáčí se s frekvencí $f = 4{,}5$ Hz. Poloměr hřídele je $r = 5{,}0$ cm, poloměr kola $R = 26$ cm. Jedno i druhé lano se vždy navíjí nebo odvíjí na plášti příslušného válce.

a) Určete užitečný výkon P elektromotoru při tažení břemene vzhůru.
b) Určete dobu t, za kterou je břemeno vytaženo do konečné polohy.
c) Určete periodu T otáčení kola na hřídeli.
d) Které body se pohybují s největším dostředivým zrychlením; body na obvodu hřídele, body na obvodu kola, nebo body na obvodu hnacího kola? Určete hodnotu tohoto zrychlení.

Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Tloušťku lan a jejich hmotnost považujte za zanedbatelnou. Dobu rozběhu a zastavení zanedbejte, celý pohyb považujte za rovnoměrný.
Řešte obecně i pro dané číselné hodnoty.



Obrázek 6.22

Řešení:

a) Užitečný výkon elektromotoru určíme vztahem $P = Fv$, kde

$$F = \frac{r}{R}mg$$

je tahová síla, kterou působí hnací kolo na lano a

$$v = \pi df$$

obvodová rychlost hnacího kola. Dosazením dostaneme

$$P = Fv = \pi df \frac{r}{R}mg = \pi \cdot 0{,}06 \cdot 4{,}5 \cdot \frac{5}{26} \cdot 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{W} = 130\ \mathrm{W}$$

3 body

b) Počet otáček velkého kola lze vyjádřit

$$N = \frac{h}{2\pi r} = \frac{l}{2\pi R},$$

kde l je délka lana svinutého z kola nebo též délka lana navinutého na hnací kolo elektromotoru. Ze vztahu plyne

$$l = \frac{R}{r}h.$$

Doba pohybu břemene pak je

$$t = \frac{l}{v} = \frac{\frac{R}{r}h}{\pi df} = \frac{R}{r}\frac{h}{\pi df} = \frac{26}{5} \cdot \frac{7{,}5}{\pi \cdot 0{,}06 \cdot 4{,}5}\ \mathrm{s} = 46\ \mathrm{s}.$$

3 body

c) Perioda otáčení kola na hřídeli je

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\pi df} = \frac{2R}{d} \cdot \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot 26}{6} \cdot \frac{1}{4{,}5}\ \mathrm{s} = 1{,}9\ \mathrm{s}.$$

2 body

d) Lano na obvodu velkého kola a lano na obvodu hřídele má stejnou úhlovou rychlost, označme ji ω. Z porovnání $r\omega^2 < R\omega^2$ plyne, že větší dostředivé zrychlení je na velkém kole.
Lano na obvodu velkého kola a hnacího kola má stejnou obvodovou rychlost v. Z porovnání $\frac{v^2}{R} < \frac{v^2}{\frac{d}{2}} = \frac{2v^2}{d}$ plyne, že dostředivé zrychlení na obvodu hnacího kola je ještě větší. Jeho hodnota je

$$a_d = \frac{2v^2}{d} = \frac{2\pi^2 d^2 f^2}{d} = 2\pi^2 df^2 = 2\pi^2 \cdot 0{,}06 \cdot 4{,}5^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

FO54D2-4: Dvě loďky Autor: J. Jírů, 41,9 %

Dvě loďky, každá o hmotnosti $m_0 = 90$ kg, jsou u sebe záděmi proti sobě. Chlapec o hmotnosti $m = 60$ kg přeskočil z jedné na druhou, čímž se prázdná loďka uvedla do pohybu rychlostí o velikosti $v_1 = 0{,}50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Určete velikost v_2 rychlosti loďky s chlapcem po jeho dopadu a velikost w vzájemné rychlosti, kterou se vzdalovala jedna loďka od druhé.
b) Určete práci W vykonanou chlapcem při odrazu od první loďky.
c) Určete konečnou celkovou kinetickou energii E_k obou loděk a chlapce.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

Řešení:

a) Označme v velikost rychlosti chlapce, kterou získal odrazem od první loďky. V první části děje se uplatňuje ZZH v soustavě první loďka a chlapec, v druhé části děje ZZH v soustavě chlapec a druhá loďka. Platí:

$$m_0 v_1 = mv, \tag{6.12}$$

$$mv = (m + m_0)v_2.$$

Z rovnic plyne

$$v_2 = \frac{m_0}{m + m_0} v_1 = \frac{90}{60 + 90} \cdot 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0{,}30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \tag{6.13}$$

Velikost vzájemné rychlosti loděk je $\omega = v_1 + v_2$, dosazením vztahu (6.13) dostaneme

$$\omega = v_1 + \frac{m_0}{m + m_0} v_1 = \frac{m + 2m_0}{m + m_0} v_1 = \frac{60 + 2 \cdot 90}{60 + 90} \cdot 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0{,}80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

b) Chlapec vykonal práci působením síly na první loďku, čímž uvedl tuto loďku a sebe do pohybu. Vykonaná práce je rovna součtu kinetických energií první loďky a chlapce:

$$W = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 + \frac{1}{2} mv^2,$$

kde velikost v rychlosti chlapce získáme ze vztahu (6.12)

$$v = \frac{m_0}{m} v_1.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$W = \frac{(m + m_0)m_0}{2m}v_1^2 = \frac{(60 + 90) \cdot 90}{2 \cdot 60} \cdot 0{,}5^2 \text{ J} = 28 \text{ J}.$$

3 body

c) Hledaná kinetická energie je součtem kinetických energií první loďky a druhé loďky s chlapcem:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_0 v_1^2 + \frac{1}{2}(m + m_0)v_2^2,$$

kde velikost v_2 rychlosti druhé loďky s chlapcem je dána vztahem (6.13). Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$E_\mathrm{k} = \frac{m_0(m + 2m_0)}{2(m + m_0)}v_1^2 = \frac{90 \cdot (60 + 2 \cdot 90)}{2 \cdot (60 + 90)} \cdot 0{,}5^2 \text{ J} = 18 \text{ J}.$$

3 body

FO51D2-3: Srážka vagónů Autor: J. Jírů, 41,7 %

Po přímých vodorovných kolejích jedou proti sobě dva vagóny. První má hmotnost m a velikost rychlosti v, druhý má hmotnost 3krát větší a velikost rychlosti 2krát menší než první vagón. Po srážce se vagóny automaticky spojí. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) Určete, který z vagónů má před srážkou větší kinetickou energii a kolikrát.
b) Určete směr pohybu vagónů po srážce.
c) Určete velikost rychlosti u soupravy po srážce.
d) Vyjádřete zlomkem, jaká část původní kinetické energie obou vagónů se srážkou přemění na vnitřní energii.
e) Oba vagóny mají v nárazníků stejnou pružinu. Rozhodněte a zdůvodněte, u kterého vagónu se během nárazu pružina více deformuje.

Řešení:

a) První vagón má kinetickou energii $E_\mathrm{k1} = \frac{1}{2}mv^2$, druhý $E_\mathrm{k2} = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}mv^2$.
Poměr energií je $\frac{E_\mathrm{k1}}{E_\mathrm{k2}} = \frac{4}{3}$.
Větší kinetickou energii má první vagón, a to $\frac{4}{3}$ krát. **2 body**

b) Velikost hybnosti prvního vagónu je $p_1 = mv$, druhého $p_2 = 3m \cdot \frac{v}{2} = \frac{3}{2}mv$. Druhý vagón má větší velikost hybnosti než první, proto se po srážce bude souprava pohybovat ve směru pohybu druhého vagónu. **1 bod**

c) Ze zákona zachování hybnosti $\frac{3}{2}mv - mv = (3m + m)u$ dostaneme $u = \frac{1}{8}v$. **2 body**

d) Poměr kinetické energie soupravy po srážce a kinetické energie vagónů před srážkou je

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k1} + E_\mathrm{k2}} = \frac{\frac{1}{2}(m + 3m)u^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2} = \frac{2m(\frac{v}{8})^2}{\frac{7}{8}mv^2} = \frac{1}{28}.$$

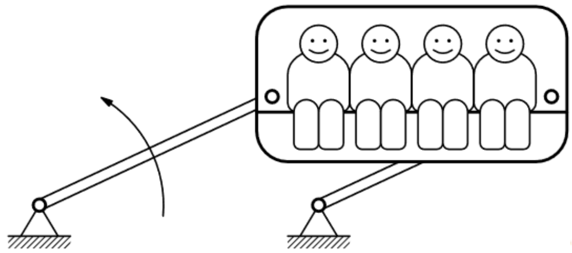
Na vnitřní energii se tak přemění $\frac{27}{28}$ původní kinetické energie obou vagónů.

3 body

e) V každém okamžiku v průběhu nárazu vagóny na sebe působí podle zákona akce a reakce silou stejné velikosti, proto bude deformace pružin v každém okamžiku stejná. **2 body**

FO52D2-3: Atrakce Autor: J. Jírů, 40,2 %

Lunaparková atrakce, tzv. „lavice", je tvořena řadou několika sedaček spojených vedle sebe do konstrukce, která se na dvou připojených ramenech otáčí (obr. 6.23). Každý bod rotující konstrukce obíhá po svislé kružnici o poloměru $r = 2{,}4$ m. Hmotnost rotující konstrukce i s pasažéry je $m_0 = 800$ kg, hmotnost ramen zanedbejte. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.



Obrázek 6.23

a) Určete periodu T rovnoměrného otáčení, při níž se člověk v nejvyšší poloze cítí ve stavu beztíže.
b) Určete v tomto případě maximální okamžitý výkon $P_{\max}$ motoru během stoupání lavice s pasažéry.
c) Určete velikost minimální síly $F_{\min}$ a maximální síly $F_{\max}$, kterou je člověk o hmotnosti $m = 60$ kg tlačen do sedačky při rovnoměrném otáčení s frekvencí $f = 0{,}20$ Hz.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

a) Z hlediska pasažéra je setrvačná odstředivá síla v rovnováze se silou tíhovou:

$$mg = mr\omega^2, \quad \text{kde } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Z rovnic plyne

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 3{,}1\ \mathrm{s} \tag{6.14}$$

3 body

b) Okamžitý výkon je maximální při průchodu ramen vodorovnou polohou, kdy se lavice s pasažéry pohybuje svisle vzhůru, a to silou stejné velikosti jako tíhová síla. Maximální okamžitý výkon je

$$P_{\max} = m_0 g v, \quad \text{kde } v = r\omega = r\frac{2\pi}{T}.$$

Dále užijeme vztah (6.14). Po dosazení dostaneme

$$P_{\max} = m_0\sqrt{g^3 r} = 38\ \mathrm{kW}.$$

3 body

c) V nejvyšší poloze je

$$F_{\min} = mg - mr\omega^2, \quad \text{kde } \omega = 2\pi f.$$

Po dosazení dostaneme

$$F_{\min} = mg - mr \cdot 4\pi^2 f^2 = m(g - 4\pi^2 f^2 r) = 360\ \mathrm{N}.$$

Podobně v nejnižší poloze je

$$F_{\max} = mg + mr \cdot 4\pi^2 f^2 = m(g + 4\pi^2 f^2 r) = 820\ \mathrm{N}.$$

4 body

Poznámka: Velikosti sil lze také zapsat jako násobek tíhové síly:

$$F_{\max,\ \min} = mg \pm mr \cdot 4\pi^2 f^2 = mg\left(1 \pm \frac{4\pi^2 f^2 r}{g}\right).$$

v úloze vyjde $F_{\min} = 0{,}61mg$, $F_{\max} = 1{,}39mg$.

FO60D2-3: Chlapec na voru Autor: J. Jírů, 39,8 %

Na klidné hladině vody plove dlouhý úzký vor o hmotnosti $M = 180$ kg, na jeho konci stojí chlapec o hmotnosti $m = 45$ kg. Chlapec se rozběhne k opačnému konci voru a skočí do vody, čímž se vor uvede do pohybu rychlostí o velikosti $v_0 = 0{,}70\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Určete velikost rychlosti u chlapce vzhledem k voru v okamžiku opuštění voru.
b) Určete práci W, kterou chlapec během rozbíhání vykonal.
c) Určete poměr $E_{\mathrm{k1}}/E_{\mathrm{k2}}$ kinetických energií chlapce a voru.
d) Slovně popište a fyzikálně zdůvodněte, co se stane, jestliže se chlapec z jednoho konce rozeběhne a na druhém konci se zastaví.

Úlohy a), b), c) řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Odporovou sílu působící na vor při pohybu ve vodě zanedbejte.

Řešení:

a) Vor s chlapcem tvoří izolovanou soustavu dvou těles, v níž si vzájemným silovým působením udělí vzhledem k vodě hybnosti stejné velikosti a opačného směru. Označme v_1 velikost rychlosti chlapce vzhledem k vodě. Ze zákona zachování hybnosti

$$mv_1 = Mv_0,$$

kde $v_1 = u - v_0$, postupně plyne

$$v_1 = \frac{M}{m}v_0, \quad u = \frac{M+m}{m}v_0 = 3{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

b) Práce vykonaná chlapcem je součet kinetických energií chlapce a voru

$$W = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{(M+m)Mv_0^2}{2m} = 220\ \mathrm{J}$$

3 body

c) Poměr kinetických energií je

$$\frac{E_{\mathrm{k1}}}{E_{\mathrm{k2}}} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}Mv_0^2} = \frac{m(\frac{M}{m}v_0)^2}{Mv_0^2} = \frac{M}{m} = 4.$$

2 body

d) Například: Během rozbíhání vlivem vodorovné síly, kterou chlapec na vor působí, bude též vor zrychlovat. Během zastavování chlapce působí chlapec na vor silou v opačném směru, čímž bude vor zpomalovat. V okamžiku zastavení chlapce bude též vor vzhledem k vodě opět v klidu.
Nebo: Na soustavu voru a chlapce nepůsobí ve vodorovném směru žádná vnější síla, proto hybnost soustavy je v každém okamžiku nulová jako na počátku. Tělesa na sebe působí pouze vzájemně, čímž se mění okamžitá rychlost každého z nich. V okamžiku zastavení chlapce se zastaví i vor (těžiště soustavy po celou dobu zůstává v klidu).

FO60D2-1: Rozjíždění a předjíždění Autor: J. Jírů, 38,3 %

Automobil má hmotnost $m = 1\,300$ kg a po celou dobu se nachází na vodorovné silnici.

a) Při rozjíždění z klidu dosáhl v čase $t_1 = 6{,}0$ s rychlosti $v_1 = 50\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, kterou poté zvětšil na hodnotu $v_2 = 90\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ za další čas $t_2 = 9{,}0$ s. Určete průměrný výkon P_1 během první části rozjíždění, průměrný výkon P_2 během druhé části rozjíždění a průměrný výkon P během celého rozjíždění.

b) Automobil při předjíždění zrychloval s užitečným výkonem $P_0 = 55$ kW z počáteční rychlosti $v_0 = 60\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Určete velikost v jeho rychlosti v čase $t = 5{,}0$ s od začátku předjíždění a velikost a jeho okamžitého zrychlení v okamžiku, kdy začal zrychlovat.

Řešení:

a) Práce s daným průměrným výkonem se využila na získání kinetické energie:

$$P_1 t_1 = \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Z rovnice plyne

$$P_1 = \frac{m v_1^2}{2t_1} = 21\ \mathrm{kW}$$

Práce s daným průměrným výkonem se vyžila na zvýšení kinetické energie

$$P_2 t_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2).$$

Z rovnice plyne

$$P_2 = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2t_2} = 31\ \mathrm{kW}.$$

Práce s hledaným průměrným výkonem během celé doby rozjíždění se využila na získání kinetické energie

$$P(t_1 + t_2) = \frac{1}{2} m v_2^2.$$

Z rovnice plyne

$$P = \frac{m v_2^2}{2(t_1 + t_2)} = 27\ \mathrm{kW}.$$

6 bodů

b) Z obdobné výchozí rovnice

$$P_0 t = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

plyne

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P_0t}{m}} = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 95 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Okamžitý výkon je roven součinu velikostí okamžité urychlovací síly a okamžité rychlosti:

$$P_0 = Fv_0 = mav_0.$$

Z rovnice plyne

$$a = \frac{P_0}{mv_0} = 2{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

4 body

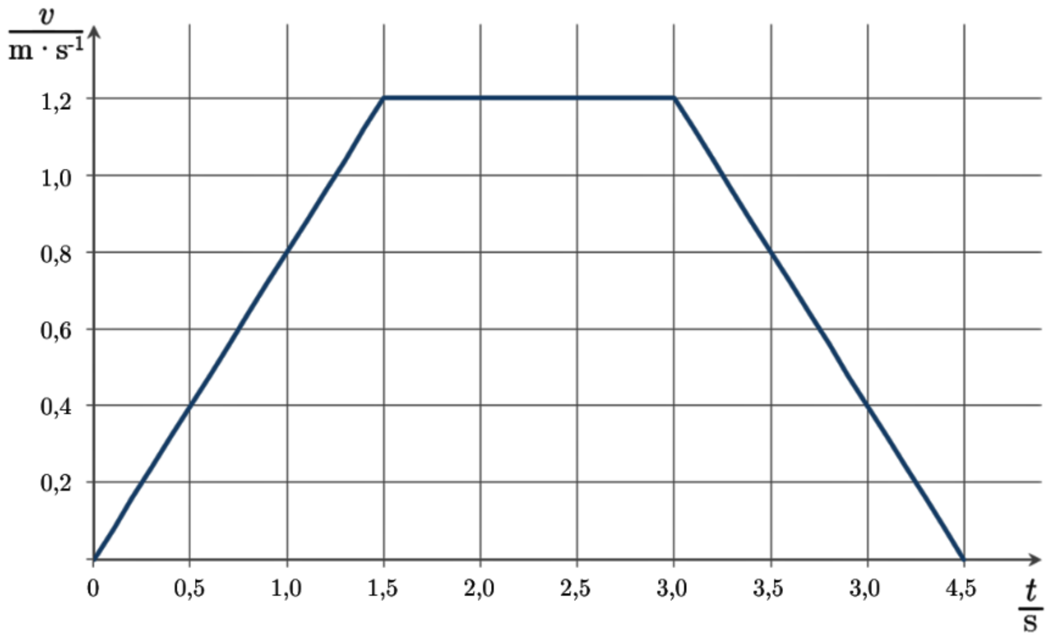
FO58D2-2: Výtah Autor: J. Jírů, 36,7 %

Osobní výtah tvoří kabina o hmotnosti $m_0 = 300$ kg zavěšená na laně vedeném přes pevnou kladku poháněnou elektromotorem a železobetonový panel o téže hmotnosti m_0 zavěšený na opačném konci lana jako protizávaží. Do kabiny nastoupil člověk o hmotnosti $m = 80$ kg a cestoval nahoru do následujícího patra. Závislost rychlosti výtahu na čase udává graf na obr. 6.24.

a) Určete práci W_1 elektromotoru během zrychlování výtahu, práci W_2 elektromotoru během rovnoměrného pohybu výtahu a práci W_3 elektromotoru během zpomalování výtahu.

b) Určete průměrný výkon P elektromotoru během celé jízdy výtahu a maximální okamžitý výkon $P_{\max}$ elektromotoru během jeho činnosti.

Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Třecí síly a hmotnosti kladky a lana považujte za zanedbatelné.



Obrázek 6.24

Řešení:

a) Označme $\Delta t = 1{,}5$ s dobu každého ze tří časových úseků, $v = 1{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ velikost okamžité rychlosti rovnoměrného pohybu výtahu a h výšku mezi sousedními patry neboli celkovou dráhu. Tu vypočteme jako celkový obsah plochy pod grafem, $h = 3{,}6$ m, přičemž na každý z krajních úseků připadá dráha $h/4$ a na prostřední úsek dráha $h/2$.
Kinetická energie výtahu na prostředním úseku se nemění a má hodnotu

$$E_\text{k} = \frac{1}{2}(2m_0 + m)v^2 = 490 \text{ J}.$$

Vykonané práce dostaneme pomocí potenciální a kinetické energie:

$$W_1 = mg\frac{h}{4} + E_\text{k} = 1\,200 \text{ J},$$

$$W_2 = mg\frac{h}{2} = 1\,400 \text{ J},$$

$$W_3 = mg\frac{h}{4} - E_\text{k} = 220 \text{ J}.$$

6 bodů

b) Průměrný výkon je

$$P = \frac{mgh}{3\Delta t} = 630 \text{ W}.$$

Z grafu určíme velikost zrychlení na prvním úseku:

$$a = \frac{v}{\Delta t} = 0{,}80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Okamžitý výkon dosáhne maximální hodnoty na konci urychlování, kdy je velikost okamžité rychlosti maximální:

$$P = [mg + (2m_0 + m)a]v = 1\,600 \text{ W}.$$

4 body

Alternativní řešení části a): Práce určíme pomocí síly a dráhy:

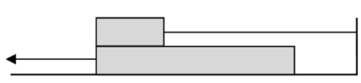
$$W_1 = [mg + (2m_0 + m)a]\frac{h}{4} = 1200 \text{ J},$$

$$W_2 = mg\frac{h}{2} = 1400 \text{ J},$$

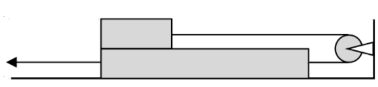
$$W_3 = [mg - (2m_0 + m)a]\frac{h}{4} = 220 \text{ J}.$$

FO59D2-3: Vlečení kvádrů po sobě Autor: J. Jírů, 36,6 %

Dva homogenní kvádry stejné hustoty ležící na sobě podle obrázku mají též stejnou šířku a stejnou výšku. Spodní kvádr má délku d_0 a hmotnost m_0, horní kvádr má délku d. Součinitel smykového tření mezi kvádry i mezi spodním kvádrem a vodorovnou podložkou je f.



Obrázek 6.25



Obrázek 6.26

a) K hornímu kvádru je připojené a na opačném konci upevněné lanko v napnutém stavu ve vodorovné poloze (obr. 6.25). Určete práci W_1 nutnou k posunutí spodního kvádru tak, aby horní kvádr byl na opačném konci spodního kvádru.
b) K oběma kvádrům je připojeno lanko vedené přes pevnou kladku, která se bez tření může otáček kolem své osy (obr. 6.26). Určete práci W_2 nutnou k posunutí spodního kvádru tak, aby horní kvádr byl na opačném konci spodního kvádru.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m_0 = 0{,}750$ kg, $d_0 = 0{,}40$ m, $d = 0{,}15$ m, $f = 0{,}30$, $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Řešení:

a) Hmotnost horního kvádru je $m = \dfrac{d}{d_0}m_0$. Při rovnoměrném pohybu působí na dolní plochu spodního kvádru proti pohybu třecí síla podložky a na jeho horní plochu třecí síla horního kvádru. Na spodní kvádr tak musí ve směru jeho rovnoměrného pohybu působit síla o velikosti

$$F_1 = f(m+m_0)g + fmg = f(m_0+2m)g = f\left(m_0 + 2\frac{d}{d_0}m_0\right)g = f\frac{d_0+2d}{d_0}m_0 g.$$

Dráha je $s_1 = d_0 - d$. Práce této síly je

$$W_1 = F_1 s_1 = f\frac{d_0+2d}{d_0}m_0 g\cdot(d_0-d) = \frac{(d_0+2d)(d_0-d)}{d_0}fm_0 g = 0{,}97\ \mathrm{J}.$$

5 bodů

b) Při rovnoměrném pohybu působí na spodní kvádr síla o stejné velikosti F_1 a navíc lanko silou stejné velikosti jako třecí síla, kterou působí spodní kvádr na dolní plochu horního kvádru. Na spodní kvádr tak musí ve směru jeho rovnoměrného pohybu působit síla o velikosti

$$F_2 = F_1 + fmg = f(m_0+2m)g + fmg = f(m_0+3m)g = f(m_0 + 3\frac{d}{d_0}m_0)g =$$
$$= f\frac{d_0+3d}{d_0}m_0 g.$$

Dráha je tentokrát poloviční: $s_2 = \dfrac{d_0-d}{2}$. Práce této síly je

$$W_2 = F_2 s_2 = f\frac{d_0+3d}{d_0}m_0 g\cdot\frac{d_0-d}{2} = \frac{(d_0+3d)(d_0-d)}{2d_0}fm_0 g = 0{,}59\ \mathrm{J}.$$

5 bodů

FO59D2-4: Automobil Autor: J. Jírů, 36,4 %

Automobil o hmotnosti $m = 1600$ kg se pohybuje po silnici s kopce se stálým sklonem s konstantním výkonem tahové síly $P_1 = 6{,}5$ kW rychlostí o velikosti $v_1 = 60\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Přitom proti pohybu působí síla odporu vzduchu, jejíž velikost je přímo úměrná druhé mocnině velikosti rychlosti $F_{\mathrm{odp}} = kv^2$, kde k je konstanta. Současně proti pohybu působí síla valivého odporu o velikosti $F_{\mathrm{v}} = 300$ N. Složka tíhové síly automobilu ve směru pohybu má stejnou velikost, to znamená, že se se silou valivého odporu vzájemně ruší. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Určete klesání silnice $\dfrac{h}{s}$, kde h je výška a s dráha.
b) Určete výkon P_2 tahové síly při rychlosti o velikosti $v_2 = 90\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
c) Určete velikost $v_{\max}$ maximální rychlosti, kterou se může automobil pohybovat při svém maximálním výkonu tahové síly $P_{\max} = 74\ \mathrm{kW}$.
d) Určete velikost zrychlení a_1, jestliže automobil při rychlosti $v_1 = 60\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ začne při maximálním výkonu $P_{\max}$ zrychlovat.

Řešení:
a) Z podmínky $F_\mathrm{v} = mg\sin\alpha = mg\dfrac{h}{s}$ plyne

$$\frac{h}{s} = \frac{F_\mathrm{v}}{mg} = 0{,}019 = 1{,}9\ \%$$

2 body

b) Z důvodu nulové výslednice složky tíhové síly ve směru pohybu a síly valivého odporu je výkon tahové síly při rovnoměrném pohybu automobilu potřebný výhradně k překonávání odporu vzduchu. Pro tento výkon obecně platí

$$P = F_\mathrm{odp}v = kv^2\cdot v = kv^3.$$

Při jednotlivých rychlostech tak dostaneme

$$P_1 = kv_1^3, \tag{6.15}$$

$$P_2 = kv_2^3, \tag{6.16}$$

Z rovnice (6.15) plyne

$$k = \frac{P_1}{v_1^3}. \tag{6.17}$$

Dosazením do rovnice (6.16) dostaneme

$$P_2 = P_1\frac{v_2^3}{v_1^3} = P_1\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 = 22\ \mathrm{kW}.$$

3 body

c) Obdobně z rovnice $P_{\max} = kv_{\max}^3$ a z rovnice (6.17) dostaneme

$$v_{\max} = v_1\sqrt[3]{\frac{P_{\max}}{P_1}} = 135\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

2 body

d) Tentokrát tahová síla, jejíž velikost je

$$F_1 = \frac{P_{\max}}{v_1}, \tag{6.18}$$

kromě překonávání odporové síly automobil urychluje. Dostaneme tak pohybovou rovnici

$$F_1 = kv_1^2 + ma_1.$$

Užitím vztahů (6.17) a (6.18) z rovnice dostaneme

$$\frac{P_{\max}}{v_1} = \frac{P_1}{v_1} + ma_1.$$

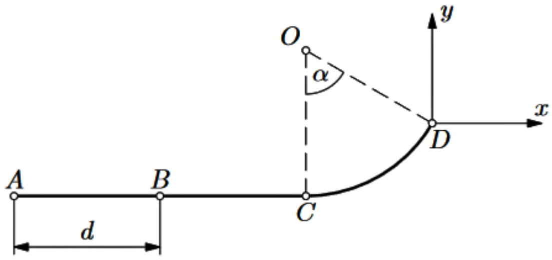
Z rovnice plyne

$$a_1 = \frac{P_{\max} - P_1}{mv_1} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

3 body

FO61D2-2: Kulička Autor: M. Chytilová, 33,1 %

Kulička o hmotnosti m leží v klidu v bodě A vodorovného přímého úseku žlábku AD. Na kuličku začne působit stálá síla F_a působí po úseku $AB = d$. V bodě C pak přejde kulička na kruhový oblouk CD o poloměru R ve svislé rovině (obr. 6.27), úsečka OC je kolmá k AC, oblouku CD odpovídá středový úhel α.



Obrázek 6.27

a) Určete minimální velikost $F_{\min}$ síly F tak, aby kulička v bodě D žlábku měla nulovou rychlost.
b) Určete rychlost v_D kuličky v bodě D, působí-li na ni na úseku AB stálá síla F_1, $F_1 > F_{\min}$. Napište rovnici trajektorie kuličky v soustavě souřadnic Dxy. Stanovte maximální výšku kuličky nad vodorovnou rovinou procházející bodem C.

Kulička se v žlábku smýká se zanedbatelným třením, odpor vzduchu neuvažujeme. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $d = 1{,}0$ m, $m = 0{,}50$ kg, $\alpha = 60°$, $R = 1{,}0$ m, $F_1 = 150$ N, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Řešení:

a) Působením stálé síly F koná kulička na úseku AB rovnoměrně zrychlený pohyb a dosáhne v bodě B rychlosti v_B. Touto rychlostí se dále pohybuje do bodu C, $v_C = v_B$. Z bodu C stoupá kulička po kruhovém oblouku do bodu D, v kterém nabude nulové rychlosti: $v_D = 0$. V tom případě označíme $F = F_{\min}$. Kinetickou energii v bodě C, popř. D, značíme E_{kC}, popř. E_{kD}. Potenciální energii tíhovou označíme E_{pC}, popř. E_{pD}, přičemž položíme $E_{pC} = 0$ J. Potom

$$E_{\mathrm{k}C} = \frac{1}{2}mv_C^2 = dF_{\min}, \quad E_{\mathrm{p}C} = 0\ \mathrm{J}, \quad E_{\mathrm{k}D} = 0\ \mathrm{J}, \quad E_{\mathrm{p}D} = mgR(1 - \cos\alpha).$$

Podle zákona zachování energie

$$E_{\mathrm{k}C} + E_{\mathrm{p}C} = E_{\mathrm{k}D} + E_{\mathrm{p}D}, \tag{6.19}$$

odtud

$$F_{\min} = \frac{mgR}{d}(1 - \cos\alpha) = 2{,}5\ \mathrm{N}.$$

4 body

b) Nyní platí $E_{kC} = dF_1$, $E_{pC} = 0$ J, $E_{kD} = \frac{1}{2}mv_D^2$, $E_{pD} = mgR(1 - \cos\alpha)$. Dosadíme do (6.19) a dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$v_D^2 = 2\left[\frac{dF_1}{m} - gR(1 - \cos\alpha)\right],$$

potom

$$v_D = \sqrt{2\left[\frac{dF_1}{m} - gR(1 - \cos\alpha)\right]} = 24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

Vektor v_D je kolmý k OD, a svírá tedy s osou souřadnic $+x$ úhel α. Rovnice trajektorie kuličky v soustavě souřadnic Dxy:

$$y = x \text{ tg } \alpha - x^2 \frac{g}{2v_D^2 \cos^2\alpha}$$

a po dosazení za v_D^2

$$y = x \text{ tg } \alpha - x^2 \frac{mg}{4[dF_1 - mgR(1 - \cos\alpha)]\cos^2\alpha}$$

2 body

Označíme $h_0 = R(1 - \cos\alpha)$ výšku bodu D nad vodorovnou rovinou procházející bodem C. Maximální výška h kuličky nad touto rovinou je pak $h = h_0 + y_V$, kde

$$y_V = \frac{v_D^2 \sin^2\alpha}{2g} = \sin^2\alpha \left[\frac{dF_1}{m} - gR(1 - \cos\alpha)\right]$$

je výška vrcholu trajektorie v soustavě souřadnic Dxy. Po úpravě dostaneme

$$h = R(1 - \cos\alpha)\cos^2\alpha + \frac{dF_1}{mg}\sin^2\alpha = 23 \text{ m}.$$

2 body

FO60D2-4: Hrátky s pukem Autor: J. Jírů, 32,7 %

a) Chlapci se na ledě trefovali pukem o hmotnosti m do pohybující se malé krabice s měkkou výstelkou o celkové hmotnosti $4m$ a otvorem orientovaným proti pohybu puku. Jeden chlapec poslal po ledě krabici a druhý vystřelil puk kolmo ke směru pohybu krabice. Velikost rychlosti krabice těsně před zásahem byla v_1. Po zásahu puk v krabici zůstal a soustava krabice s pukem se pohybovala ve směru odchýleném od původního směru letu samotného puku o úhel $\alpha = 20°$. Určete velikost v_2 rychlosti puku bezprostředně před zásahem krabice a velikost v rychlosti soustavy krabice s pukem bezprostředně po zásahu.

b) Puk o hmotnosti $m_1 = 160$ g vystřelený po ledě narazil při rychlosti o velikosti $v_1 = 7{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ do ležícího malého dětského puku, čímž se velikost jeho rychlosti zmenšila na hodnotu $u_1 = 2{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Těžiště obou puků se po celou dobu nacházelo v jedné přímce. Určete hmotnost m_2 malého puku a velikost u_2 jeho rychlosti bezprostředně po nárazu.

Srážku obou puků považujte za dokonale pružnou. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

a) Z vektorového diagramu hybností plyne

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{4mv_1}{mv_2} = \frac{4v_1}{v_2},$$

tedy

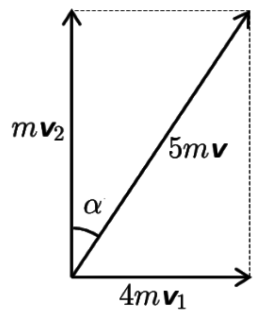
$$v_2 = \frac{4v_1}{\mathrm{tg}\ \alpha} = 11v_1.$$

Dále z vektorového diagramu plyne

$$\sin\alpha = \frac{4mv_1}{(m+4m)v} = \frac{4v_1}{5v}.$$

Z rovnice dostaneme

$$v = \frac{4v_1}{5\sin\alpha} = 2{,}3v_1.$$



Obrázek 6.28

5 bodů

b) Při srážce jsou splněny zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2,$$
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2.$$

Rovnice upravíme:

$$m_2u_2 = m_1(v_1 - u_1),$$
$$m_2u_2^2 = m_1(v_1^2 - u_1^2).$$

Druhou rovnici vydělíme rovnicí první. Poté krátíme výrazem $v_1 - u_1$ (výraz je nenulový, neboť nárazem se rychlost prvního puku změnila):

$$u_2 = \frac{v_1^2 - u_1^2}{v_1 - u_1} = v_1 + u_1 = 9{,}0v_1 - u_1 = v_1 + u_1 = 9{,}0\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

Z první upravené rovnice pak dosazením dostaneme

$$m_2 = \frac{v_1 - u_1}{v_1 + u_1}m_1 = 89\ \mathrm{g}.$$

5 bodů

FO55D2-1: Kulička na niti Autor: J. Jírů, 21,7 %

Na konci niti délky l je upevněna malá kulička o hmotnosti m. Druhý konec niti vezmeme do ruky, kuličku uvedeme pohybem ruky do pohybu po kružnici ve svislé rovině a nepatrným krouživým pohybem zápěstí ji v tomto pohybu udržujeme. Poloměr kružnice, po které kulička obíhá, je tedy prakticky roven délce niti l. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

a) Určete minimální velikost v_1 rychlosti v nejvyšším bodě trajektorie tak, aby nit ještě zůstala napnutá.

b) Určete velikost v_2 rychlosti, kterou bude kulička mít v nejnižším bodě trajektorie při splnění podmínky a).
c) Určete velikost F_2 síly, kterou je při splnění podmínky a) nit napínána v nejnižší poloze.
d) Určete velikost F_3 síly, kterou je nit při splnění podmínky a) napínána ve vodorovné poloze.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m = 0{,}14$ kg, $l = 0{,}45$ m. Odporové síly považujte za zanedbatelné.

Řešení:

a) Z rovnosti velikostí tíhové a setrvačné odstředivé síly $mg = \dfrac{mv_1^2}{l}$ plyne

$$v_1 = \sqrt{gl} = 2{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \tag{6.20}$$

1 bod

b) Ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mg \cdot 2l = \frac{1}{2}mv_2^2$$

plyne $v_2 = \sqrt{4gl + v_1^2}$. Po dosazení vztahu (6.20) a úpravě dostaneme

$$v_2 = \sqrt{5gl} = 4{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \tag{6.21}$$

3 body

c) Nit je napínána silou, která je výslednicí tíhové síly a setrvačné odstředivé síly. Její velikost je

$$F_2 = mg + \frac{mv_2^2}{l}.$$

Po dosazení vztahu (6.21) dostaneme

$$F_2 = 6mg = 8{,}2 \text{ N}.$$

3 body

d) Při průchodu vodorovnou polohou je tíhová síla kolmá na napnutou nit, proto napnutí nitě způsobuje pouze setrvačná odstředivá síla. Její velikost je

$$F_3 = \frac{mv_3^2}{l}, \tag{6.22}$$

kde v_3 je velikost rychlosti kuličky v této poloze. Tu získáme opět ze zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgl = \frac{1}{2}mv_3^2.$$

Dosazením vztahu (6.20) a úpravou dostaneme $v_3 = \sqrt{3gl}$. Po dosazení do vztahu (6.18) dostaneme

$$F_3 = 3mg = 4{,}1 \text{ N}.$$

3 body

FO53D2-1: Valivý pohyb Autor: P. Šedivý, 18,0 %

Kulička uvolněná na horním konci nakloněné roviny délky l_1 se bez klouzání skutálela dolů na vodorovnou rovinu a za dobu t od začátku pohybu byla zastavena zarážkou ve vzdálenosti l_2 od paty nakloněné roviny (obr. 6.29). Poloměr kuličky je malý a porovnání s uraženou dráhou. za předpokladu, že valivý odpor a odpor vzduchu byly zanedbatelné určete

a) dobu t_1 pohybu kuličky po nakloněné rovině a dobu t_2 pohybu po vodorovné rovině,

b) velikost v rychlosti, kterou získala kulička během pohybu po nakloněné rovině,

c) výšku h nakloněné roviny.

Obrázek 6.29

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $l_1 = 200$ cm, $l_2 = 300$ cm, $t = 3{,}5$ s, $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Moment setrvačnosti kuličky vzhledem k ose procházející jejím středem je $\frac{2}{5}mr^2$.

Řešení:

a) Pohyb po nakloněné rovině je rovnoměrně zrychlený, pohyb po vodorovné rovině je rovnoměrný. Platí

$$l_1 = \frac{vt_1}{2}, \quad l_2 = vt_2.$$

Řešením soustavy rovnic

$$t_1 + t_2 = t, \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{2l_1}{v}}{\frac{l_2}{v}} = \frac{2l_1}{l_2}$$

dostaneme

$$t_1 = \frac{2l_1}{2l_1 + l_2}t = 2{,}0\ \mathrm{s}, \quad t_2 = \frac{l_2}{2l_1 + l_2}t = 1{,}5\ \mathrm{s}.$$

3 body

b) Celková doba pohybu je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2l_1}{v} + \frac{l_2}{v}.$$

Z toho

$$v = \frac{2l_1 + l_2}{t} = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body

c) Potenciální energie kuličky při startu je rovna kinetické energii valivého pohybu na konci nakloněné roviny a na vodorovné rovině:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2.$$

Z toho

$$h = \frac{7}{10}\cdot\frac{v^2}{g} = \frac{7(2l_1 + l_2)^2}{10gt^2} \doteq 0{,}29\ \mathrm{m}.$$

4 body

6.4 Gravitační pole

FO51D2-2: Házení míčků Autor: J. Jírů, 57,8 %

Ze dvou oken nad sebou v panelovém domě vyhodili dva chlapci míček vodorovným směrem kolmo ke zdi domu. Oba míčky dopadly do stejného místa ve vzdálenosti $d = 24$ m od zdi. Doba letu prvního míčku byla $t_1 = 1{,}3$ s, druhý míček vyletěl z výšky $h_2 = 18$ m nad rovinou dopadu. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Určete, který chlapec házel z vyššího okna.
b) Určete počáteční rychlosti v_{01}, v_{02} obou míčků.
c) Určete rychlosti dopadu $v_{\mathrm{d}1}$, $v_{\mathrm{d}2}$ obou míčků.
d) Vysvětlete, proč oba míčky mají rychlosti dopadu téměř stejné, ačkoliv byly hozeny z různých výšek.

Úlohy b), c) řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

Řešení:

a) Pro rozhodnutí stačí buď vypočítat výšku prvního vrhu, nebo dobu letu druhého míčku:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}3^2 \mathrm{m} = 8{,}3\ \mathrm{m},$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 18}{9{,}81}}\ \mathrm{m} = 1{,}9\ \mathrm{s}.$$

Z porovnání s údaji ze zadání plyne, že z vyššího okna házel druhý chlapec. **1 bod**

b) Počáteční rychlost prvního míčku je $v_{01} = \dfrac{d}{t_1} = \dfrac{24}{1{,}3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 18{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pro počáteční rychlost druhého míčku platí $v_{02} = \dfrac{d}{t_2}$, kde $t_2 = \sqrt{\dfrac{2h_2}{g}}$. Po dosazení a úpravě dostaneme

$$v_{02} = d\sqrt{\frac{g}{2h_2}} = 24\sqrt{\frac{9{,}81}{2 \cdot 18}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 12{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

4 body

c) První míček má v okamžiku dopadu složky rychlosti

$$v_{x1} = v_{01} = \frac{d}{t_1}, v_{y1} = gt_1.$$

Rychlost dopadu má velikost

$$v_{\mathrm{d}1} = \sqrt{v_{01}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{\frac{d^2}{t_1^2} + (gt_1)^2} = 22{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

U druhého vrhu z rovnic $h_2 = \dfrac{1}{2}gt_2^2$, $v_{y2} = gt_2$ vyloučením času dostaneme svislou složku rychlosti při dopadu $v_{y2} = \sqrt{2gh_2}$.
Rychlost dopadu má velikost

$$v_{\mathrm{d}2} = \sqrt{v_{02}^2 + v_{y2}^2} = \sqrt{\frac{gd^2}{2h_2} + 2gh_2} = \sqrt{g\left(\frac{d^2}{2h_2} + 2h_2\right)} = 22{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

4 body

d) Svislá složka rychlosti dopadu roste s výškou vrhu, vodorovná složka rychlosti, tedy velikost počáteční rychlosti potřebné k dosažení daného místa dopadu, se zmenšuje. Jejich složením při vrhu z různých výšek můžeme dostat stejnou hodnotu. **1 bod**

FO58D2-3: Rozhledna Autor: J. Jírů, 43,3 %

Z rozhledny z místa ve výšce $h_0 = 19$ m nad zemí hodíme míček svisle dolů tak, že dopadne za čas $t_1 = 1{,}3$ s.

a) Určete velikost počáteční rychlosti v_0.

b) Určete, v jaké vzdálenosti d od paty věže dopadne, hodíme-li jej rychlostí o stejné velikosti v_0 vodorovně.

c) Určete dobu letu t_2, hodíme-li míček rychlostí stejné velikosti v_0 svisle vzhůru.

d) Určete ve všech třech případech velikost rychlosti dopadu v_{d1}, v_{d2} a v_{d3}.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. V obecném řešení částí b), c), d) považujte veličinu v_0 za známou. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

a) Z rovnice $h_0 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$ plyne

$$v_0 \frac{h_0}{t_1} - \frac{g t_1}{2} = 8{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

b) Doba letu t_0 je rovna době volného pádu z výšky h_0, tj.

$$h_0 = \frac{1}{2} g t_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Vzdálenost místa dopadu od paty věže pak je

$$d = v_0 t_0 = v_0 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 16\ \mathrm{m}.$$

3 body

c) Míček nejprve vystoupá nahoru za čas $t_3 = \frac{v_0}{g}$ a za stejný čas se vrátí zpět do místa vrhu, přičemž jeho rychlost bude mít stejnou velikost v_0, poté navazuje pohyb z části a) s dobou t_1. Platí:

$$t_2 = 2t_3 + t_1 = \frac{2v_0}{g} + t_1 = 3{,}0\ \mathrm{s}.$$

2 body

d) Bez ohledu na směr počáteční rychlosti má míček stejnou mechanickou energii. Ze ZZME

$$mgh_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{d}}^2$$

plyne

$$v_{\mathrm{d}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = 21\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

FO50D2-4: Mars Autor: J. Jírů, 35,2 %

Planeta Mars má poloměr $R = 3397$ km a vzhledem ke vzdáleným hvězdám se jedenkrát otočí kolem své osy za dobu $T = 24{,}62$ h (tzv. siderická doba rotace). Jeden z měsíců Marsu, Phobos, obíhá kolem planety přibližně po kružnici o poloměru $r_1 = 9\,380$ km s periodou $T_1 = 7{,}66$ h. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Určete velikost okamžité obvodové rychlosti bodu na rovníku Marsu vzhledem k ose otáčení.
b) Určete velikost gravitačního zrychlení a_g na povrchu Marsu.
c) Určete velikost únikové rychlosti v_p z povrchu Marsu.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

a) Přímo ze zadání dostaneme $v = \dfrac{2\pi R}{T} = 241\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**

b) Z gravitačního zákona dostaneme gravitační zrychlení na povrchu

$$a_g = G\frac{M}{R^2} \tag{6.23}$$

kde M je hmotnost Marsu. Gravitační síla působící na Phobos je silou dostředivou, proto

$$mr_1\frac{4\pi^2}{T_1^2} = G\frac{mM}{r_1^2},$$

tedy

$$M = \frac{4\pi^2 r_1^3}{GT_1^2} \tag{6.24}$$

Dosazením do vztahu (6.23) a úpravou dostaneme $a_g = \dfrac{4\pi^2 r_1^3}{R^2 T_1^2} = 3{,}71\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

4 body

c) Pro únikovou rychlost z povrchu Marsu platí

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{2} \cdot v_\mathrm{k} = \sqrt{2}\frac{2\pi R}{T_2}, \tag{6.25}$$

kde v_k je kruhová rychlost libovolného tělesa obíhajícího bezprostředně při povrchu Marsu a T_2 je jeho doba oběhu. Podle 3. Keplerova zákona pro Phobos a toto těleso platí

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{R^3}$$

Z rovnice dostaneme

$$T_2 = T_1\sqrt{\frac{R^3}{r_1^3}}.$$

Dosazením do vztahu (6.25) a úpravou dostaneme

$$v_\mathrm{p} = \frac{2\pi}{T_1}\sqrt{\frac{2r_1^3}{R}} = 5\,020\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Místo 3. Keplerova zákona lze využít vztah pro kruhovou rychlost

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{2} \cdot v_\mathrm{k} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

a dosadit hmotnost Marsu z rovnice (6.24). **4 body**

FO50D2-3: Házení na chodbě Autor: J. Jírů, 34,0 %

Na školní chodbě stáli proti sobě dva chlapci ve vzájemné vzdálenosti d a házeli si míčkem. Při jednom hodu letěl míček tak, že proletěl těsně pod stropem chodby. Místo vrhu i místo záchytu se nachází v hloubce h pod úrovní stropu. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Určete

a) dobu t_1 letu míčku,
b) velikost v_0 počáteční rychlosti míčku,
c) velikost $v_{\min}$ minimální rychlosti míčku během pohybu,
d) elevační úhel vrhu α.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $d = 16$ m, $h = 2{,}0$ m. Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

a) Doba letu splňuje podmínku $h = \frac{1}{2}g\left(\frac{t_1}{2}\right)^2$, z níž plyne

$$t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g}} = 1{,}3\ \mathrm{s}. \tag{6.26}$$

2 body

b) Rychlost míčku v okamžiku vrhu rozložíme na vodorovnou složku v_{x0} a svislou složku v_{y0}.

$$v_{x0} = \frac{d}{t_1}, \quad v_{y0} = g\frac{t_1}{2}. \tag{6.27}$$

Po dosazení vztahu (6.26) do vztahů (6.27) dostaneme

$$v_{x0} = \sqrt{\frac{gd^2}{8h}}, \quad v_{y0} = \sqrt{2gh}. \tag{6.28}$$

Velikost počáteční rychlosti míčku pak je

$$v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} = \sqrt{\frac{gd^2}{8h} + 2hg} = \sqrt{g\frac{d^2 + 16h^2}{8h}} = 14{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

4 body

c) Velikost rychlosti míče je minimální v nejvyšším bodě trajektorie, kde $v_y = 0$:

$$v_{\min} = v_{x0} = \frac{d}{t_1}.$$

Po dosazení vztahu (6.26) dostaneme

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gd^2}{8h}} = 12{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

d) V okamžiku vrhu platí: tg $\alpha = \dfrac{v_{y0}}{v_{x0}}$. Užitím vztahů (6.28) dostaneme

$$\text{tg } \alpha = \frac{4h}{d} = 0{,}500,\ \alpha = 27°.$$

2 body

FO56D2-4: Planetka Ida Autor: J. Thomas, 32,4 %

Planetka Ida obíhá kolem Slunce s periodou $T = 4{,}84$ let po dráze s numerickou excentricitou $\epsilon = 0{,}046$. Kolem planetky obíhá po přibližně kruhové dráze s poloměrem $r_{\mathrm{D}} = 90$ km malý měsíc Daktyl, jehož oběžná doba je $T_{\mathrm{D}} = 37$ hodin.

a) Určete střední vzdálenost planetky od Slunce (tj. délku hlavní poloosy trajektorie planetky), největší a nejmenší vzdálenost planetky od Slunce.

b) Určete střední rychlost planetky při jejím pohybu kolem Slunce (rychlost na kruhové trajektorii s poloměrem shodným s délkou hlavní poloosy elipsy), poměr největší a nejmenší rychlosti planetky při jejím pohybu kolem Slunce a velikosti těchto rychlostí.

c) Určete hmotnost planetky Ida.

Astronomická jednotka 1 au $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m, hmotnost Slunce $m_{\mathrm{S}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, gravitační konstanta $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Řešení:

a) Střední vzdálenost planetky od Slunce určíme pomocí 3. Keplerova zákona, kde využijeme parametry Země ($a_{\mathrm{Z}} = 1$ au a $T_{\mathrm{Z}} = 1$ rok):

$$a = a_{\mathrm{Z}} \sqrt[3]{\frac{t^2}{T_{\mathrm{Z}}^2}} = 2{,}86\ \text{au}.$$

Vzdálenosti planetky od Slunce v perihéliu a v aféliu:

$$r_{\mathrm{p}} = a(1-\epsilon) = 2{,}73\ \text{au},$$

$$r_{\mathrm{a}} = a(1+\epsilon) = 2{,}99\ \text{au}.$$

3 body

b) Pro střední rychlost platí

$$v_{\mathrm{k}} = \frac{2\pi a}{T} = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{s}}}{a}} = 17{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Poměr rychlostí v perihéliu a v aféliu je

$$\frac{v_{\mathrm{p}}}{v_{\mathrm{a}}} = \frac{r_{\mathrm{a}}}{r_{\mathrm{p}}} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = 1{,}1.$$

Největší rychlost má planetka v perihéliu:

$$v_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{k}} \sqrt{\frac{r_{\mathrm{a}}}{r_{\mathrm{p}}}} = v_{\mathrm{k}} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} = 18{,}4\ \mathrm{km \cdot s^{-1}},$$

nejmenší rychlost má planetka v aféliu:

$$v_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{k}} \sqrt{\frac{r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{a}}}} = v_{\mathrm{k}} \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} = 16{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

4 body

c) Dostředivou silou při pohybu měsíce Daktyl kolem planetky Ida je síla gravitační. Proto můžeme napsat

$$G\frac{m_\mathrm{D}m_1}{r_\mathrm{D}^2} = m_D\omega \cdot r_\mathrm{D} = m_\mathrm{D}\frac{4\pi^2}{T_\mathrm{D}^2}r_\mathrm{D} \Rightarrow m_1 = \frac{4\pi^2}{T_\mathrm{D}^2}\frac{r_\mathrm{D}^3}{G} = 2{,}4 \cdot 10^{16}\ \mathrm{kg}.$$

3 body

FO51D2-4: Lety z Marsu Autoři: I. Volf a M. Jarešová, 30,7 %

Podle některých astronomů je možné, že Mars byl kdysi osídlen vyspělou civilizací. Za tohoto předpokladu můžeme usuzovat, že marťané mohli létat na Zemi i Venuši. Vzdálenost středu Marsu od středu Slunce je 1,52 au, vzdálenost středu Venuše od středu Slunce je 0,72 au.

a) Z daných údajů určete, kolik dní trvá doba oběhu Marsu a Venuše kolem Slunce. Uvažujte, že marťané poletí na Zemi i Venuši po Hohmannových trajektoriích.
b) Určete délky hlavních poloos těchto trajektorií (v au) pro let na Zemi i Venuši.
c) Vypočtěte, kolik dní by marťanům trvala cesta na Zemi i Venuši.

Pro jednoduchost předpokládejte, že Mars, Venuše i Země se pohybují po trajektoriích tvaru kružnic, které leží v téže rovině.

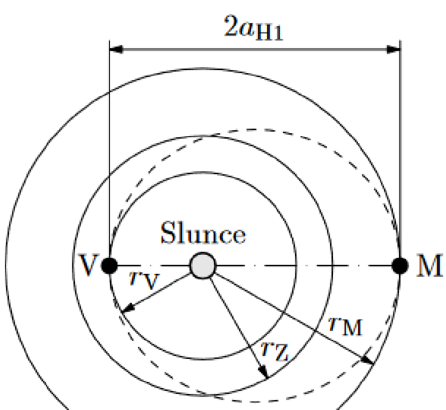
Řešení:

a) Podle 3. Keplerova zákona platí:

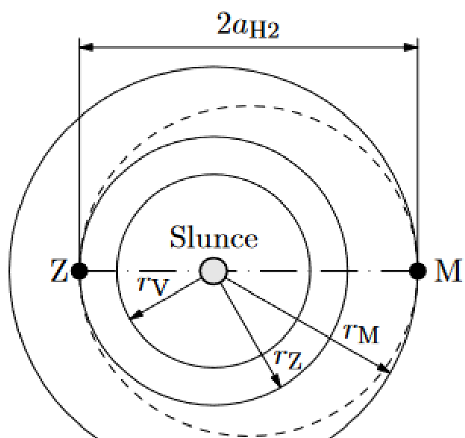
1. Pro dobu oběhu Marsu $\dfrac{T_\mathrm{Z}^2}{T_\mathrm{M}^2} = \dfrac{a_\mathrm{Z}^3}{a_\mathrm{M}^3}$, z čehož $T_\mathrm{M} = \sqrt{\left(\dfrac{a_\mathrm{M}}{a_\mathrm{Z}}\right)^3} T_\mathrm{Z} = 684$ dní,

2. Pro dobu oběhu Venuše $\dfrac{T_\mathrm{Z}^2}{T_\mathrm{V}^2} = \dfrac{a_\mathrm{z}^3}{a_\mathrm{V}^3}$, z čehož $T_\mathrm{V} = \sqrt{\left(\dfrac{a_\mathrm{V}}{a_\mathrm{Z}}\right)^3} T_\mathrm{Z} = 223$ dní. **4 body**

b) Hohmannovy trajektorie pro obě situace jsou znázorněny na obr. 6.30, 6.31.



Obrázek 6.30



Obrázek 6.31

Podle obr. 6.30 je délka hlavní poloosy Hohmannovy elipsy pro let na Venuši rovna

$$a_\mathrm{H1} = \frac{1}{2}(r_\mathrm{V} + r_\mathrm{M}) = \frac{1}{2}(0{,}72 + 1{,}52)\ \mathrm{au} = 1{,}12\ \mathrm{au}.$$

Analogicky pro let na planetu Zemi (obr. 6.31) platí

$$a_\mathrm{H2} = \frac{1}{2}(r_\mathrm{Z} + r_\mathrm{M}) = \frac{1}{2}(1 + 1{,}52)\ \mathrm{au} = 1{,}26\ \mathrm{au}.$$

2 body

c) Označme indexem Z údaje pro Zemi, tj. $a_\text{Z} = r_\text{Z} = 1$ au, $T_\text{Z} = 365$ dní. Pro let z Marsu na Venuši můžeme podle 3. Keplerova zákona psát $\frac{T_\text{H1}^2}{T_\text{Z}^2} = \frac{a_\text{H1}^3}{a_\text{Z}^3}$. Potom je doba letu z Marsu na Venuši rovna

$$T_\text{L1} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_\text{H1}}{a_\text{Z}}\right)^3} T_\text{Z} = 216 \text{ dní.}$$

Analogicky pro let z Marsu na Zemi můžeme psát $T_\text{L2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_\text{H2}}{a_\text{Z}}\right)^3} T_\text{Z} = 258$ dní.

4 body

FO55D2-4: Přistání kosmické sondy na planetce Eros Autor: J. Thomas, 27,5 %

Planetka Eros obíhá kolem Slunce po eliptické trajektorii s periodou $T_\text{E} = 1{,}76$ roku, v aféliu je její vzdálenost od Slunce $r_\text{a} = 1{,}78$ au. V roce 1996 vypustila NASA sondu NEAR Schoemaker, která 14. 2. 2000 zakotvila na oběžné dráze kolem planetky a 12. 2. 2001 přistála na planetce. Kolem planetky sonda obíhala s periodou $T_\text{N} = 6{,}6$ pozemského dne po kruhové trajektorii s poloměrem $r_\text{N} = 155$ km. Planetka má objem přibližně jako koule o poloměru $r_\text{E} = 8{,}8$ km, ale nepravidelný tvar podobný bramboru. Určete

a) vzdálenost planetky Eros od Slunce v periheliu r_p a číselnou výstřednost ϵ její trajektorie,
b) hmotnost planetky M_E a její průměrnou hustotu ρ,
c) gravitační zrychlení a_g na povrchu planetky, pokud by měla tvar koule, a nejmenší startovní rychlost v sondy nutnou k opuštění planetky.

Gravitační konstanta $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Řešení:

a) Užitím 3. Keplerova zákona určíme délku hlavní poloosy trajektorie planetky:

$$\frac{a^3}{a_\text{Z}^3} = \frac{T_\text{Z}^2}{T_\text{E}^2},$$

kde $T_\text{Z} = 1$ rok je doba oběhu Země a $a_\text{Z} = 1$ au je délka hlavní poloosy její trajektorie. Pak

$$a = a_\text{Z}\sqrt[3]{\frac{T_\text{E}^2}{T_\text{Z}^2}} = 1{,}46 \text{ au}, \ \epsilon = \frac{e}{a} = \frac{r_a - a}{a} = 0{,}22,$$

$$r_\text{p} = 2a - r_\text{a} = 1{,}14 \text{ au.}$$

3 body

b) Označme m_N hmotnost sondy NEAR. Při oběhu sondy po kruhové trajektorii kolem planetky je gravitační síla silou dostředivou:

$$G\frac{M_\text{E} m_\text{N}}{r_\text{N}^2} = m_\text{N}\frac{4\pi^2}{T_\text{N}^2} r_\text{N},$$

$$M_\text{E} = \frac{4\pi^2 r_\text{N}^3}{G T_\text{N}^2} = \frac{4\pi^2 (1{,}55 \cdot 10^5)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (6{,}6 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2} = 6{,}8 \cdot 10^{15} \text{ kg},$$

$$\rho = \frac{M_{\mathrm{E}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\mathrm{E}}^3} = 2{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

4 body

c) Předpokládáme-li kulový tvar planetky, pak na těleso o hmotnosti m by na povrchu planetky působila gravitační síla

$$ma_g = G\frac{M_{\mathrm{E}}m}{r_{\mathrm{E}}^2}.$$

Z toho

$$a_g = \frac{GM_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{E}}^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}8 \cdot 10^{15}}{8\,800^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 5{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Sondě je při startu nutno udělit parabolickou rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{E}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}8 \cdot 10^{15}}{8\,800}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 10{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

Závěr

Lze konstatovat, že cíl předložené bakalářské práce byl splněn. Byla vytvořila sbírka zahrnující celkem 50 úloh Fyzikální olympiády rozčleněných do čtyř tematických podkapitol: kinematika, dynamika, práce a energie a gravitační pole. Úlohy jsou v rámci tématického zaměření řazeny vzestupně podle obtížnosti vypočítané na základě dostupných dat z jednotlivých krajů. Uvedená témata odpovídají typicky učivu 1. ročníku čtyřletých gymnázií. Sbírka má potenciál využití jako podpůrný materiál k samostatné přípravě na krajské kolo Fyzikální olympiády kategorie D, v rámci seminářů pro řešitele FO pořádaných v jednotlivých krajích i jako zdroj doplňujících a rozšiřujících úloh pro práci a podporu nadaných žáků.

Mezi úlohami bylo identifikováno 15 úloh (tj. 30 % z celkových 50) s vysokým procentem nenormovaných odpovědí, jedna i s velmi nízkým indexem obtížnosti (tj. velmi obtížná). Do budoucna by bylo pro soutěž nepochybně žádoucí, aby zastoupení takových úloh bylo nižší a zadání krajských kol neodrazovalo řešitele od účasti v soutěži ve vyšších kategoriích v následujících letech. Podrobnější statistiku všech úloh lze nalést v elektronické příloze, kterou je sešit pro tabulkový kalkulátor Excel se všemi daty a výpočty.

Počet účastníků v jednotlivých krajích většinou stagnuje (případně fluktuuje a mírně klesá nebo stoupá). Pokud sledujeme trendy vývoje účasti v krajských kolech kategorie D, nejvýraznější nárůst lze pozorovat v Praze, velmi mírný nárůst vykazují i kraje Jihomoravský, Plzeňský a Moravskoslezský. Naopak především v kraji Vysočina a Královéhradeckém je trend sestupný. Zejména v těchto krajích by bylo žádoucí vyhodnotit možné příčiny, pokusit se soutěž více propagovat a snažit se apelovat na školy a hlavně učitele, aby žáky více motivovali k jejich mimoškolní činnosti spojené s Fyzikální olympiádou (obecně samozřejmě nejen s ní). Vyhodnocení pro Středočeský a Ústecký kraj nebylo možné provést z důvodu chybějících dat.

Z ilustračního porovnání řešení dvou účastníků v úloze 62. ročníku FO62D2-1 (školní rok 2020/2021), z nichž jeden řešil úlohu úspěšně a druhý méně úspěšně, je možné pozorovat, že úspěšnější řešitel více dodržuje (ať již vědomě či intuitivně) obecné zásady pro postup při řešení úloh. Má tak zřejmě smysl tyto zásady žákům vštěpovat a procvičovat řešení úloh, aby měli správný postup a základní kroky dobře zažité.

Práce s fyzikálními úlohami a jejich systematické vyhodnocování je velmi důležité i s ohledem na přípravu dalších ročníků soutěže (v každém ročníku FO kategorie D je zadáváno 11 úloh). Zhodnocení úloh provedené v předložené práci tak může byt užitečné i při výběru a formulaci úloh v dalších letech.

Literatura

[1] Bednařík, Milan a Miroslava Široká *Fyzika pro gymnázia: mechanika.* 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-176-0.

[2] *Dům dětí a mládeže a ZpDVPP, Ústí nad Labem, p.o. — Fyzikální olyomiáda* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: https://www.ddmul.cz/souteze-msmt-fyzikalni-olympiada.

[3] *Fyzikální olympiáda* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: https://kof.zcu.cz/fo/.

[4] *Fyzikální olympiáda* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: http://www.jmskoly.cz/souteze/kolo/22719/.

[5] *Fyzikální olympiáda* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: http://www.jmskoly.cz/souteze/kolo/28973/.

[6] *Fyzikální olympiáda* [online, cit. 20. 10. 2021] Dostupné z: http://www.jmskoly.cz/souteze/kolo/35453/.

[7] *Fyzikální olympiáda* [online, cit. 20. 10. 2021] Dostupné z: http://www.jmskoly.cz/souteze/kolo/41616/.

[8] *Fyzikální olympiáda – Gymnázium J. K. Tyla* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: https://www.gjkt.cz/fyzikalni-olympiada/.

[9] *Fyzikální olympiáda – Gymnázium Uherské hradiště* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: https://www.guh.cz/fyzikalni-olympiada/.

[10] Fyzikální olympiáda – Kategorie ABCD [online, cit. 21.4.2022]. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/stredni-skoly.

[11] Fyzikální olympiáda – Ustredni kolo [online] Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/ustredni-kolo.

[12] Chráska, Miroslav *Didaktické testy: příručka pro učitele a studenty učitelství.* Brno: Paido, 1999. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-85931-68-0.

[13] *Katedra aplikované fyziky a techniky ≫ Výsledkové listiny* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kaft/pro-verejnost/fyzikalni-olympiada/fyzikalni-olympiada-vysledkove-listiny/.

[14] *Krajská komise Fyzikální olympiády v Olomouci: výsledky krajských kol FO* [online, cit. 19.10.2021] Dostupné z: http://fo.upol.cz/archivkk.html.

[15] *Školní soutěže a olympiády* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: https://www.chces-soutezit.cz/souteze/editace-soutezni-kolo?soutez_kategorie_id=565&soutez_id=161&soutez_kolo_id=10937&idSkolniRok=3.

[16] *Školní soutěže a olympiády* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: https://www.chces-soutezit.cz/souteze/editace-soutezni-kolo?soutez_kategorie_id=83&soutez_id=44&soutez_kolo_id=162&idSkolniRok=2.

[17] Vafková, Lada. Položková analýza v systému STATISTICA. Bakalářská práce. Brno, Masarikova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2015. [online, cit. 24.4.2022] Dostupné z: https://is.muni.cz/th/t350m/Plny_text_BP.pdf.

[18] Volf, I., Kluvanec, D. *Čtyřicet let fyzikální olympiády*, 1999 [online, cit. 21.4.2022]. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/40letFO.pdf.

[19] *Výsledkové listiny :: KK FO* [online, cit. 19.10.2021] Dostupné z: http://kvary.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/.

[20] *Výsledkové listiny :: KK FO* [online, cit. 20.10.2021] Dostupné z: http://praha.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/.

[21] West Virginia University. *An Expert's Approach to Solving Physics Problems* [online, cit. 20. 10. 2021]. Dostupné z: https://physics.wvu.edu/files/d/ce78505d-1426-4d68-8bb2-128d8aac6b1b/expertapproachtosolvingphysicsproblems.pdf.