

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

Analýza vybraných ročníků celostátních kol  
Fyzikální olympiády



Vypracoval:	<b>Bc. Jana Michalcová</b>
Studijní program:	N1701 Fyzika
Studijní obor:	7504T055 Učitelství fyziky pro střední školy
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	srpen 2022

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 9. srpna 2022

.....  
Bc. Jana Michalcová

## **Poděkování**

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce, za cenné rady, ochotu a čas, který mi věnoval při tvorbě práce.

## Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Bc. Jana Michalcová
Název práce	Analýza vybraných ročníků celostátních kol Fyzikální olympiády
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2022
Abstrakt	<p>Tato diplomová práce se zabývá analýzou souboru úloh vybraných ročníků celostátních kol Fyzikální olympiády a kartografickým znázorněním zastoupení účastníků a jejich škol v rámci krajů České republiky. Primárním cílem této práce je vytvořit tematicky členěnou sbírku úloh celostátních kol a k jednotlivým úlohám zpracovat základní charakteristiky položkové analýzy a analýzy vlastností testu jako celku. Dále je práce zaměřena na zpracování dat počtu zúčastněných škol a jejich žáků v softwaru GIS a jejich následnou interpretaci. Celkem bylo zkoumáno 17. ročníku, od 46. do 62. ročníku. Z výsledků analýzy vlastností jednotlivých úloh se ukázalo, že celkem 84 % všech početních úloh splňuje nastavená kritéria. Z rozboru analýzy vlastností ročníků jako celku vyplývá, že většina úloh se pohybuje okolo mezní hodnoty Cronbachova alfa 0,6 rozlišující mezi heterogenitou a homogenitou testu. Mapové výstupy poukazují na velkou diferenciaci v zastoupení uchazečů FO a jejich škol v rámci krajů ČR. Poslední kapitola je již zaměřena na sbírku řešených úloh celostátních kol Fyzikální olympiády.</p>
Klíčová slova	obtížnost úlohy, citlivost úlohy, analýza nenormovaných odpovědí, reliabilita, geografické informační systémy, kartogram
Počet stran	198
Počet příloh	0
Jazyk	český

## Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Bc. Jana Michalcová
Title	Analysis of Selected Years of National Finals of the Physics Olympiad
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2022
Abstract	<p>This master's thesis examines separate sets of physics problems from designated years of national finals of Physics Olympiad and cartographic visualization considering attendance of participants and their respective schools in regard to regions of the Czech Republic. Primary aim of this thesis is to produce a thematically divided compilation of physics problems from aforementioned national finals and to evaluate basic characteristics of item analysis and analyze overall features of a test for individual problems. Furthermore, through GIS software, the thesis studies and subsequently interprets both relative and absolute participation of schools and their students. Overall, 17 years of the Physics Olympiad were examined, from year 46 to 62. Results of the analysis of individual problems indicate that 84% of problems fulfil set criteria. Through inspecting separate years, a conclusion was reached that a majority of physics problems can be found around the Cronbach alpha value of 0,6 differentiating homogeneity and heterogeneity of a test. Inspection of participation indicates a large discrepancy of attendance of competitors and their respective schools between individual regions. The compilation of thematically divided physics problems can be found in the last chapter.</p>
Keywords	difficulty index, discrimination index, analysis of non-standard answers, reliability, geographic information systems, cartogram
Number of pages	198
Number of appendices	0
Language	czech

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Fyzikální soutěže</b>	<b>9</b>
1.1 Význam soutěží ve vzdělávání	9
1.2 Fyzikální olympiáda	10
1.2.1 Historie Fyzikální olympiády	10
1.2.2 Astronomická olympiáda	12
1.3 Korespondenční fyzikální soutěže	12
1.3.1 FYKOS	12
1.3.2 Fermiho úlohy	13
1.4 Týmové fyzikální soutěže	13
1.4.1 Fyziklání	14
1.4.2 Turnaj mladých fyziků	14
1.4.3 EUSO/EOES	14
1.5 Účast žen ve fyzikálních soutěžích	14
<b>2 Geografické informační systémy</b>	<b>17</b>
2.1 Kartogram	17
2.2 Kartodiagram	18
<b>3 Analýza vlastností soutěžních ročníků celostátního kola FO</b>	<b>20</b>
3.1 Analýza vlastností jednotlivých soutěžních úloh	20
3.2 Analýza vlastností soutěžních ročníků jako celku	24
<b>4 Analýza zastoupení účastníků celostátních kol FO</b>	<b>26</b>
4.1 Vývoj účastníků v čase	26
4.2 Zastoupení účastníků v rámci krajů a okresů	27
4.3 Zastoupení SŠ v rámci krajů	29
<b>5 Sběrka úloh celostátních kol Fyzikální olympiády</b>	<b>31</b>
5.1 Mechanika	32
5.1.1 Kinematika	32
5.1.2 Dynamika	37
5.1.3 Gravitační pole	55
5.1.4 Mechanika tuhého tělesa	64
5.1.5 Mechanika kapalin a plynů	75
5.2 Molekulová fyzika a termika	83
5.2.1 Vnitřní energie, práce, teplo	83
5.2.2 Vlastnosti plynů	87
5.2.3 Práce plynu, kruhový děj	93

5.2.4	Vlastnosti pevných látek . . . . .	97
5.2.5	Změny skupenství látek . . . . .	100
5.3	Mechanické kmitání a vlnění . . . . .	104
5.4	Elektřina a magnetismus . . . . .	107
5.4.1	Elektrický náboj a elektrické pole . . . . .	107
5.4.2	Elektrický proud v kovech . . . . .	116
5.4.3	Nestacionární magnetické pole . . . . .	120
5.4.4	Střídavý proud . . . . .	132
5.4.5	Elektromagnetické kmitání a vlnění . . . . .	138
5.5	Optika . . . . .	141
5.5.1	Paprsková optika . . . . .	141
5.5.2	Vlnová optika . . . . .	157
5.6	Speciální teorie relativity . . . . .	160
5.7	Kvantová fyzika . . . . .	162
5.8	Jaderná fyzika . . . . .	166
5.8.1	Radioaktivita . . . . .	166
5.8.2	Fyzika částic . . . . .	176
5.9	Astrofyzika . . . . .	187
	<b>Závěr</b>	<b>194</b>
	<b>Literatura</b>	<b>196</b>

# Úvod

Cílem této práce je vytvořit tematicky členěnou sbírku úloh vybraných ročníků celostátních kol Fyzikální olympiády a k těmto ročníkům vyhodnotit základní charakteristiky zjišťované a určované u didaktických testů. Vzhledem k mé pedagogické aprobaci Fyzika-Geografie jsme se zaměřili také na absolutní i relativní zastoupení škol a jejich uchazečů v rámci jednotlivých krajů ČR. Diplomová práce je rozdělena do pěti následujících kapitol.

První kapitola je zaměřena na fyzikální soutěže v ČR, kterých se mohou žáci základních a středních škol zúčastnit. Velký důraz je kladen především na Fyzikální olympiádu a její stručnou historii. V rámci kapitoly se zaobíráme i otázkou znatelně nižšího zastoupení žen ve fyzikálních soutěžích.

Ve druhé kapitole popisujeme kartografické prostředky, které budeme využívat při znázornění počtu uchazečů a škol v jednotlivých krajích ČR. V této kapitole zavádíme také pojem geografické informační systémy (zkr. GIS).

Třetí kapitola je zaměřena na interpretaci výsledků získaných ze statistického zpracování vlastností soutěžních ročníků celostátního kola Fyzikální olympiády, ke kterým přistupujeme jako ke speciálními případu didaktického testu. Analýza byla provedena jak na úrovni položkové analýzy, tak na úrovni vlastností didaktického testu jako celku. Charakteristikami, se kterými zde pracujeme, jsme se blíže zabývali v bakalářské práci s názvem *Analýza vlastností souboru úloh vybraných ročníků Fyzikální olympiády*. Součástí kapitoly je také grafické znázornění vývoje obtížnosti jednotlivých ročníků za období 17 let (46.–62. ročník).

Ve čtvrté kapitole se nejdříve zabýváme otázkami týkající se vývojem počtu řešitelů v čase a podílu žen a mužů v jednotlivých ročnících. Následně zkoumáme zastoupení uchazečů a jejich příslušných škol v krajích ČR. Součástí této kapitoly je také výběr škol s největším počtem uchazečů za posledních 17 let. Pro větší názornost jsou data znázorněna prostřednictvím mapových výstupů vytvořených v softwaru GIS.

Poslední kapitola je již zaměřena na sbírku řešených úloh vybraných ročníků celostátních kol Fyzikální olympiády. Úlohy jsou roztříděné do témat na základě obsahu sbírek Karla Bartušky a seřazené podle rostoucí obtížnosti vyčíslené indexem obtížnosti  $P$ . Všechny úlohy jsou k dispozici na oficiálních stránkách Fyzikální olympiády (<http://fyzikalniolympiada.cz/>).

V této práci využívám vědomostí z oblastí didaktiky fyziky, statistiky a geografie, získané během studia na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci. Propojení znalostí z obou mých aprobačních předmětů je pro mě velmi cennou zkušeností.



# Kapitola 1

## Fyzikální soutěže

Aby se žák zapojil do soutěže, musí být pro něj dostatečně zajímavá. Výběr soutěže pak záleží na tom, jaké fyzikální oblasti jsou mu blízké a jakým způsobem rád objevuje. Někteří studenti jsou více zaměřeni na teoretické poznatky, jiní mají radost z experimentování. Někteří se cítí lépe v týmu, jiní preferují individuální práci. V České republice existuje mnoho soutěží s fyzikálním zaměřením, ze kterých si žáci mohou vybírat. Ještě před jejich představením si ale krátce vysvětlíme, proč jsou tyto soutěže důležité při práci s fyzikálními talenty.

### 1.1 Význam soutěží ve vzdělávání

Vzdělání a soutěž spolu odjakživa úzce souvisí. Již v 1. století př. n. l. římský učitel Marcus Verrius Flaccus aplikoval ve své výuce principy soutěže, kdy vítěze odměňoval zajímavou knihou. V období renesance italský učenec Battista Guarino doporučoval ve sbírce *De ordine docenti et studenti*, aby se učitelé zdrželi fyzických trestů a namísto toho stimulovali pozornost žáků prostřednictvím soutěží [1]. Dnešní technická doba přispěla ke tvorbě online soutěžních aplikací (např. Kahoot, Jeopardy, online pexeso aj.), které napomáhají ke zpestření výuky a efektivnímu opakování učiva.

Vhodnou didaktickou hrou či soutěží můžeme žáky motivovat k lepším výsledkům. Každá soutěž dává prostor k tomu, aby účastníci předvedli to nejlepší, co v nich je. Žáci tak mohou ukázat, že v dané disciplíně vynikají a zároveň jsou podníceni k větší aktivitě a koncentraci, aby dosáhli co nejlepšího výkonu. Po didaktické stránce pomáhají soutěže k trénování a opakování učiva, po osobnostní stránce k překonávání sebe samotných a zdokonalování se [2].

V poslední době zaznamenávají vysoké školy výrazný pokles zájemců o studium fyziky. Na základních i středních školách dochází ke snižování hodinových dotací fyziky na úkor ostatních vyučovacích předmětů, aktuálně především na úkor informatiky. Velký přínos pro práci s fyzikálními talenty tak představují různé mimoškolní aktivity jako například fyzikální kroužky či právě fyzikální soutěže. Žáci se při této příležitosti dostávají do skupiny vrstevníků, kteří sdílí společné zájmy [3]. V následujících podkapitolách si představíme několik soutěží, kterých by se mohl fyzikální nadšenec zúčastnit.

## 1.2 Fyzikální olympiáda

Asi nejznámější fyzikální soutěží u nás je *Fyzikální olympiáda* (zkr. FO). Proto ji také budeme věnovat větší pozornost a blíže si ji představíme. Do této soutěže se mohou zapsat žáci středních škol i druhého stupně základních škol. Náročnost soutěže je pak zohledněna v jednotlivých kategoriích podle třídy a stupně vzdělání [4].

- Kategorie A – 4. ročník SŠ
- Kategorie B – 3. ročník SŠ
- Kategorie C – 2. ročník SŠ
- Kategorie D – 1. ročník SŠ
- Kategorie E – 9. třída ZŠ
- Kategorie F – 8. třída ZŠ
- Kategorie G (Archimediáda) – 7. třída ZŠ

Žáci ve všech kategoriích mohou projít až třemi koly soutěže. Struktura FO je znázorněna ve tabulce níže [5].

Tabulka 1.1: Struktura soutěže FO

Kategorie A, B, C, D (SŠ)	Kategorie E, F, G (ZŠ)
školní kolo	školní kolo
↓	↓
krajské kolo	okresní kolo
↓	↓
celostátní kolo (kat. A)	krajské kolo (kat. E)

Tato olympiáda je určena pro jednotlivce, kteří mají radost z řešení teoretických úloh. Na úrovni celostátního kola se mohou těšit i na řešení experimentální úlohy [4]. Tvorba úloh je pro pořadatele vždy velmi náročná. Pro každý ročník musí vymyslet okolo 80 nových úloh, které budou pro řešitele vhodné a dostatečně zajímavé [5].

*Fyzikální olympiáda* si nezakládá pouze na tvorbě úloh, ale především na péči o žáky se zvýšeným zájmem o fyziku. Před každým ročníkem vychází sada studijních textů, pomocí kterých si žáci mohou rozšířit znalosti v dané oblasti fyziky a která slouží jako příprava na soutěž. FO také pořádá každoročně celostátní soustředění pro řešitele kategorie B pod názvem Táňa, které se od roku 1997 koná na stejnojmenné chatě Táňa v Peci pod Sněžkou. V rámci soustředění se žáci mohou těšit nejen na zajímavé přednášky či cvičení, ale také (a to možná především) na výlety v přírodě, hraní společenských her či zpívání u táboráků, u kterých se mohou více seznámit [4].

### 1.2.1 Historie Fyzikální olympiády

*Fyzikální olympiáda* byla oficiálně vyhlášena v roce 1959, ale její myšlenkou se zabývali vysokoškolští učitelé z Olomouce, Brna a Prahy již o dva roky dříve. Jejich cílem bylo zvýšit zájem studentů středních škol o studium přírodovědných a technických oborů na vysokých školách [5]. Nesmíme opomenout zmínit především prof. RNDr. Rostislava Košťála z Vysokého učení technického v Brně, který pro její vytvoření vynalezl

nesmírné úsilí a který se jejím rozvojem zabýval až do konce svého profesního života. V roce 1966 se společně s prof. Cz. Ścisłowským z Polska a R. Kunfálím z Maďarska zasloužil také o založení Mezinárodní fyzikální olympiády (MFO), za což byl následně in memoriam oceněn Světovým společenstvím fyziků u příležitosti 24. ročníku MFO v USA [4].

Z počátku byla olympiáda rozdělena do tří kategorií (A, B, C) určených pouze pro středoškoláky. V tehdejší školnímu systému se jednalo o vyšší ročníky tzv. jedenáctiletky či odborné školy [5]. Soutěž byla řízena Ústředním výborem fyzikální olympiády (zkr. ÚVFO) složená z učitelů vysokých a středních škol. Za Olomouc uvádíme prvního předsedu ÚVFO Bedřicha Havelku a jednatele Miroslava Laitocha a Jaroslava Pospíšila [7]. Žáci se mohli zúčastnit dvou kol - školního a krajského. V nejvyšší kategorii mohli postoupit až do kola celostátního. Ve školním kole žáci dostali k vyřešení celkem 8 teoretických úloh a jednu experimentální, kterou měli splnit pod dohledem svých učitelů ve školní laboratoři. Všechny úlohy se řešily v tentýž den. Krajské kolo pak bylo dvoudenní a probíhalo zpravidla o víkendu. V sobotu žáci řešili čtyři teoretické úlohy, v neděli úlohu experimentální. Soutěžícím bylo zajištěno ubytování se stravou a proplácely se i náklady na jízdné. Příprava krajského kola tak byla velice náročná i finančně nákladná. Od šestého ročníku se olympiáda rozšířila o kategorii E, do které se mohli zapojit i žáci 9. ročníků základních škol. Později se soutěž rozrostla o další tři kategorie (F, G, D) a od té doby se ustálila na počtu 7 kategoriích [5].

Jelikož olympiáda byla a dodnes je připravovaná především vysokoškolskými učiteli, velmi rychle se ukázalo, že jsou úlohy pro řešitele mnohem náročnější než úlohy, se kterými se setkali ve škole. Tvůrci olympiády se tak začali zamýšlet nad tím, jak by mohli uchazečům v jejich přípravě pomoci. Nejprve se začaly pořádat doplňující přednášky a semináře organizované pořadateli ve spolupráci s učiteli na školách. Později se začala organizovat také vícedenní krajská soustředění pro nejlepší řešitele nejnižší kategorie. Ve vyšších kategoriích se každoročně organizovalo celostátní soustředění pro nejúspěšnější soutěžící krajského kola kategorie B, a to společně s nejlepšími řešiteli Matematické olympiády. Účastníci byli na soustředění rozděleni do skupin, které se od sebe lišily programem: jedné fyzikální, jedné matematické a dvou fyzikálně-matematických.

Protože soustředění byla pořádána pouze pro nejúspěšnější řešitele, a to jen některých kategorií, nebyla určena pro všechny uchazeče. Navíc se brzy ukázalo, že středoškolské učebnice fyziky nejsou dostatečné při přípravě na olympiádu. Začala se rodit myšlenka vlastních materiálů určených pro samostudium. Podpůrné studijní texty byly nejprve vydávány v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální a následně jako samostatný tisk pod názvem Škola mladých fyziků [6]. Tyto malé brožury se vydávaly nákladem 3500 – 10 000 výtisků, z nichž polovina byla uhrazena a vykoupena Ministerstvem školství, které je následně zasílalo do škol a krajských výborů FO, kde byly používány pro přípravu uchazečů či jako odměna pro soutěžící [5].

Jednou z forem přípravy byly také Ročenky FO, vedené jako kroniky soutěže a které obsahovaly jména nejlepších řešitelů či zadání úloh společně s jejich řešením. Některé zahrnovaly i zmíněné studijní texty. Vyšlo celkem 29 ročenek od prvního ročníku až po ročník 1988, kdy byla edice ročenek ukončena především z ekonomických důvodů [5].

Počet soutěžících FO se od počátku značně lišil. Na jeho vývoji však můžeme dobře zpozorovat, jak se v průběhu let měnily politické priority a s tím související společenské hodnoty, které se odrazily v přístupu žáků k Fyzikální olympiádě i fyzice jako předmětu obecně. V prvním ročníku (1959) se prvního kola zúčastnilo 3203 žáků středních škol z české části republiky, ze slovenské části to pak bylo 999 žáků [6]. V osmdesátých letech 20. století se dostávalo fyzice ve školách značné pozornosti: vysoký počet vyučovacích

hodin fyziky, vhodné učebnice a sbírky úloh, kvalitní pomůcky ve školách. V tomto období, kterému se ve fyzikálních kruzích začalo přezdívat jako „zlatý věk školské fyziky“, byly zpracovány také metodiky pro práci s talentovanými žáky pro fyziku [8]. Není divu, že v těchto letech byl zaznamenán vysoký zájem žáků o Fyzikální olympiádu. Například ve 29. ročníku (1988) byl počet soutěžících středoškoláků 9846 z českého území republiky a 4291 ze slovenské části. Po tomto ročníku, který byl doposud nejsilnější a také úplně poslední zdokumentovaný v Ročence FO, už počty účastníků nedosahovaly nikdy takových čísel [6]. V 90. letech došlo ke změně politických a ekonomických poměrů, které se promítly i do společnosti. V roce 1993 se Československo rozdělilo na dva suverénní státy s nezávislými ekonomikami. Ministerstvo školství začalo méně přispívat na soutěž a pořadatelé se museli v mnohém uskromnit. Ačkoliv nezbývaly finance na vydání Ročenek a brožur Škola mladých fyziků, na kvalitě úloh a přípravě talentovaných žáků se nikdy neslevilo [5].

V posledních dvou letech zažila Fyzikální olympiáda novou, bohužel trochu bezkontaktní, etapu svého života. Ačkoliv bylo během pandemie covid-19 zakázáno pořádat kulturní, sportovní či vzdělávací akce, Fyzikální olympiáda si i s touto výzvou dokázala poradit a 62. ročník (2021) se uskutečnil online prostřednictvím aplikace Zoom. Neslevilo se ani z experimentální části celostátního kola. Ta nesla název Elektrická černá skříňka a celá se dala provést pomocí simulátoru na počítači z domova. Poslední ročník (63.) již proběhl standardně, pouze s odkladem celostátního kola.

## 1.2.2 Astronomická olympiáda

Nadšenci do astronomie a příbuzných oborů se mohou zapsat do *Astronomické olympiády*. Tato soutěž vznikla jako samostatná kategorie Fyzikální olympiády ve školním roce 2003/2004, a to především díky velké oblibě této oblasti fyziky u žáků a jejich přirozeného zájmu o vesmír [9]. Astronomická olympiáda je stejně jako FO členěna do jednotlivých kol podle věkových kategorií. Účastník může projít až třemi koly soutěže. Ve školním kole žáci řeší zadané úlohy samostatně a výsledky vyhodnocuje pověřený učitel přímo ve škole. V korespondenčním kole žáci vypracovávají úlohy samostatně doma a zaslané postupy vyhodnocuje Ústřední komise astronomické olympiády. Do celostátního finále se dostanou řešitelé s nejlepšími výsledky korespondenčního kola. Úspěšní řešitelé finále se pak mohou účastnit odborného soustředění a následně mohou být nominováni do reprezentace České republiky na Mezinárodní astronomické olympiádě [10]. Veškeré informace jsou k dispozici na oficiálních stránkách soutěže <https://olympiada.astro.cz>.

## 1.3 Korespondenční fyzikální soutěže

Pro žáky, kteří preferují řešení úloh spíše z domova, existuje celá řada zajímavých korespondenčních seminářů z fyziky. Níže uvádíme některé z nich.

### 1.3.1 FYKOS

Žáci všech typů středních škol se mohou zúčastnit soutěže *FYKOS* (Fyzikální KOrespondeční Seminář) pořádanou studenty a zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Během této soutěže dostávají uchazeči k vyřešení zadání 6 sérií úloh. Každá série obsahuje 8 úloh z různých oblastí fyziky: 5 úloh ze středoškolského učiva, jednu úlohu problémovou a jeden experiment. Pro 40 nejlepších řešitelů mají

organizátoři připravené tradiční jarní a podzimní soustředění, na kterých se žáci mohou nejen zúčastnit zajímavých přednášek, ale také si vyzkoušet náročnější fyzikální experimenty či zasoutěžit v různých zábavných hrách [11]. Bližší informace naleznete na webových stránkách <https://fykos.cz/start>.

Varianta FYKOSU na 2. stupni základních školách je *Výfuk* (Výpočty fyzikálních úkolů), který je pořádán také pod záštitou MFF UK. Řešitelé Výfuku mohou kromě cenných zkušeností vyhrát také hmotné ceny a účastnit se letního tábora plného her, výletů, přednášek a exkurzí [12]. Veškeré informace jsou k dispozici na oficiálních stránkách Výfuku <https://vyfuk.mff.cuni.cz/>.

### 1.3.2 Fermiho úlohy

Katedra experimentální fyziky Univerzity Palackého pořádá každoročně pod vedením RNDr. Renaty Holubové, CSc. korespondenční soutěž *Fermiho problémy*, pojmenovanou po italském fyzikovi Enrico Fermim. V této soutěži dostávají žáci k vyřešení problémovou úlohu (většinou hypotetickou), která se na první pohled může zdát jako neřešitelná. Úloha totiž neobsahuje žádné informace potřebné k jejímu rozluštění. Řešitel tak musí správně pochopit jádro problému a následně si klást vhodné otázky, jejichž odpovědi mu pomohou úlohu vyřešit. Žák se při vyhledávání informací seznamuje s různými zdroji na internetu nebo v tištěné podobě. U Fermiho úloh tedy existuje více cest jak úlohu vyřešit, a záleží pouze na žákovi, jaké otázky si klade a v jakém pořadí. Samotní pořadatelé jsou často překvapení originálním řešením žáků. V této soutěži se hodnotí především kreativita, počet doplňujících otázek, využití mezipředmětových vazeb a přesnost odhadu výsledku. Do Fermiho úloh se nemusí zapsat pouze nadšenci pro fyziku. Soutěž má široký přesah do ostatních předmětů a je určena primárně pro žáky, kteří mají radost z bádání a hledání odpovědí na záludné otázky [13]. Níže uvádíme příklady zadání Fermiho úloh, které jsou dostupné na oficiálních stránkách soutěže <http://isouteze.upol.cz/fermi/>:

„Kolik zlata obsahují mobilní telefony, které vlastní lidé v Evropě? Vyplatí se je recyklovat?“

„Kolik nektaru potřebuje včelka, aby mohla létat po dobu jedné hodiny?“

„O kolik by se zvýšila hladina moří, kdyby všichni obyvatelé Země skočili do moře?“

„Kolik času ročně stráví obyvatelé České republiky psaním textových zpráv na mobilních telefonech?“

„Kolik elektrické energie navíc bude potřeba, až všichni obyvatelé ČR budou používat elektrické automobily?“

## 1.4 Týmové fyzikální soutěže

Pro žáky, kteří preferují práci ve skupině, existuje mnoho týmových fyzikálních soutěží, kterých se mohou zúčastnit. Jedná se většinou o početní soutěže, které se od sebe liší zejména tím, kolik času mají žáci k dispozici na řešení úloh. Mezi nejznámější týmové fyzikální soutěže patří *Fyziklání* a *Turnaj mladých fyziků*.

### 1.4.1 Fyziklání

*Fyziklání* je soutěž organizovaná studenty MFF UK, kteří se podílí na již zmíněných korespondenčních seminářích FYKOS a Výfuk. Soutěže se mohou účastnit maximálně pětičlenné týmy, které jsou složeny ze studentů středních škol, a to jak z České republiky tak i ze zahraničí [15]. Například v roce 2021 se Fyziklání účastnilo přes 400 týmů ze 36 různých států světa [14]. Cílem týmů je vyřešit co nejvíce úloh v časovém limitu tří hodin. Ačkoliv samotná soutěž trvá pouze 3 hodiny, doprovodný program probíhá přes celý víkend. Soutěžící se mohou zúčastnit mnohých zajímavých přednášek a exkurzí v okolí Prahy [15]. Veškeré informace naleznete na oficiálních stránkách soutěže <https://fyziklani.cz/>.

Online obdobou Fyziklání, na které mohou žáci SŠ pracovat z pohodlí domova, je Fyziklání Online. Uchazeči opět řeší, co nejvíce úloh v časovém horizontu 3 hodin, ale tentokrát s možností využití internetu [11]. Více informací na <https://online.fyziklani.cz/>.

### 1.4.2 Turnaj mladých fyziků

Odlíšnou týmovou soutěží pro středoškoláky je *Turnaj mladých fyziků*. V této soutěži žáci řeší náročné otevřené úlohy v horizontu několika měsíců. Úlohy jsou vytvořené tak, aby byly pro žáky dostatečně obtížné a představovaly tak pro ně výzvu [3]. Na samotném závěrečném turnaji žáci prezentují a obhajují své výsledky a diskutují nad řešením ostatních týmů. Tato soutěž se tedy zaměřuje nejen na vlastní řešení úloh, ale i na diskusi a schopnost kriticky rozebrat cizí práci [16]. Mezi členy výboru patří například i prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr. z katedry optiky na Přf UPOL. Úlohy jsou k dispozici na <https://tmf.fzu.cz/index.php>.

### 1.4.3 EUSO/EOES

Vítězové přírodovědných olympiád v ČR do věku 16 let mohou být vybráni do mezinárodní soutěže *European Union Science Olympiad* (zkr. EUSO). Tato soutěž vznikla v roce 2003 jako iniciativa Evropské unie ke zvýšení zájmu žáků o přírodní vědy. Jedná se o komplexně přírodovědnou soutěž zahrnující znalosti z fyziky, chemie a biologie. Žáci mají k dispozici podrobné zadání experimentální úlohy, která se dotýká všech těchto oblastí. Úlohy jsou pro účastníky velmi atraktivní, protože jsou běžně proveditelné ve vědeckých laboratořích. Takto si žáci například vytvořili fotočlánek z červeného barviva, který extrahovali z červeného salátu a následně změřili účinnost přeměny světelného záření na elektrickou energii [3]. V roce 2011 se EUSO dokonce pořádala na území České republiky a při této příležitosti se mohli zahraniční studenti prostřednictvím úloh dozvědět více o naší historii a kultuře. Experimentální bloky nesly názvy All about Beer (Vše o pivu) a Lenses including Contact Lenses (Čočky včetně kontaktních čoček). V roce 2021 došlo k rozdělení na dvě samostatné soutěže EUSO a EOES (*European Olympiad of Experimental Science*). Zadání experimentů jsou volně dostupná na stránkách <http://euso.eu/> a <https://www.eoes.science>.

## 1.5 Účast žen ve fyzikálních soutěžích

Je všeobecně známo, že na fyzikální obory vysokých škol se hlásí více mužů než žen. S tím souvisí i vyšší podíl mužských zaměstnanců jak na akademických, tak vědeckých

pracovištích. Jako příklad můžeme uvést dotazníkové šetření absolventů Matematicko-fyzikální fakulty za čtyři ročníky (2012/2013 – 2018/2019). Z výzkumu vyplývá, že za dané období činí podíl absolvovaných žen pouhých 26 % [17]. Nižší procentuální zastoupení nalezneme i u akademických pracovníků, kde se podíl žen pohybuje okolo 14 % [18]. Minimální účast se také odráží na fyzikálních soutěžích, kde výrazně dominuje zastoupení mužů. Určitě existuje mnoho různých vysvětlení či hypotéz, proč mají ženy menší zájem o fyzikální soutěže či studium fyziky obecně. My se zde pokusíme v několika odstavcích představit (nebo vyvrátit) ty z nich, které jsme schopni také vědecky doložit.

Ačkoliv v dnešní době se tyto stereotypy postupně stírají, pořád ještě se můžeme setkat s přesvědčením, že dívky nejsou schopné porozumět fyzikálním zákonitostem tak dobře jako chlapci. Jako první bychom chtěli tuto mylnou domněnku vyvrátit. Nižší zastoupení žen ve fyzikálních oborech je celosvětovým trendem, a tak se touto záležitostí zabývalo již mnoho vědců napříč kontinenty. Jako příklad bychom chtěli porovnat dvě na sobě nezávislé studie, které byly následně publikovány v časopise *Physical Review Physics Education Research*. Novější z nich pochází z texaské univerzity a byla publikována v roce 2021. Cílem tohoto výzkumu bylo porovnat studijní výsledky účastníků úvodního kurzu fyziky v letech 2007 až 2019. Na základě výkonů více než 10 tisíc účastnic a účastníků nebylo prokázáno, že by studijní výsledky závisely na pohlaví [19].

Závěry amerických vědců je zajímavé porovnat s výsledky australské studie z roku 2016. Tato studie vychází z rozdílných výkonů žen a mužů na Australské fyzikální olympiádě. Vědci zjistili, že ačkoliv si ženy vedou stejně dobře v uvažování a matematických otázkách jako muži, existují oblasti, ve kterých vykazují dlouhodobě horší výkony. K rozdílu dochází například tehdy, když je úloha postavena na zkušenostech, které pravděpodobně zažili spíše muži [20]. Existuje studie [21], která zjistila, že muži mají lepší výkony ve vizuálně-prostorových úkolech a jsou tedy schopni lépe modelovat objekty pohybující se prostorem či pracovat s diagramy a obrázky. Tento závěr může vycházet z odlišného přístupu k dívkám a chlapcům již od jejich útlého dětství. To zahrnuje například rozdávání odlišných dárků či pohodlí oblečení. Chlapci dostávají hračky, které jsou výrazně spojené s pohybem, ať už podněcují k pohybu přímo chlapce (sportovní míče) nebo s ním aktivně pracují (vláčky, rakety, jeřáby apod.). Dívky nosí častěji oblečení, které brání v běhání, skákání a zapojování se do různých fyzických aktivit. Podle této studie bylo ale také zjištěno, že ženy lépe než muži zvládají verbální úkoly. Mohou tak více vynikat v diskuzích či interpretacích složitých textů. Například muži mají větší sklon ke ztrátě zájmu o problém, pokud je zadání textu příliš složité. Tyto dovednosti jsou určitě také velice důležité k tomu stát se dobrým fyzikem, ale už se na ně v hodinách fyziky či na fyzikálních soutěžích tolik neopeluje [20].

Je zajímavé poukázat i na to, v jakých oblastech fyziky se ženy více koncentrují. Jedná se především o obory, které mají blízko k lékařství, jako například biofyzika, dozimetrie, radiologická fyzika apod. Je to proto, že ženy mají přirozenou potřebu pečovat o druhé [22]. To může být také důvodem většího zastoupení žen v ostatních přírodovědných oborech jako je chemie či biologie, se kterými se častěji setkají v lékařství nebo příbuzných oborech. Kde jsou ženy výrazně méně zastoupeny, je oblast teoretické fyziky, která se považuje za jednu hlavních disciplín fyziky [22].

Studie, které zde uvádíme, byly provedené na vzorku žákyň a žáků ze dvou zahraničních států. Ačkoliv uvádí nový pohled na tuto problematiku, nižší zájem žen o studium fyziky může mít v různých státech odlišná odůvodnění ovlivněná společenskými, politickými či ekonomickými faktory. Určitě by bylo velmi užitečné provést rozsáhlejší

studie i na území České republiky. Pokud chceme zvýšit počet studentů studující fyzikální obory, ve kterém ženy téměř absentují, měli bychom se zaměřit právě na to, jak ženy k tomuto studiu správně motivovat.



# Kapitola 2

## Geografické informační systémy

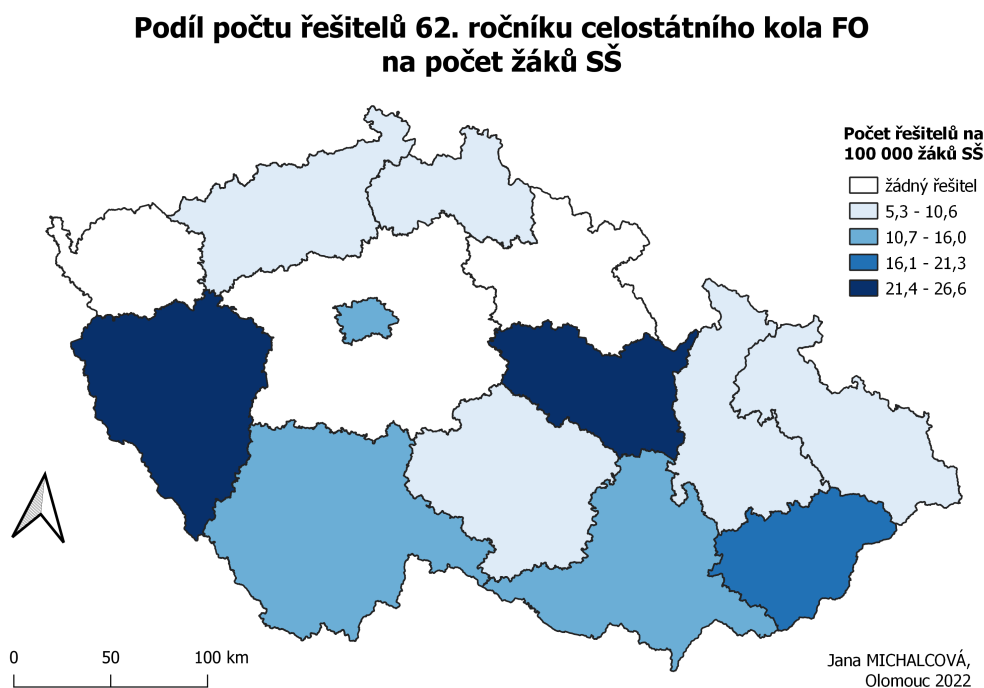
V dnešní době se k nám mimo jiné dostávají informace prostřednictvím *geografických informačních systémů* (zkr. GIS, z angl. Geographic Information System). GISy jsou nenahraditelným zdrojem informací jak ve veřejné, tak v soukromé správě. Jejich využití nalezneme například při znázornění volební účasti v krajích, při předpovědi počasí či evidenci majetku nemovitostí [23]. V poslední době jsme výstupy GISu nejvíce zaznamenali v souvislosti s pandemií covid-19, kdy jsme byli pravidelně informováni prostřednictvím map o vývoji počtu nakažených jak na území ČR, tak ve světě. Další uplatnění nalezneme u územního plánování, v dopravě či energetice, nebo například při mapování kriminality [23]. Vysvětlit pojem GIS není vůbec jednoduché. Definice, které tento pojem vysvětlují, existuje celá řada a navzájem se od sebe odlišují podle prostředí, ze kterého autoři pocházejí [24]. Jako autora výstižné a srozumitelné definice uvádíme P. A. Burrougha (1986): „*Geografický informační systém je souborem prostředků pro sběr, ukládání, vyhledávání, transformování a znázorňování prostorových dat z reálného světa s ohledem na speciální účely jeho použití.*“ Převzato z [23]. Pomocí GISu můžeme znázornit jak jevy kvalitativní, tak kvantitativní. Mezi nejčastější vyjadřovací prostředky kvantitativních jevů se řadí metoda *kartogramu* a *kartodiagramu*. V následujících podkapitolách se s těmito metodami blíže seznámíme.

### 2.1 Kartogram

Metoda *kartogramu* znázorňuje intenzitu jevu přepočtenou na jednotku plochy územního celku. Příkladem kartogramu tak může být: hustota zalidnění (počet obyvatel/km<sup>2</sup>), lesnatost (plocha lesních pozemků/km<sup>2</sup>) nebo hustota silniční sítě (délka silnic v km/km<sup>2</sup>). Na uvedených příkladech je vhodné poukázat na fakt, že kartogram vyjadřuje výhradně relativní hodnoty jevu. Absolutní hodnoty jevu znázorňujeme pomocí metody zvanou kartodiagram, kterou si popíšeme v následující podkapitole. Chybně bychom tedy kartogram použili například pro znázornění počtu obyvatel v krajích nebo počtu věřících v okresech [23]. Nesprávné je také využití kartogramu pro zjištění přesných relativních hodnot daného jevu. Kartogram rozděluje relativní hodnoty jevu do vhodných intervalů, které v mapě znázorníme pomocí odstínů barvy. Obecně platí, že čím vyšší je intenzita jevu, tím sytější barvou je území vyplněno. Jedná se tedy o mapový výstup, ze kterého lze porovnávat intenzitu daného jevu mezi vybranými územními celky. Kartogram tak může odpovědět na otázku Je hustota zalidnění v Karlovarském kraji větší než v Moravskoslezském kraji? Ovšem na otázku Jaká je přesná hustota zalidnění v Karlovarském kraji? už odpovědět ale nedokáže. Můžeme pouze konstatovat, v jakém intervalu hodnot se jeho hustota zalidnění nachází [25].

Kartogramy se dělí na pravé a nepravé. Kartogramy, které jsme si doposud popsali, nazývají kartografové jako „pravé“. Jedná se tedy o ty kartogramy, které vyjadřují intenzitu jevu přepočtenou na jednotku plochy. Často však potřebujeme pro správné pochopení jevu vztáhnout jeho hodnotu k jiné jednotce než plošné. V takovém případě hovoříme o tzv. nepravém kartogramu neboli *pseudokartogramu* (viz obr. 2.1). Příkladem takového kartogramu může být např. počet věřících k celkovému počtu obyvatelstva či počet nezaměstnaných z celkového počtu ekonomicky aktivního obyvatelstva [23].

Při tvorbě kartogramu je důležité ujasnit si, k čemu budeme daný jev vztahovat. To, jaký kartogram použijeme, totiž ovlivní celkovou povahu mapového výstupu. Můžeme si to vysvětlit na příkladu počtu řešitelů 62. ročníku Fyzikální olympiády. Pokud bychom chtěli vytvořit pravý kartogram, pak bychom museli počet řešitelů vztáhnout na jednotku plochy, například na rozlohu jednotlivých krajů. Informaci, kterou bychom z této mapy mohli získat je, který z krajů má největší počet řešitelů na 100 000 km<sup>2</sup>. Jelikož se jednotlivé kraje od sebe liší jednak rozlohou, tak i počtem obyvatel, nemá pro v našem případě tento typ kartogramu velký význam. Pro náš případ je tedy vhodnější vytvořit nepravý kartogram a vztáhnout počty řešitelů na počet žáků SŠ v jednotlivých okresech (obr. 2.1).

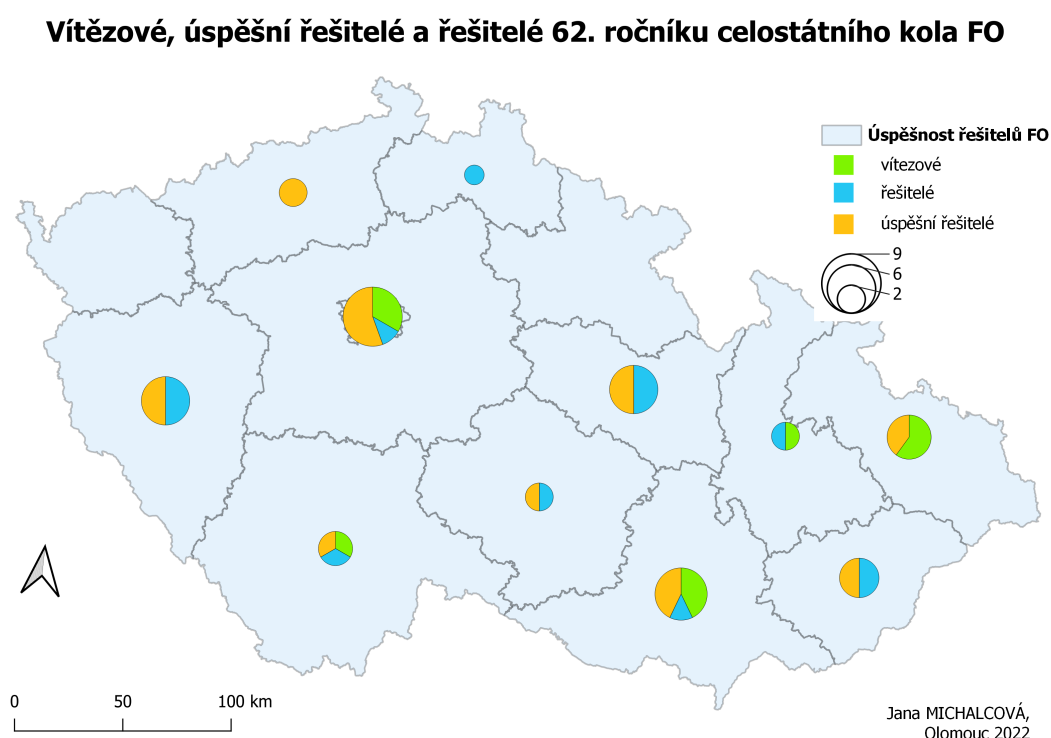


Obrázek 2.1: Podíl počtu řešitelů 62. ročníku celostátního kola FO na počet žáků SŠ

Tato mapa má pro nás mnohem větší výpovědní hodnotu, protože porovnává, kolik řešitelů z celkového počtu žáků SŠ daného kraje se zúčastnilo 62 ročníku celostátního kola Fyzikální olympiády.

## 2.2 Kartodiagram

*Kartodiagram* společně s kartogramem řadíme mezi nejvýznamnější kartografické vyjadřovací prostředky. Dle Kaňoka (1999) lze kartodiagram definovat následovně: „*Kartodiagram je mapa s dílčími územními celky, do kterých jsou pomocí diagramů znázorněna statistická data (absolutní hodnoty) většinou geografického charakteru.*“ Kartodiagram se tedy oproti kartogramu odlišuje hlavně tím, že zobrazuje jevy v absolutních hodnotách, a to pomocí diagramů. Někdy se také hovoří o tzv. *diagramových mapách* [26]. S kartodiagramem se můžeme setkat například při znázornění podílu jednotlivých volebních stran na získaných hlasech ve volbách do zastupitelstev v jednotlivých krajích nebo například při znázornění energetického mixu států Evropy. Jako příklad kartodiagramu uvádíme zastoupení vítězů, úspěšných řešitelů a řešitelů 62. ročníku celostátního kola FO (obr. 2.2).



Obrázek 2.2: Vítězové, úspěšní řešitelé a řešitelé 62. ročníku celostátního kola FO

# Kapitola 3

## Analýza vlastností soutěžních ročníků celostátního kola FO

Při zjišťování kvality didaktického testu se posuzují vlastnosti jednotlivých položek testu a vlastnosti testu jako celku. K zadání soutěžních kol Fyzikální olympiády můžeme přistupovat jako ke speciální formě testu, a tudíž budeme využívat stejné charakteristiky. Podrobným popisem jednotlivých vlastností didaktického testu a jejich vysvětlením na konkrétních příkladech jsme se zabývali v bakalářské práci s názvem *Analýza vlastností souboru úloh vybraných ročníků Fyzikální olympiády*. Analýzu úloh celostátního kola jsme provedli za 17leté období, od 46. do 62. ročníku. Výsledkové listiny jsou dostupné na oficiálních stránkách soutěže [www.fyzikalniolympiada.cz](http://www.fyzikalniolympiada.cz).

### 3.1 Analýza vlastností jednotlivých soutěžních úloh

V rámci položkové analýzy jsme zjišťovali obtížnost položky, citlivost položky a analýzu nenormovaných odpovědí. *Obtížnost úlohy* jsme stanovili pomocí indexu obtížnosti  $P$ , který udává procentuální zastoupení žáků, kteří úlohu vypočetali správně vzhledem k celkovému počtu testovaných. Čím vyšší je hodnota indexu obtížnosti, tím je obtížnost položky menší. Jelikož početní úlohy ve FO mohou být ohodnoceny od 0 do 10 bodů a praktické od 0 do 20, lze obtížnost úlohy vypočítat pomocí tzv. *obecného indexu obtížnosti*, který se využívá u položek s váženým skórováním. Obecný index obtížnosti lze vyjádřit vztahem:

$$P = \frac{\bar{x}}{x_m} \cdot 100, \quad (3.1)$$

kde  $\bar{x}$  je aritmetický průměr získaných bodů ze všech testovaných a  $x_m$  je maximální možný počet bodů, který lze za danou úlohu získat.

*Citlivost položky* je vlastnost úlohy, která rozlišuje mezi výsledky žáků s lepšími a horšími vědomostmi. Cílem každé úlohy je dosáhnout, co nejvyšší citlivosti. Pro položky s váženým skórováním, lze citlivost vypočítat pomocí *Pearsonova korelačního koeficientu*, který je dán vztahem:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(h_i - \bar{h})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}}, \quad (3.2)$$

kde  $x_i$  je bodový zisk dané položky  $i$ -tého testovaného,  $\bar{x}$  je bodový průměr dosažený v položce,  $h_i$  je bodový zisk  $i$ -tého testovaného v celém testu a  $\bar{h}$  je bodový průměr

dosažený v celém testu. Platí, že s rostoucí hodnotou Pearsonova koeficientu roste i citlivost položky.

Vedle obtížnosti a citlivosti položky jsme se zaměřili také na analýzu nenormovaných odpovědí. Jedná se o rozbor úloh, ze kterých žáci získali nulový bodový zisk a lze jej jednoduše vyjádřit v relativních hodnotách [27]. Rozmezí hodnot, ve kterých by se měly vlastnosti položek pohybovat jsou znázorněny v tab 3.1.

Tabulka 3.1: Vyhovující hodnoty vlastností položek, převzato z [27]

vlastnost položky	vyhovující parametr
index obtížnosti $P$	30 – 90 %
Pearsonův korelační koeficient	> 0,4
analýza nenormovaných odpovědí	< 30 %

Při určení rozmezí Pearsonova korelačního koeficientu a analýzy nenormovaných odpovědí jsme vycházeli z publikace [28]. Pro stanovení vyhovujícího intervalu obtížnosti jsme zvolili rozmezí z publikace [29]. Jak jsme již vysvětlili v práci [27]: „Pro naše účely je totiž toto rozmezí nejvhodnější. Úlohami o hodnotách blížící se k 90 % můžeme žáky motivovat k řešení dalších příkladů. Zároveň by nemělo být cílem úlohy, aby úspěšnost vyřešení klesla pod 30 %.” Výsledky položkové analýzy jsou znázorněny v tab. 3.2.

Tabulka 3.2: Výsledky vlastností položek

ročník	úloha	Index obtížnosti $P$ [%]	Pearsonův koeficient	Nenormované odpovědi [%]	vyhovuje/ nevyhovuje
FO62	A3-1	24	0,79	40	nevyhovuje
	A3-2	40	0,67	34	vyhovuje
	A3-3	46	0,37	2	nevyhovuje
	A3-4	42	0,70	17	vyhovuje
	A3-E	62	0,75	0	vyhovuje
FO61	A3-1	56	0,83	21	vyhovuje
	A3-2	89	0,16	0	nevyhovuje
	A3-3	33	0,66	18	vyhovuje
	A3-4	64	0,71	0	vyhovuje
	A3-E	69	0,62	3	vyhovuje
FO60	A3-1	69	0,53	0	vyhovuje
	A3-2	35	0,76	24	vyhovuje
	A3-3	50	0,74	0	vyhovuje
	A3-4	48	0,60	14	vyhovuje
	A3-E	65	0,53	0	vyhovuje
FO59	A3-1	63	0,46	6	vyhovuje
	A3-2	34	0,49	0	vyhovuje
	A3-3	32	0,63	32	vyhovuje
	A3-4	52	0,69	6	vyhovuje
	A3-E	36	0,60	6	vyhovuje

FO58	A3-1	70	0,67	2	vyhovuje
	A3-2	76	0,68	0	vyhovuje
	A3-3	23	0,74	33	nevyhovuje
	A3-4	61	0,57	2	vyhovuje
	A3-E	78	0,76	0	vyhovuje
FO57	A3-1	22	0,64	46	nevyhovuje
	A3-2	50	0,66	10	vyhovuje
	A3-3	39	0,71	31	vyhovuje
	A3-4	71	0,64	0	vyhovuje
	A3-E	64	0,62	0	vyhovuje
FO56	A3-1	41	0,71	11	vyhovuje
	A3-2	77	0,46	0	vyhovuje
	A3-3	48	0,68	0	vyhovuje
	A3-4	42	0,78	36	vyhovuje
	A3-E	72	0,78	4	vyhovuje
FO55	A3-1	50	0,63	13	vyhovuje
	A3-2	85	0,62	2	vyhovuje
	A3-3	40	0,46	0	vyhovuje
	A3-4	61	0,71	4	vyhovuje
	A3-E	66	0,71	0	vyhovuje
FO54	A3-1	84	0,61	0	vyhovuje
	A3-2	63	0,70	16	vyhovuje
	A3-3	31	0,64	42	nevyhovuje
	A3-4	39	0,58	18	vyhovuje
	A3-E	62	0,61	0	vyhovuje
FO53	A3-1	38	0,72	10	vyhovuje
	A3-2	71	0,51	8	vyhovuje
	A3-3	54	0,64	10	vyhovuje
	A3-4	51	0,68	0	vyhovuje
	A3-E	58	0,64	0	vyhovuje
FO52	A3-1	49	0,77	12	vyhovuje
	A3-2	44	0,85	12	vyhovuje
	A3-3	51	0,74	10	vyhovuje
	A3-4	69	0,63	2	vyhovuje
	A3-E	86	0,71	0	vyhovuje
FO51	A3-1	49	0,74	0	vyhovuje
	A3-2	25	0,79	48	nevyhovuje
	A3-3	54	0,72	13	vyhovuje
	A3-4	65	0,66	0	vyhovuje
	A3-E	62	0,56	0	vyhovuje

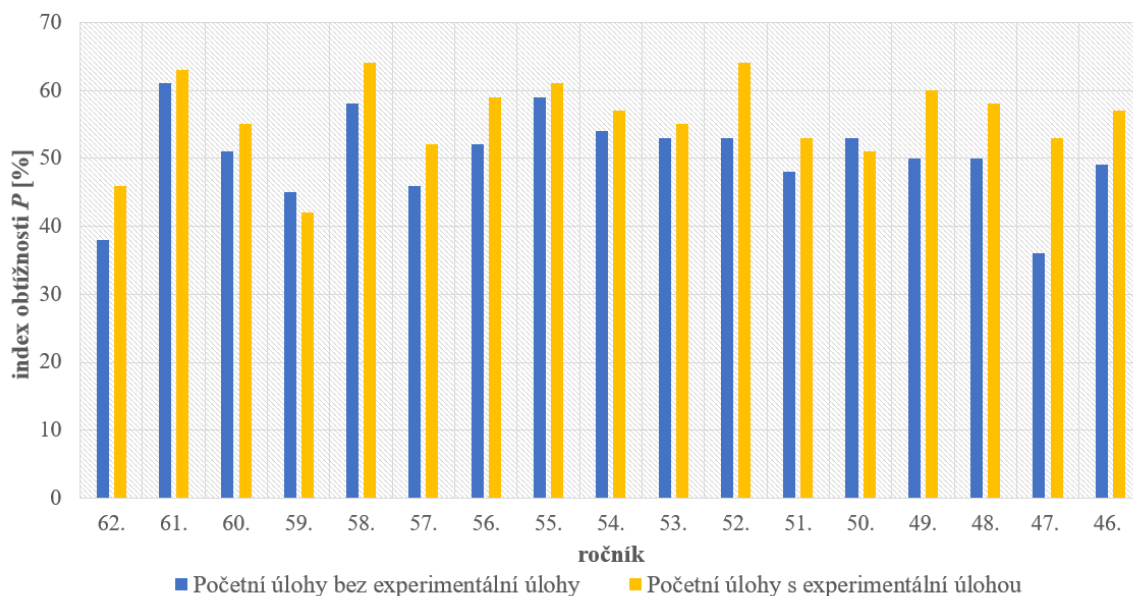
FO50	A3-1	56	0,69	4	vyhovuje
	A3-2	54	0,69	4	nevyhovuje
	A3-3	70	0,55	2	vyhovuje
	A3-4	31	0,63	28	vyhovuje
	A3-E	48	0,76	0	vyhovuje
FO49	A3-1	51	0,69	2	vyhovuje
	A3-2	49	0,66	27	vyhovuje
	A3-3	54	0,74	2	vyhovuje
	A3-4	45	0,72	7	vyhovuje
	A3-E	82	0,59	0	vyhovuje
FO48	A3-1	57	0,59	8	vyhovuje
	A3-2	58	0,63	2	vyhovuje
	A3-3	21	0,72	61	vyhovuje
	A3-4	62	0,64	12	vyhovuje
	A3-E	73	0,74	0	vyhovuje
FO47	A3-1	22	0,73	20	nevyhovuje
	A3-2	46	0,71	0	vyhovuje
	A3-3	20	0,8	53	nevyhovuje
	A3-4	55	0,66	22	vyhovuje
	A3-E	87	0,27	0	nevyhovuje
FO46	A3-1	37	0,76	25	vyhovuje
	A3-2	41	0,76	11	vyhovuje
	A3-3	69	0,56	7	vyhovuje
	A3-4	48	0,69	7	vyhovuje
	A3-E	74	0,69	0	vyhovuje

Z tabulky vyplývá, že z celkových 68 početních úloh nevyhovuje naším kritériím 11 z nich, tedy 16 %. Pozornost bychom měli věnovat především 47. ročníku, u kterého nevyhovují tři úlohy z pěti, dvě početní a úloha experimentální. Průměrný index obtížnosti u početních úloh je v tomto roce za uvažované období nejnižší a činí pouhých 36 %. Můžeme tedy usuzovat, že v tomto roce měli žáci s řešením příkladů největší obtíže. Nejvíce problémová byla úloha FO47A3-3 s názvem Periodické dobíjení kondenzátoru, u které vyšel index obtížnosti pouhých 20 % a relativní podíl nenormovaných odpovědí 53 %. Druhou nejobtížnější úlohou za celé období byla úloha FO48A3-3 s názvem Nabíječka a stejně jako FO47A3-3 se řadí do učiva střídavého proudu. U této položky vyšla hodnota indexu obtížnosti 21 % a relativní počet nenormovaných odpovědí dokonce 61 %. Za celé období byly tyto dvě úlohy jediné, za které získala více než polovina řešitelů nulový počet bodů.

Za zmínku stojí také úloha FO61A3-2, která má sice nejvyšší index obtížnosti za celé období ( $P = 89\%$ ) a nulový počet nenormovaných odpovědí, ale přesto ji řadíme mezi úlohy nevyhovující. V této úloze s názvem Supertěžká voda vyšla hodnota Pearsonova korelačního koeficientu 0,16. Přestože je tato hodnota nižší než mezních 0,4, pořád se nachází v kladných hodnotách, a tak (ačkoliv minimálně), zvýhodňuje žáky s lepšími výsledky testu [28]. Důvodem nízkého koeficientu citlivosti může být právě nízká obtížnost úlohy. Žáky s lepšími vědomostmi mohla jednoduchost příkladu zmást do té míry, že v ní začali hledat složitosti.

Z tabulky můžeme dále vyčíst, že kromě experimentální úlohy ze 47. ročníků, mají

ostatní praktické úlohy hodnoty v určených intervalech. Všechny experimentální úlohy mají také nulový nebo téměř nulový počet nenormovaných odpovědí, který se odráží i na vyšších hodnotách indexu obtížnosti. Ty se pohybují od 36 do 87 % a jejich průměrná hodnota za celých 17 let činí 65 %. Z bližšího zkoumání tabulky si můžeme všimnout, že většina experimentálních úloh má index obtížnosti vyšší než úlohy početní. To je zřejmé také z grafu na obr. 3.1, na kterém porovnááme průměrné hodnoty indexu obtížnosti jednotlivých ročníků bez praktické úlohy a s ní.



Obrázek 3.1: Průměrný index obtížnosti za jednotlivé ročníky s a bez započtení experimentální úlohy

Z grafu lze vyčíst, že kromě dvou ročníků (59. a 50.), je průměrný index obtížnosti ročníků vždy vyšší při započtení experimentální úlohy, a to průměrně o 6 %. Můžeme tedy usuzovat, že pro řešitele FO je jednodušší praktická část soutěže než početní. Většina hodnot z grafu se nachází poblíž 50 %, což je podle [28] neoptimálnější hodnota obtížnosti. Pokud k průměrnému indexu obtížnosti nezapočítáme praktické úlohy, nejvíce obtížným ročníkem je zmíněný 47. ročník a nejméně obtížný ročník 61. Po přičtení praktické úlohy je nejlhčí ročník 52. a nejobtížnější 59.

## 3.2 Analýza vlastností soutěžních ročníků jako celku

Mezi nejdůležitější vlastnosti didaktického testu jako celku se řadí *validita* (platnost) a *reliabilita* (spolehlivost a přesnost). Jelikož k posouzení validity nemáme potřebné informace (míra hluchosti okolního prostředí, psychický stav uchazečů apod.), budeme se v této podkapitole zabývat pouze stanovením reliability. Tu jsme určili pomocí Cronbachova  $\alpha$ . Dle [27] lze Cronbachova  $\alpha$  popsat následovně: „Tento koeficient určuje reliabilitu jako vnitřní homogenitu (konzistenci) testu. Jednoduše řešeno: čím vyšší je hodnota Cronbachova  $\alpha$ , tím více jsou výsledky žáků srovnatelné. U testů s malým počtem otázek by měla reliabilita nabývat minimální hodnoty 0,6.” Tato metoda určení spolehlivosti se aplikuje v případě, kdy nejsou k dispozici výsledky dvou podobných či stejných testů, které žáci řeší v krátkém časovém intervalu za sebou [27]. Výpočet



Cronbachova  $\alpha$  lze vyjádřit vztahem:

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^k s_{x_i}^2}{s_h^2} \right), \quad (3.3)$$

kde  $k$  je počet položek v testu,  $s_{x_i}^2$  je rozptyl bodů z  $i$ -té položky a  $s_h^2$  je rozptyl celkového počtu bodů z testu [30].

Protože lze za početní a praktickou úlohu získat odlišný maximální počet bodů a navíc jsou realizované v odlišný den, vypočítali jsme koeficient pouze pro početní část testu. Hodnoty Cronbachova  $\alpha$  jsou znázorněny v tab. 3.3.

Tabulka 3.3: Hodnoty Cronbachova  $\alpha$  pro jednotlivé ročníky

Ročník	Cronbachovo $\alpha$
62.	0,60
61.	0,61
60.	0,61
59.	0,59
58.	0,65
57.	0,61
56.	0,66
55.	0,57
54.	0,61
53.	0,57
52.	0,77
51.	0,74
50.	0,61
49.	0,67
48.	0,57
47.	0,71
46.	0,72

Z tabulky vyplývá, že většina úloh vyhovuje našim kritériím. Výsledky ukazují, že nejvyšší hodnotu Cronbachova  $\alpha$  má 52. ročník,  $\alpha = 0,77$ . To znamená, že žáci v úlohách získali srovnatelná bodová ohodnocení. Naopak nejnižší hodnotu vnitřní konzistence úloh  $\alpha = 0,57$  nalezneme u tří ročníků 48., 53. a 55. Tento výsledek se však velmi blíží mezní hodnotě 0,6, tudíž pořád hovoříme o tzv. homogenitě testu. Všimněme si, že většina úloh nabývá hodnot blízkých 0,6. Nižší hodnoty jsme v práci [27] vysvětlili následovně: „Nízké hodnoty Cronbachova  $\alpha$  jsou v rámci předmětu Fyzika pochopitelné. Musíme si uvědomit, že fyzika je rozsáhlá exaktní věda, která zkoumá rozmanité zákonitosti přírodních jevů. Každý řešitel tak může preferovat jinou oblast této vědy”.

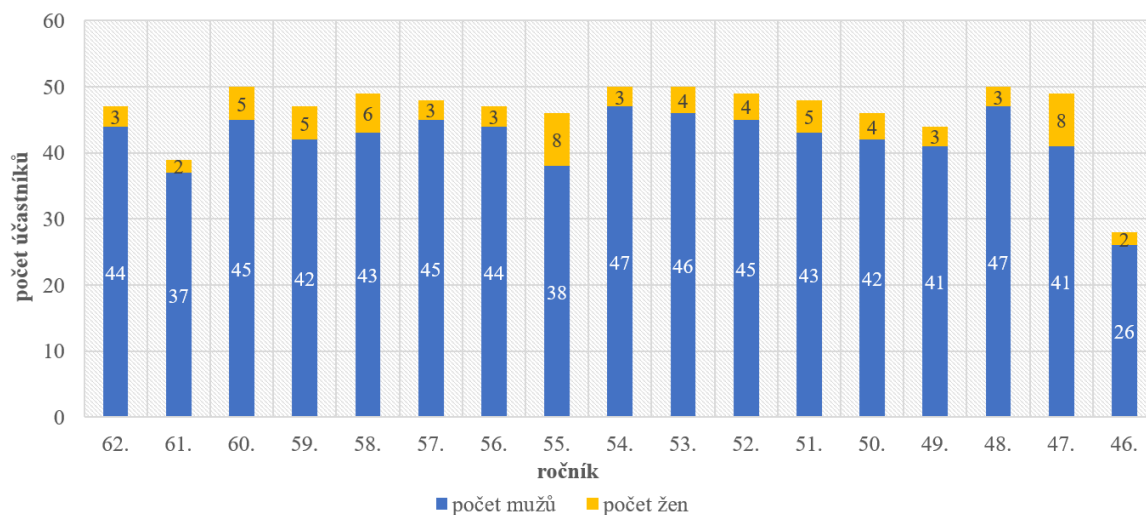
# Kapitola 4

## Analýza zastoupení účastníků celostátních kol FO

Po ukončení celostátního kola jsou výsledky zveřejňovány na oficiálních stránkách soutěže. Zde jsou k jednotlivým pořadím přiřazena jména řešitelů s bodovým ohodnocením z jednotlivých úloh a názvem školy či alespoň okresu, ze kterého uchazeči pocházejí. Účastníci se mohou také dozvědět, jestli se umístili mezi vítězi, úspěšnými řešiteli či řešiteli. Rozhodli jsme se, že v rámci této práce by bylo zajímavé provést také statistický rozbor týkající se zastoupení účastníků, a to jak v čase, tak v prostoru.

### 4.1 Vývoj účastníků v čase

V rámci této podkapitoly jsme se především zabývali otázkami: Měnil se vývoj účastníků v čase? Jaký je podíl žen a mužů v jednotlivých ročnících?



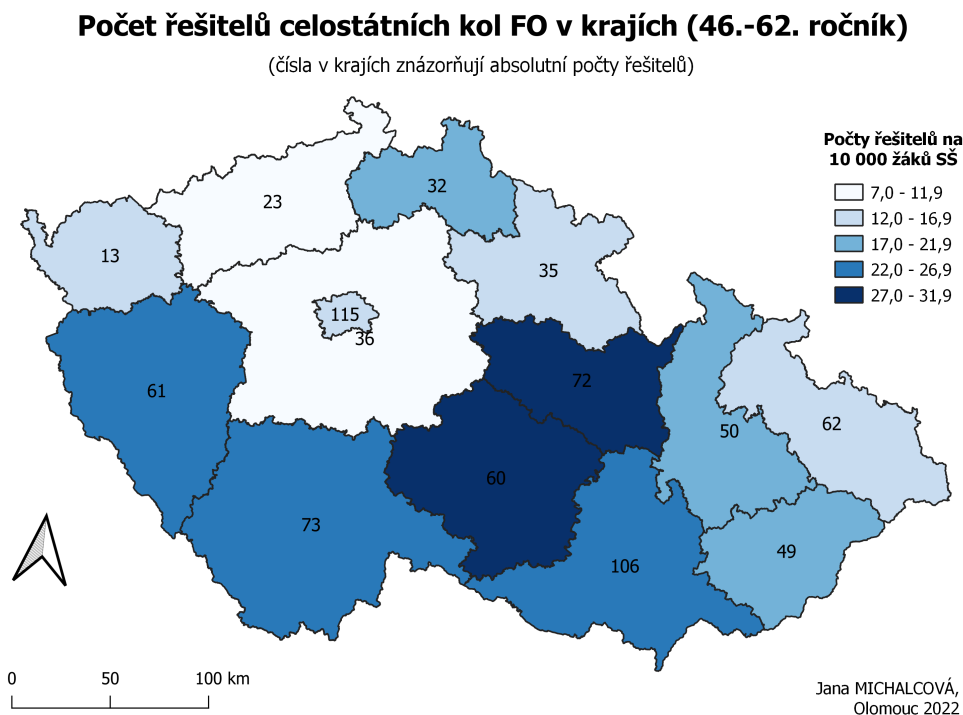
Obrázek 4.1: Počet žen a mužů na celostátním kolo FO

Z grafu můžeme vyčíst, že v průběhu let se počet uchazečů výrazně neměnil. Většinou se účast blížila k 50 řešitelům. Nejmenší účast (28 řešitelů) můžeme zpozorovat u 46. ročníku. Z grafu je dále patrné, že zastoupení žen je v každém roce výrazně nižší než zastoupení mužů. Za období 17 let se podíl žen pohybuje v rozmezí od 5% do 17% a průměrně činí pouhých 9%. Tyto hodnoty nás nijak nepřekvapily. Jak jsme již

zmínili v teoretické části, nižší podíl žen ve fyzikálních soutěžích i na pracovištích není pouze záležitostí České republiky, ale jedná se o celosvětový fenomén.

## 4.2 Zastoupení účastníků v rámci krajů a okresů

V této podkapitole se zabýváme prostorovým zastoupením uchazečů celostátního kola za období 17 let (od 46.-62. ročníku). Pro větší názornost jsou data znázorněna pseudokartogramem prostřednictvím softwaru GIS.



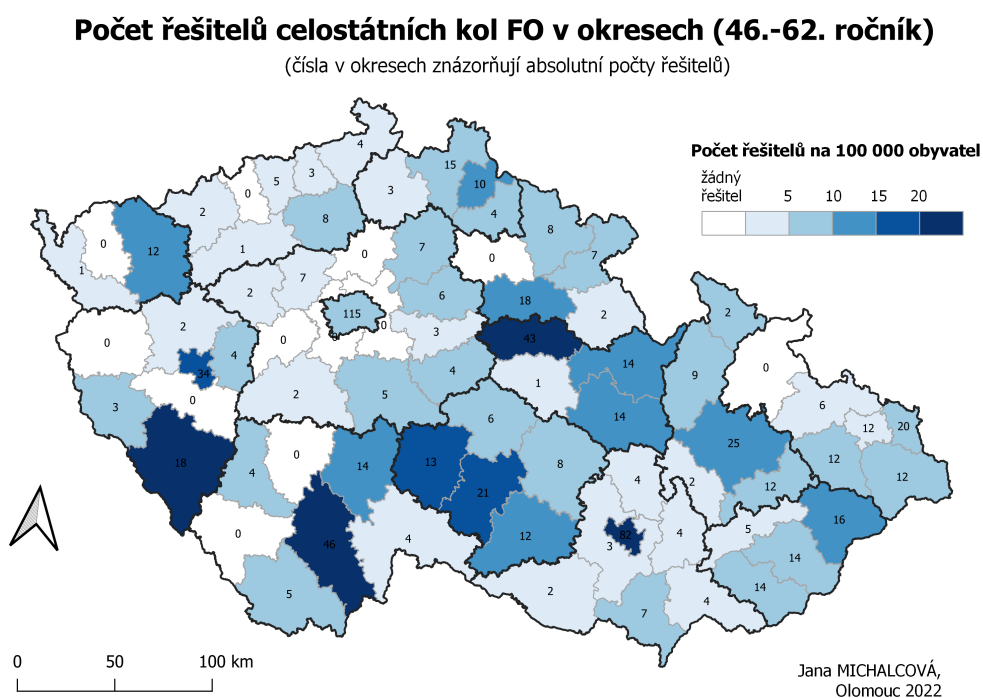
Obrázek 4.2: Počet řešitelů celostátních kol FO v krajích od 46. do 62. ročníku

Pokud se podíváme na mapu, je zřejmé, že největší počet účastníků pochází z Hlavního města Prahy (115) a nejmenší z Karlovarského kraje (13). Tyto údaje pro nás však nemají dostatečnou výpovědní hodnotu, protože v krajích žije odlišný počet obyvatel, a tím pádem i odlišný počet žáků SŠ. Abychom zjistili, které kraje posílají ze svých lavic na FO větší podíl žáků, vztáhli jsme počet účastníků právě k počtu žáků SŠ. Data jsme přepočítali ke školnímu roku 2020/2021, jelikož údaje o počtu žáků SŠ jsou na stránkách Českého statistického úřadu dostupné pouze za období deseti let. Přestože během těchto let docházelo ke změně počtu žáků SŠ, na mapovém výstupu se to projeví pouze minimálně. Za posledních 10 let došlo za všechny kraje k průměrnému snížení o necelých 19 %. U většiny krajů byl klesající trend podobný až na dva kraje, Hlavní město Praha (-2,7 %) a Karlovarský kraj (-29,2 %) [31]. Můžeme usoudit, že změny by se mohly projevit právě v těchto krajích, ale ne natolik, aby to změnilo celkový charakter mapy.

Z mapy lze také vyčíst, že největší počet řešitelů na 10 000 žáků SŠ má kraj Vysočina a Pardubický kraj. Naopak nejmenší podíl nalezneme u Středočeského a Ústeckého kraje, kde jsou hodnoty až čtyřikrát menší oproti zmíněným dominujícím krajům.

Rozdíly mezi kraji nejsou žádným překvapením. V České republice dochází k velké diferenciaci v kvalitě škol mezi jednotlivými regiony. Z výsledků mezinárodního šetření PISA z roku 2015 vyplývá, že v přírodovědecké gramotnosti jsou výsledky nejlepších krajů, jako například Hlavní město Praha, srovnatelné s výsledky vyspělých států západní Evropy. Na druhé straně nejhorší výsledky se pohybují na úrovni zemí jako je Bulharsko a Malajsie. Mezi tyto kraje patří Karlovarský a Ústecký kraj. Rozdíly mezi kraji jsou ovlivněné především nerovností v ekonomice a sociálními problémy uvnitř regionů [32]. Například v chudších krajích nedosáhne na střední vzdělání přibližně 17% dětí, u bohatších krajů se čísla pohybují mezi 2–4% [33]. Rozdílu napomáhá také nižší kvalifikovanost učitelů v některých krajích, především v Karlovarském, Ústeckém a Středočeském [34]. Mladí lidé si pro pedagogické studium vybírají kvalitnější vysoké školy v ostatních krajích a nemají pak motivaci vracet se zpátky. Odliv nadaných mladých lidí můžeme pozorovat i u žáků středních škol ve Středočeském kraji, kteří se často rozhodnou dojet za studiem do hlavního města.

Je také zajímavé porovnat účast řešitelů FO mezi jednotlivými okresy. Jelikož jsou údaje o počtu žáků SŠ k dispozici pouze na krajské úrovni, vztáhli jsme počty uchazečů k počtu obyvatel v jednotlivých okresech za rok 2021.



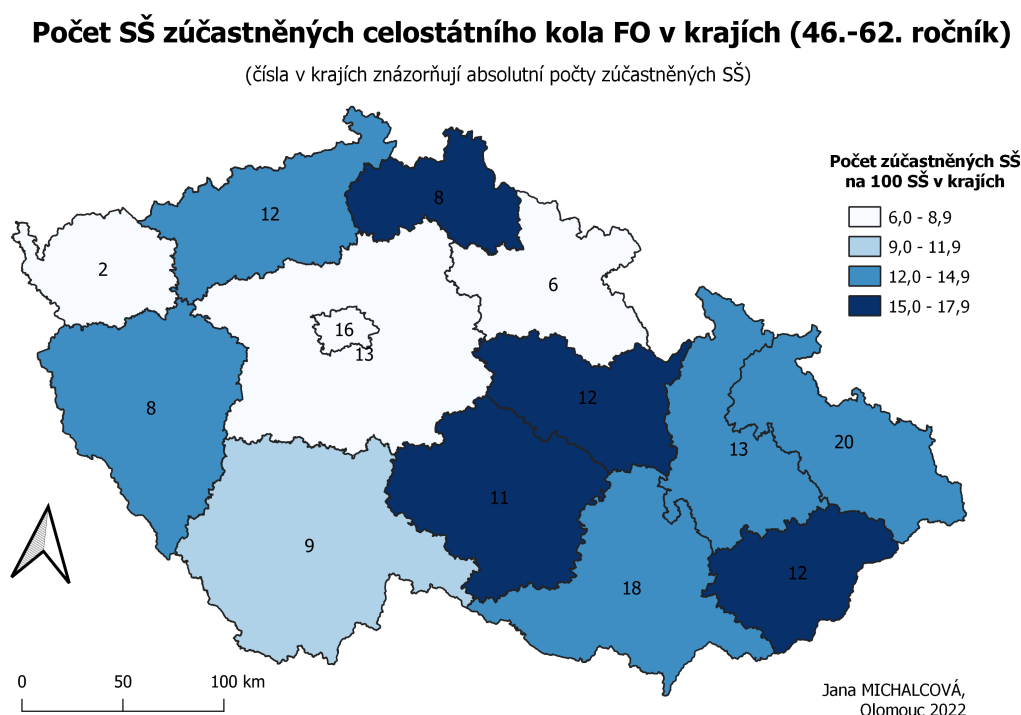
Obrázek 4.3: Počet řešitelů celostátních kol FO v okresech ČR od 46. do 62. ročníku

Jak dokládají čísla na mapě (obr.4.3), největší počet řešitelů na 100 000 obyvatel se nachází v okresech: Pardubice, Brno-město, České Budějovice a Klatovy. Z mapy je dále patrné, že ve 12 okresech se celostátního kola za celých 17 let neúčastnil ani jeden řešitel FO. Jedná se především o chudší okresy (např. Bruntál či Most) nebo okresy s nižším počtem obyvatel a menším výběrem středních škol (Prachatice, Písek, Tachov). Všimněme si také, že mezi okresy s nulovým počtem účastníků se nacházejí všechny okresy, které přiléhají k okresu Hlavní město Praha. Větší podíly uchazečů můžeme

zpozorovat u okresů s městy nad 80 tisíc obyvatel. Jediný okres, který překvapivě toto pravidlo nepotvrzuje, je Ostrava-město, přestože je zde mnoho kvalitních gymnázií a kvalifikace učitelů se v Moravskoslezském kraji řadí mezi jednu z nejvyšších [34].

### 4.3 Zastoupení SŠ v rámci krajů

Otázky, kterými jsme se z hlediska prostoru dále zabývali, byly následující: Jaký je počet škol v jednotlivých krajích, které posílají do celostátního kola své žáky? Jaký je podíl zúčastněných škol vzhledem k počtu SŠ, které se v kraji nacházejí? Výsledky našeho bádání jsou zobrazeny v mapě na obr. 4.4.



Obrázek 4.4: Počet SŠ zúčastněných celostátního kola FO v krajích od 46. do 62. ročníku

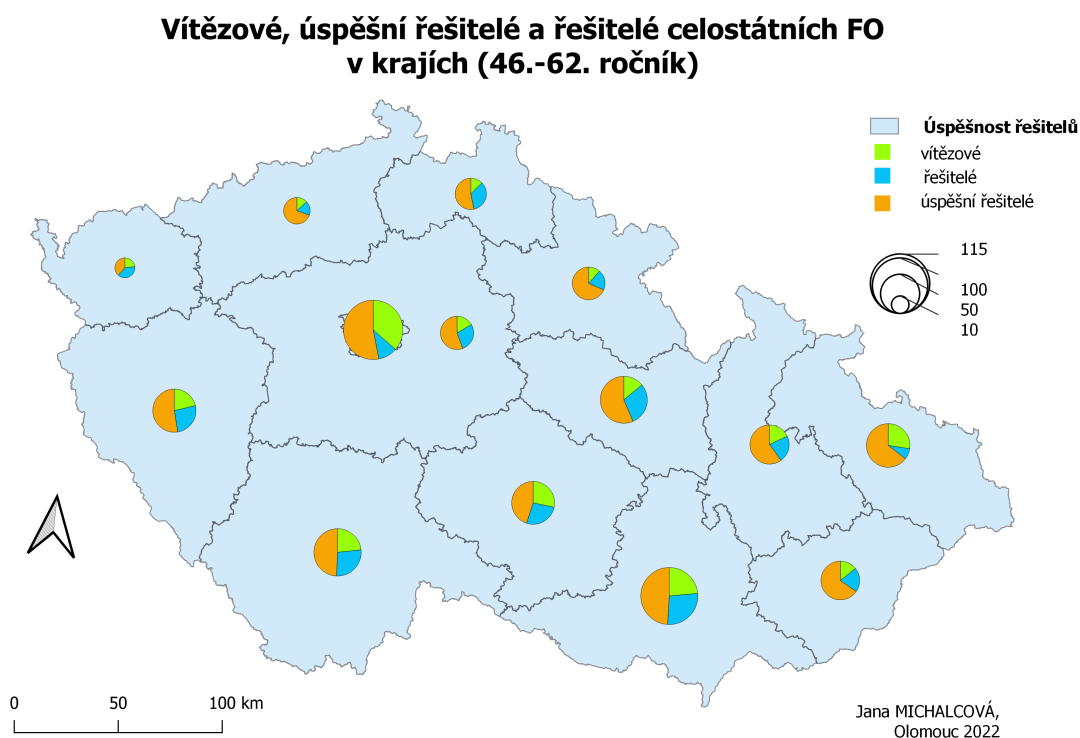
Mapa ukazuje, že největší podíl zapojených škol do celostátního kola FO k celkovému počtu SŠ má Pardubický, Zlínský, Liberecký kraj a kraj Vysočina. Nejmenší poměr nalezneme u Hlavního města Prahy, Středočeského, Královéhradeckého a Karlovarského kraje. Opět tedy uvádíme převážně stejné regiony. Určitě bychom měli upozornit především na Karlovarský kraj, kde se za celou dobu zúčastnili žáci pouze ze dvou škol. Pokud se však blíže podíváme na mapu y, zjistíme že škola z okresu Cheb se zúčastnila jen jednou. Karlovarský kraj na celostátním kole FO zastupovalo především První české gymnázium v Karlových Varech.

Jakmile se podíváme na výsledkové listiny celostátních kol, velmi brzy zjistíme, že jsou zde školy, jejichž žáci se účastní Fyzikální olympiády prakticky každý rok. Můžeme s jistotou konstatovat, že se jedná o školy, které pečují o fyzikální talenty a bez jejichž zapojení by Fyzikální olympiáda postrádala mnoho nadšených řešitelů. Školy s počtem uchazečů jsou znázorněné v tab. 4.1.

Tabulka 4.1: Školy s největším počtem řešitelů celostátního kola (46. - 62. ročník)

Škola	Počet uchazečů (46. - 62. ročník)
Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše	59
Gymnázium Pardubice, Dašická	42
Gymnázium Jana Keplera, Parlářova	36
Gymnázium Jírovcova	28
Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská	24
Gymnázium Jihlava, J. Masaryka	20
Gymnázium Plzeň, Mikulášské náměstí	20
Gymnázium Jaroslava Vrchlického, Klatovy	17

Výsledky žáků mezi jednotlivými školami jsme neporovnávali. Zaměřili jsme se ale na úspěšnost účastníků v rámci krajů. Výsledkem našeho zkoumání je mapový výstup na obr. 4.5, kde jsou znázorněny pomocí kartodiagramu podíly vítězů, úspěšných řešitelů a řešitelů. Můžeme si všimnout, že ačkoliv je úspěšnost účastníků mezi kraji srovnatelná, nejvyšší podíl vítězů ze svých žáků má Hlavní město Praha.



Obrázek 4.5: Úspěšnost účastníků celostátních kol FO od 46. do 62. ročníku

# Kapitola 5

## Sbírka úloh celostátních kol Fyzikální olympiády

Tato sbírka je tvořena úlohami celostátních kol Fyzikální olympiády za 17leté období, od 46. do 62. ročníku. Úlohy jsou seřazeny podle témat na základě obsahu sbírek Karla Barušky ([35], [36], [37], [38]). Většina úloh je postavena na ucelených znalostech fyziky, a tak je lze zařadit do více oblastí fyziky. V takovém případě jsme úlohy přiřadili k takovému tématu, který je v úloze ohodnocen nejvyšším počtem bodů nebo se v rámci učebních osnov vyučuje jako poslední. Úloha FO60A3-3 s názvem Dvakrát je rozdělena do jednotlivých podotázek, které jsou přiřazené samostatně k tématickým celkům.

Každá úloha je označena ročníkem, pořadím úlohy v ročníku, názvem úlohy a indexem obtížnosti  $P$ . Úlohy jsou v rámci témat seřazeny podle rostoucí obtížnosti, od nejvyššího indexu obtížnosti po nejnižší. Pokud má úloha index obtížnosti menší než 30 %, považuje se za velmi obtížnou a ve sbírce je označena vykřičníkem v závorkách (!).

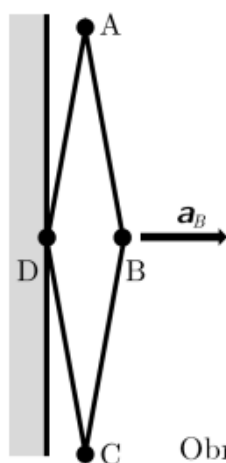
## 5.1 Mechanika

### 5.1.1 Kinematika

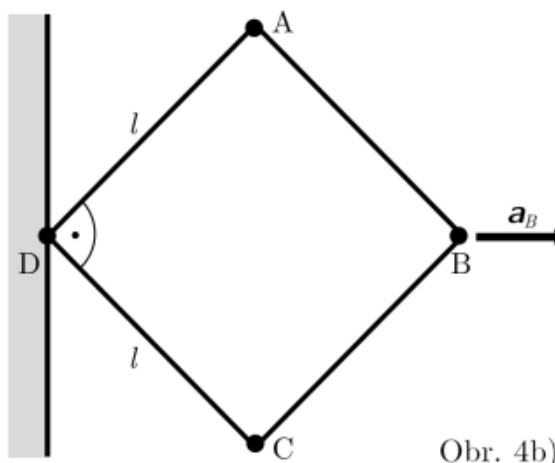
#### 1. FO61A3-4: Pohyb kosočtverce

[64 %]

Kosočtverec ABCD se skládá ze čtyř pevných ramen délky  $l$  spojených klouby zanedbatelných rozměrů, které umožňují měnit úhly mezi rameny, ale ramena přitom zůstávají v jedné rovině. Kosočtverec je v bodě D upevněn a na počátku se bod B nachází těsně vedle bodu D (obr. 4a). Nechť se bod B nyní pohybuje s konstantním zrychlením o velikosti  $a_B$  vpravo. Určete velikosti a směry rychlostí a zrychlení bodů A, B a C v okamžiku, kdy má kosočtverec tvar čtverce (obr. 4b)



Obr. 4a)



Obr. 4b)

#### Řešení

Bod B se pohybuje se zrychlením velikosti  $a_B$  a v daném okamžiku se nachází ve vzdálenosti  $l\sqrt{2}$  od počáteční polohy. Má tedy rychlost o velikosti

$$v_B = \sqrt{2a_B l\sqrt{2}} = 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{a_B l}, \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

jejíž směr je stejný jako směr zrychlení  $a_B$ .

Protože jsou ramena kosočtverce pevná, pohybuje se bod A po části kružnice s poloměrem  $l$ . Protože ve směru pohybu bodu B urazí bod A vždy poloviční vzdálenost, mají jeho rychlost a zrychlení v tomto směru poloviční velikosti,

$$v_{\parallel} = \frac{v_B}{2} = 2^{-\frac{1}{4}} \sqrt{a_B l},$$
$$a_{\parallel} = \frac{a_B}{2}.$$

Směr rychlosti bodu A je vždy kolmý ke směru DA. V daném okamžiku tento směr splývá se směrem AB. Jeho celková rychlost  $v_A$  má tak velikost

$$v_A = \frac{\frac{v_B}{2}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{2^{-\frac{1}{4}} \sqrt{a_B l}}{2^{-\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{a_B l}.$$

**3 body**



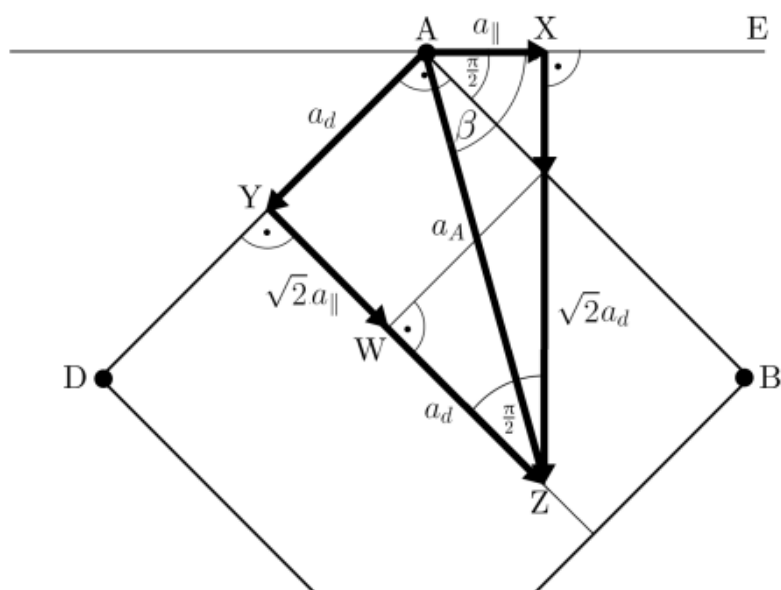
Z velikosti rychlosti  $v_A$  určíme okamžitou hodnotu velikosti dostředivého zrychlení

$$a_d = \frac{v_A^2}{l} = a_B \sqrt{2}.$$

Hodnoty  $a_{\parallel}$  a  $a_d$  představují průměty hledaného vektoru  $\mathbf{a}_A$  do směrů AE a AD (obr. R3). Geometricky tento vektor zkonstruujeme tak, že do směrů AE a AD nanese do vzdáleností  $a_{\parallel}$  a  $a_d$  od bodu A body X a Y a v nich vztyčíme kolmice. Jejich průsečík Z udává vektor  $\mathbf{a}_A = AZ$ .

Velikost úsečky AZ můžeme spočítat z Pythagorovy věty, aplikované na pravoúhlý trojúhelník AXZ nebo AYZ:

$$a_A = |AZ| = \sqrt{a_{\parallel}^2 + (a_{\parallel} + \sqrt{2} a_d)^2} = \sqrt{a_d^2 + (\sqrt{2} a_{\parallel} + a_d)^2} = a_B \sqrt{\frac{13}{2}}.$$



Obr. R3

Směr vektoru  $\mathbf{a}_A$  budeme charakterizovat úhlem  $\beta$  se směrem AE. Určíme jej z trojúhelníku AXZ:

$$\cos \beta = \frac{|AX|}{|AZ|} = \frac{a_{\parallel}}{a_A} = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Po zaokrouhlení  $\beta = 79^\circ$ .

**4 body**

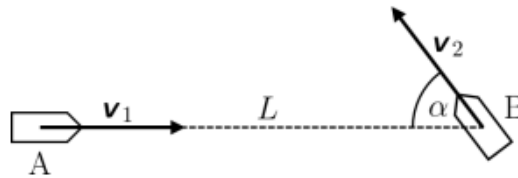
Vektory rychlosti a zrychlení bodu C jsou souměrně sdružené podle osy DB s odpovídajícími vektory rychlosti a zrychlení bodu A.

**1 bod**

## 2. FO59A3-2: Míjení lodí

[34 %]

Dvě lodi A a B se pohybují rychlostí o stejné velikosti  $v_1 = v_2 = v$  vzhledem k vodě. V určitém okamžiku plavby je mezi nimi vzdálenost  $L$  a úhel mezi přímkami, na kterých leží jejich trajektorie, je  $\alpha = 60^\circ$  (obr. 1).



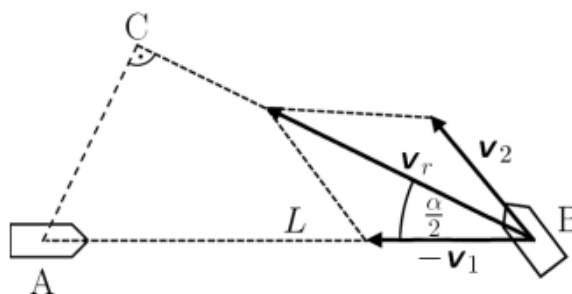
Obr. 1

- Jaká bude nejmenší vzdálenost lodí při jejich plavbě?
- Kapitán lodi B chce poslat kapitánu lodi A zásilku. Spustí tedy člun, který se pohybuje rychlostí o velikosti  $u = v$ . Za jakou nejkratší dobu může člun absolvovat plavbu od lodi B k lodi A?
- Vzhledem k vysokým vlnám je rychlost člunu  $u < v$ . Jak dlouho může kapitán lodi B váhat se spouštěním člunu od situace na obrázku 1, má-li člun loď A vůbec dostihnout?
- Kapitán lodi B chce poslat kapitánu lodi A vzkaz pomocí pneumatické pušky. Jakou nejmenší počáteční rychlost musí mít náboj se vzkazem, aby zasáhl palubu lodi A? Rychlost náboje je mnohem větší než rychlost lodí. Odpor vzduchu zanedbáme.

## Řešení

- Zvolme si vztažnou soustavu spojenou s lodí A. V této soustavě se loď B pohybuje vzhledem k lodi A po přímce s relativní rychlostí  $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  (obr. 1). Hledáme velikost úhlopříčky v kosočtverci:

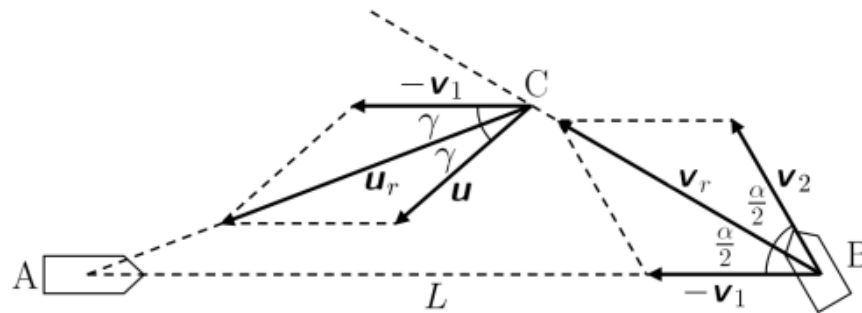
$$|\mathbf{v}_r| = 2v \cos \frac{\alpha}{2}.$$



Obr. R1

Nejmenší vzdálenost mezi loděmi pak bude  $l_{\min} = L \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2}$ .

2 body



Obr. R2

- b) Vypustíme-li člun v libovolné poloze C lodi B, je v soustavě spojené s lodí A velikost jeho rychlosti

$$u_r = 2v \cos \gamma. \quad (1)$$

Označme  $t$  dobu plavby člunu z místa C k lodi A. Podle sinové věty platí

$$\frac{u_r t}{L} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin (180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \gamma)} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin (150^\circ - \gamma)}.$$

Z toho plyne

$$t = \frac{L}{u_r} \frac{1}{2 \sin (150^\circ - \gamma)}.$$

Užitím vztahu (1) dostaneme

$$\begin{aligned} t &= \frac{L}{4v \cos \gamma (\sin 150^\circ \cos \gamma - \cos 150^\circ \sin \gamma)} = \\ &= \frac{L}{4v \cos \gamma \left( \frac{1}{2} \cos \gamma + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma \right)} = \frac{L}{2v \cos \gamma (\cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma)}. \end{aligned}$$

Pomocí derivace hledáme takový úhel  $\gamma$ , pro který je jmenovatel druhého zlomku maximální:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} \cos \gamma (\cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma) &= \\ &= -\sin \gamma (\cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma) + \cos \gamma (-\sin \gamma + \sqrt{3} \cos \gamma) = \\ &= \sqrt{3} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) - 2 \sin \gamma \cos \gamma = \sqrt{3} \cos 2\gamma - \sin 2\gamma. \end{aligned}$$

Z podmínky nulové derivace dostaneme

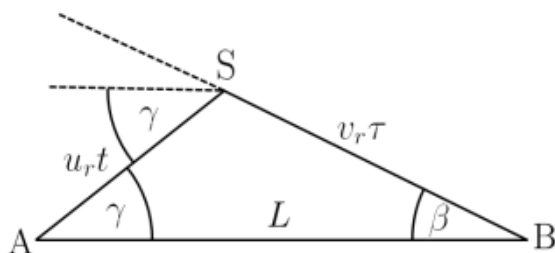
$$\operatorname{tg} 2\gamma = \sqrt{3} \Rightarrow \gamma = 30^\circ.$$

Pro tento úhel dostaneme hledanou minimální dobu

$$t_{\min} = \frac{L}{2v \cos 30^\circ (\cos 30^\circ + \sqrt{3} \sin 30^\circ)} = \frac{L}{3v}$$

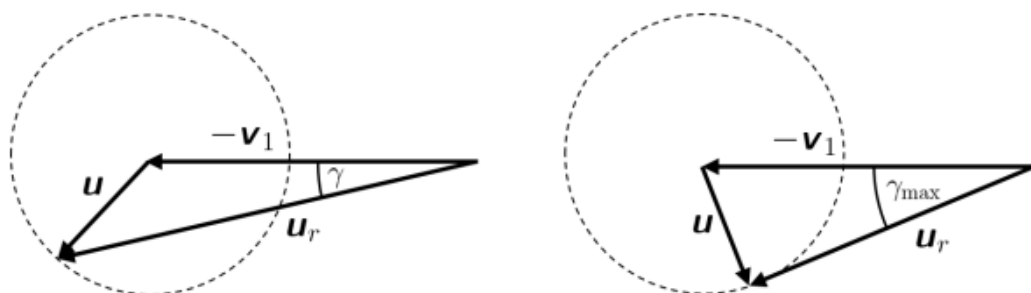
**3 body**

- c) V soustavě spojené s lodí A je úhel  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ , loďka bude mít rychlost  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{v}_1$  a bude svírat s přímkou AB úhel  $\gamma$  (obr. R3).



Obr. R3

Z obrázku je vidět, že doba  $\tau$  (a s ní spojená vzdálenost  $v_r \tau$ ) bude maximální při největším úhlu  $\gamma$  mezi směrem relativní rychlosti  $\mathbf{u}_r$  a úsečkou AB. Maximální velikost úhlu  $\gamma$  lze najít, sestrojíme-li diagram rychlostí (obr. R4). Vektor rychlosti člunu  $\mathbf{u}$  může mít teoreticky libovolný směr, jeho vrchol může být v libovolném místě na kružnici. Úhel  $\gamma$  bude maximální, bude-li mít rychlost  $\mathbf{u}_r$  směr tečny k této kružnici. Pak  $\sin \gamma_{\max} = \frac{u}{v}$ .



Obr. 4

Podle sinové věty z trojúhelníka ABS

$$\frac{v_r \tau_{\max}}{\sin \gamma_{\max}} = \frac{L}{\sin(\pi - \beta - \gamma_{\max})}.$$

Odtud hledaná doba

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{L}{v_r} \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin(\beta + \gamma_{\max})} = \frac{L}{2v \cos \beta} \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin \beta \cos \gamma_{\max} + \sin \gamma_{\max} \cos \beta} = \\ &= \frac{L}{v} \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin 2\beta \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_{\max}} + \sin \gamma_{\max} 2 \cos^2 \beta} = \frac{L}{v} \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 1 + 3}}. \end{aligned}$$

Vidíme, že při  $u \rightarrow 0$   $\tau_{\max} \rightarrow 0$ ;

při  $u = v$   $\tau_{\max} = \frac{2L}{3v}$ ;

při  $u > v$  může člun dohnat loď A kdykoli.

3 body

- d) Rychlost náboje bude minimální, bude-li vržen pod úhlem  $\alpha = 45^\circ$ , když bude vzdálenost lodí minimální, tedy  $\frac{L}{2}$ . Pro délku vrhu pak

$$l_{\min} = \frac{v_{\min}^2}{g} \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{\frac{Lg}{2}}.$$

**2 body**

## 5.1.2 Dynamika

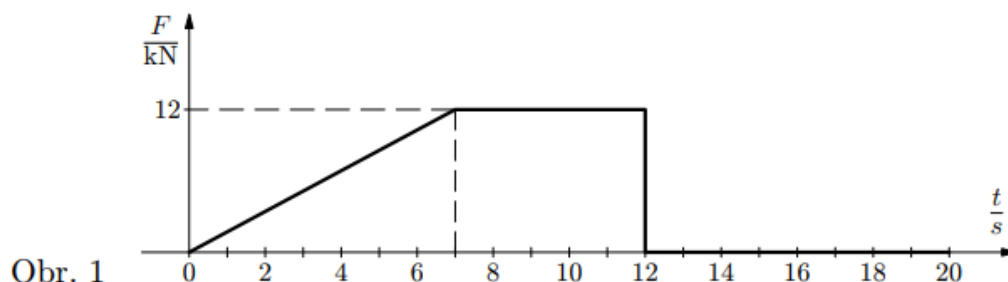
### 3. FO54A3-1: Roztlačování železničního vozu

[84 %]

Na železniční vagón o hmotnosti  $m = 20\,000$  kg, který byl na vodorovných kolejkách v klidu, začne působit lokomotiva tlačnou silou, jejíž velikost v závislosti na čase je dána grafem (obr. 1). Určete

- maximální velikost  $v_m$  rychlosti vagónu,
- čas  $t'$ , v němž vagón bude mít okamžitou rychlost  $v' = 1,5$  m · s<sup>-1</sup>,
- dráhu uraženou vagónem v čase 20 s.

Valivý odpor kol zanedbejte.



**Řešení**

Označme  $t_1 = 7$  s,  $t_2 = 12$  s,  $t_3 = 20$  s,  $F_m = 12\,000$  N.

- a) Velikost hybnosti vagónu je určena obsahem plochy pod grafem síly. V časovém intervalu  $\langle 0, t_1 \rangle$  je to

$$p_1 = \frac{F_m t_1}{2} = 42 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

v časovém intervalu  $\langle 0, t_2 \rangle$  je to

$$p_m = \frac{F_m t_1}{2} + F_m (t_2 - t_1) = 102 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

V časovém intervalu  $\langle t_2, t_3 \rangle$  se už hybnost vagónu nemění. Vagón bude mít v čase  $t_1$  rychlost  $v_1 = \frac{p_1}{m} = 2,1$  m · s<sup>-1</sup>, v časovém intervalu  $\langle t_2, t_3 \rangle$  rychlost

$$v_m = \frac{p_m}{m} = 5,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**2 body**

- b) Z předchozího výpočtu plyne, že hledaný čas je z intervalu  $\langle 0, t_1 \rangle$ . Na tomto časovém intervalu platí

$$mv' = \frac{1}{2}F't', \quad \frac{F'}{t'} = \frac{F_m}{t_1}.$$

Z rovnic plyne

$$t' = \sqrt{\frac{2mv't_1}{F_m}} = 5,9 \text{ s.} \quad (1)$$

**2 body**

- c) Na prvním úseku pohybu je velikost síly přímo úměrná času:

$$F(t) = \frac{F_m}{t_1}t.$$

Závislost rychlosti na čase získáme integrací

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{F(t)}{m} dt = \int \frac{F_m}{mt_1} \cdot t dt = \frac{F_m}{2mt_1} \cdot t^2, \quad (2)$$

přičemž v nulovém čase je počáteční rychlost nulová.

Dráha na prvním úseku je určena integrálem

$$s = \int_0^{t_1} v(t) dt = \left[ \frac{F_m}{6mt_1} \cdot t^3 \right]_0^{t_1} = \frac{F_m}{6mt_1} \cdot t_1^3 = \frac{F_m t_1^2}{6m} = 4,9 \text{ m.}$$

**3 body**

Na druhém úseku se vozík pohybuje vlivem konstantní síly rovnoměrně zrychleným pohybem s počáteční rychlostí  $v_1$  a konečnou rychlostí  $v_m$ . Dráha na druhém úseku je

$$s_2 = \frac{v_1 + v_m}{2}(t_2 - t_1) = 18 \text{ m.}$$

**2 body**

Na třetím úseku se vagón pohybuje rovnoměrně se stálou rychlostí  $v_m$ , přičemž urazí dráhu

$$s_3 = v_m(t_3 - t_2) = 40,8 \text{ m.}$$

Celková dráha je

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \doteq 64 \text{ m.}$$

**1 bod**

*Poznámka:* Vztah (1) lze také přímo odvodit z (2).

## 4. FO58A3-2: Volný pád kuličky

[76 %]

Ocelová kulička o průměru  $2r = 0,0100$  m a hustotě  $\rho = 7\,840$  kg·m<sup>-3</sup> byla volně puštěna ve vzduchu. Ve vzdálenosti  $h = 0,050$  m pod kuličkou je optická závora a ve vzdálenosti  $s = 1,000$  m pod ní druhá optická závora. Mezi průlety optickými závorami byl naměřen čas  $t = 0,362$  s.

a) Určete velikost tíhového zrychlení  $g$ .

Při volném pádu kuličky z větší výšky musíme zvážit také vliv odporové síly, která závisí na druhé mocnině rychlosti. Hustota vzduchu  $\rho_{vz} = 1,29$  kg·m<sup>-3</sup>, součinitel odporu  $C = 0,48$ , tíhové zrychlení  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup>.

b) Určete maximální rychlost  $v_{\max}$ , jakou bude ve vzduchu kulička padat.

c) Jak dlouhou dobu  $t_1$  bude trvat, než kulička získá rychlost  $v_1 = 30$  m·s<sup>-1</sup>, a jakou dráhu  $s_1$  za tu dobu urazí?

*Pomůcka:* 
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}.$$

## Řešení

a) Pro dráhu mezi optickými závorami platí:  $s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = t \sqrt{2hg} + \frac{1}{2} g t^2.$

Užitím substituce  $y = \sqrt{g}$  dostáváme kvadratickou rovnici  $\frac{t^2}{2} y^2 + t \sqrt{2h} y - s = 0.$

Fyzikální smysl má kladný kořen:

$$y = \frac{-t\sqrt{2h} + t\sqrt{2h+2s}}{t^2} = \frac{-\sqrt{2h} + \sqrt{2h+2s}}{t} = 3,13.$$

Pak  $g = y^2 = 9,79$  m·s<sup>-2</sup>.

3 body

- b) Velikosti tíhové a odporové síly se v krátké době vyrovnají. Pak bude kulička padat maximální rychlostí a bude platit

$$mg = \frac{1}{2}C\rho_{vz}\pi r^2 v_{\max}^2 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{1}{2}C\rho_{vz}\pi r^2 v_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{8r\rho g}{3C\rho_{vz}}} = 41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**2 body**

- c) Na padající kuličku působí síla, jejíž velikost závisí na rychlosti

$$F = mg - \frac{1}{2}C\rho_{vz}\pi r^2 v^2 = (1 - Kv^2) mg,$$

kde  $K = \frac{C\rho_{vz}\pi r^2}{2mg} = \frac{3C\rho_{vz}}{8r\rho g} = \frac{1}{v_{\max}^2}$ .

Podle druhého pohybového zákona  $F(v) = m\frac{dv}{dt}$ . Provedeme separaci proměnných a integrujeme

$$\int_0^{v_1} \frac{mdv}{F(v)} = \int_0^{t_1} dt.$$

Pro dobu pádu kuličky dostaneme (s použitím pomůcky ze zadání pro integraci)

$$t_1 = m \int_0^{v_1} \frac{dv}{F(v)} = \int_0^{v_1} \frac{dv}{(1 - Kv^2)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_1} \frac{dv}{(1 - Kv^2)} = \frac{1}{g} \int_0^{v_1} \frac{dv}{K\left(\frac{1}{K} - v^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{Kg} \int_0^{v_1} \frac{dv}{\left(\frac{1}{K} - v^2\right)} = \frac{1}{Kg} \int_0^{v_1} \left( \frac{\frac{1}{2}\sqrt{K}}{\frac{1}{\sqrt{K}} + v} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{K}}{\frac{1}{\sqrt{K}} - v} \right) dv =$$

$$= \frac{1}{2g\sqrt{K}} \int_0^{v_1} \left( \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{K}} + v} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{K}} - v} \right) dv = \frac{1}{2g\sqrt{K}} \left[ \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{K}} + v}{\frac{1}{\sqrt{K}} - v} \right]_0^{v_1} =$$

$$= \frac{v_{\max}}{2g} \ln \frac{v_{\max} + v_1}{v_{\max} - v_1} = 3,9 \text{ s.}$$

**3 body**



Použili jsme úpravu:  $\frac{1}{\frac{1}{K} - v^2} = \frac{A}{\sqrt{\frac{1}{K} + v}} + \frac{B}{\sqrt{\frac{1}{K} - v}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K}}(A+B) + (B-A)v}{\frac{1}{K} - v^2}$

$$(B-A) = 0 \text{ a } \sqrt{\frac{1}{K}}(A+B) = 1 \Rightarrow A = B = \frac{\sqrt{K}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{K} - v^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{K}}{\sqrt{\frac{1}{K} + v}} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{K}}{\sqrt{\frac{1}{K} - v}}.$$

Pro určení dráhy, kterou kulička za tuto dobu urazí, upravíme pohybový zákon:

Za  $dt$  dosadíme výraz  $\frac{mdv}{F(v)}$ . Úprava vede na tvar

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}.$$

Po separaci proměnných můžeme integrovat

$$m \int_0^{v_1} \frac{v dv}{F(v)} = \int_0^{v_1} \frac{v dv}{(1 - Kv^2)g} = \int_0^{s_1} dx,$$

pak

$$s_1 = \int_0^{v_1} \frac{v dv}{(1 - Kv^2)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_1} \frac{v dv}{1 - Kv^2} = \frac{1}{g} \int_1^{1-Kv_1^2} -\frac{1}{2K} \frac{dz}{z} =$$

$$= -\frac{1}{2Kg} \int_1^{1-Kv_1^2} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2Kg} [\ln z]_1^{1-Kv_1^2} = -\frac{1}{2Kg} (\ln(1 - Kv_1^2) - \ln 1) =$$

$$= -\frac{1}{2Kg} \ln(1 - Kv_1^2) = -\frac{v_{\max}^2}{2g} \ln\left(1 - \frac{v_1^2}{v_{\max}^2}\right) = 66 \text{ m.}$$

**2 body**

Použili jsme substituci  $z = 1 - Kv^2$ ,  $dz = -2Kv dv \Rightarrow v dv = -\frac{1}{2K} dz$ .

Stíhačka o hmotnosti  $m = 6\,500$  kg přistává na vodorovné letištní ploše a dosedá na ni rychlostí  $v_0 = 180$  km/h.

- a) V okamžiku dotyku s přistávací plochou pilot aktivuje brzdy, které na letoun působí silou o konstantní velikosti  $F_0 = 9,0$  kN. Vypočtete délku přistávací dráhy  $s_0$ , zanedbáte-li aerodynamické odporové síly.
- b) Má-li stíhačka přistát na letišti s krátkou přistávací dráhou, musí pilot při dotyku s letištní plochou kromě aktivace brzd podle bodu a) vystřelit 3 přistávací padáky. Pak je velikost celkové brzdící síly

$$F = F_0 + Av^2,$$

kde  $A = 25$  kg·m<sup>-1</sup>. Vypočtete velikost  $a_1$  zpomalení letounu v počátečním okamžiku přistávání. Výsledek vyjádřete jako násobek tíhového zrychlení.

- c) Odvoďte funkční závislost  $v = v(x)$  rychlosti stíhačky podle bodu b) na vzdálenosti  $x$  od místa dosednutí na letištní plochu.
- d) Vypočtete délku přistávací dráhy  $s_1$  při použití přistávacího padáku.
- e) Jaký průměr musí mít každý ze tří stejných padáků ve tvaru duté polokoule, aby konstanta  $A$  měla uvedenou velikost? (Součinitel odporu  $C = 1,4$ , hustota vzduchu  $\rho = 1,3$  kg·m<sup>-3</sup>.)

### Řešení

- a) Jedná se o pohyb rovnoměrně zpomalený se zpomalením  $a_0 = F_0/m$ . Přistávací dráha

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2a_0} = \frac{v_0^2 m}{2F_0} = 900 \text{ m.}$$

**1 bod**

- b) Počáteční brzdná síla bude mít velikost  $F_1 = F_0 + Av_0^2$  a zpomalení

$$a_1 = \frac{F_0 + Av_0^2}{m} = 11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 1,1g.$$

**1 bod**

- c) V pohybové rovnici

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = - (F_0 + Av^2)$$

provedeme separaci proměnných:

$$dx = - \frac{mv dv}{F_0 + Av^2}.$$

Integrujeme pro  $x \in \langle 0, x \rangle$ ,  $v \in \langle v_0, v \rangle$ :

$$x = - \frac{m}{2A} \int_{v_0}^v \frac{2Av dv}{F_0 + Av^2} = \frac{m}{2A} \ln \frac{F_0 + Av_0^2}{F_0 + Av^2}. \quad (1)$$

Odtud

$$v = v(x) = \sqrt{\left(\frac{F_0}{A} + v_0^2\right) e^{-\frac{2A}{m}x} - \frac{F_0}{A}} = v_0 \sqrt{\left(\frac{F_0}{Av_0^2} + 1\right) e^{-\frac{2A}{m}x} - \frac{F_0}{Av_0^2}}. \quad (2)$$

Rychlost se zmenšuje podle exponenciály až k  $v = 0$ .

**5 bodů**

- d) Délku přistávací dráhy určíme z (1) nebo (2) pro  $v = 0$  a  $x = s_1$ :

$$s_1 = \frac{m}{2A} \ln \left( 1 + \frac{Av_0^2}{F_0} \right) = 270 \text{ m.}$$

**2 body**

- e) Podle Newtonova vzorce pro odporovou sílu platí pro koeficient  $A$

$$A = 3 \cdot \frac{1}{2} C \frac{\pi d^2}{4} \rho \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{8A}{3\pi\rho C}} = 3,4 \text{ m.}$$

**1 bod**

## 6. FO49A3-1: Válání koule po koberci

[51 %]

Homogenní koule o hmotnosti  $m = 7,00$  kg a poloměru  $r = 6,00$  cm se valila po koberci na vodorovné podlaze. Pohyb byl fotograficky zaregistrován zábleskovým zařízením, jehož záblesky se opakovaly s periodou  $\tau = 2,00$  s. Tři po sobě následující polohy koule 1, 2, 3 se nacházely ve vzájemných vzdálenostech  $s_1 = 2,10$  m,  $s_2 = 1,10$  m (obr. 1). Předpokládáme, že pohyb koule byl rovnoměrně zpomalený bez klouzání. Odpor vzduchu je zanedbatelný.

- a) Kde se koule nacházela při dalším záblesku?  
b) Určete směr, velikost a působiště výslednice  $\mathbf{R}$  sil, kterými na kouli při pohybu působily částice koberce.



Obr. 1

### Řešení

- a) Označme  $t_1, t_2, t_3$  časy záblesků,  $v_1, v_2, v_3$  příslušné rychlosti středu koule,  $a$  velikost zrychlení koule,  $t$  čas, kdy se koule zastaví a  $s$  zbývající dráhu středu koule. Platí

$$v_1 - v_2 = a(t_2 - t_1) = a\tau, \quad v_2 - v_3 = a(t_3 - t_2) = a\tau, \quad (1)$$

$$s_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}(t_2 - t_1) = \frac{v_1 + v_2}{2}\tau, \quad s_2 = \frac{v_2 + v_3}{2}(t_3 - t_2) = \frac{v_2 + v_3}{2}\tau. \quad (2)$$

Dosazením z (1) do (2) a úpravou dostaneme

$$2s_1 = 2v_2\tau + a\tau^2, \quad 2s_2 = 2v_2\tau - a\tau^2.$$

Z toho

$$2(s_1 - s_2) = 2a\tau^2 \Rightarrow a = \frac{s_1 - s_2}{\tau^2} = 0,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (3)$$

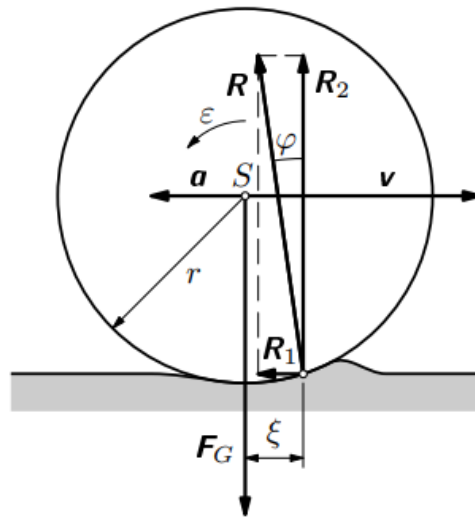
$$4v_2\tau = 2(s_1 + s_2) \Rightarrow v_2 = \frac{s_1 + s_2}{2\tau} = 0,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dále platí

$$s_2 + s = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{(s_1 + s_2)^2}{8(s_1 - s_2)} \Rightarrow s = \frac{(s_1 + s_2)^2}{8(s_1 - s_2)} - s_2 = 0,18 \text{ m},$$

$$t - t_3 = t - t_2 - \tau = \frac{v_2}{a} - \tau = \tau \frac{s_1 + s_2}{2(s_1 - s_2)} - \tau = 1,2 \text{ s} < \tau$$

Při čtvrtém záblesku se koule nacházela v klidu ve vzdálenosti 18 cm od polohy při třetím záblesku. **5 bodů**



Obr. R1

- b) Pohyb koule je složen z rovnoměrně zpomaleného posuvného pohybu se zrychlením o velikosti určené vztahem (3) a z rovnoměrně zpomaleného otáčivého pohybu, jehož úhlové zrychlení má velikost  $\varepsilon = a/r$ . Na kouli působí pouze tíhová síla  $F_G$  a reakce koberce  $R$ , jejíž vodorovnou složku označíme  $R_1$  a svislou složku  $R_2$ . Její působíště je v důsledku deformace koberce způsobené pohybem koule posunuto ve směru pohybu do vzdálenosti  $\xi$  od vektorové přímky tíhové síly (obr. R1). Podle první impulzové věty platí

$$R_1 = ma, \quad R_2 - F_G = 0 \Rightarrow R_2 = F_G = mg. \quad (4)$$

Výsledná reakce koberce má velikost

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = m\sqrt{a^2 + g^2} = 68,69 \text{ N} \approx F_G$$

a je odchýlena od svislého směru proti směru pohybu koule o úhel

$$\varphi = \arctg(R_1/R_2) = \arctg(a/g) = 1,46^\circ.$$

Podle druhé impulzové věty platí

$$R_2\xi - R_1\sqrt{r^2 - \xi^2} = J\varepsilon = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r}. \quad (5)$$

Dosazením z (4) do (5) a úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici:

$$g\xi - \frac{2}{5}ar = a\sqrt{r^2 - \xi^2}, \quad (g^2 + a^2)\xi^2 - \frac{4}{5}gra\xi - \frac{21}{25}a^2r^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje kořen

$$\xi = \frac{ra \left( 2g + \sqrt{25g^2 + 21a^2} \right)}{5(g^2 + a^2)} = 0,00214 \text{ m} = 2,1 \text{ mm}.$$

**5 bodů**

*Poznámka:* Vodorovnou složku  $R_1$  reakce nazýváme *valivý odpor* a vzdálenost  $\xi$  je *rameno valivého odporu*. Při jeho výpočtu jsme mohli použít aproximaci  $\sqrt{r^2 - \xi^2} \approx r$ . Rovnice (5) se zjednoduší na tvar

$$R_2\xi - R_1r \approx J\varepsilon \Rightarrow mg\xi \approx mar + \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r},$$

Z toho  $\xi \approx \frac{7a}{5g}r = 0,00214 \text{ m} \doteq 2,1 \text{ mm}$ .

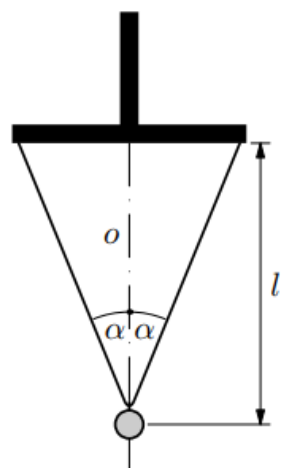
## 7. FO52A3-1: Rotace bifilárního závěsu

[49 %]

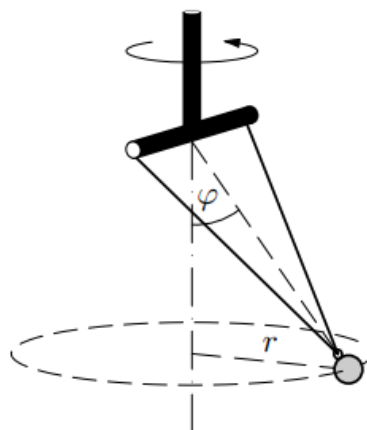
Kulička o hmotnosti  $m = 100 \text{ g}$  s očkem byla zavěšena na bifilárním závěsu upevněném symetricky na držáku ve tvaru obráceného písmene T otáčivém okolo svislé osy  $o$ . Obě poloviny vlákna spolu svíraly úhel  $2\alpha = 45^\circ$  (obr. 1). Střed kuličky se nacházel ve vzdálenosti  $l = 30 \text{ cm}$  od středu držáku a její dolní bod byl ve výšce  $H = 1,00 \text{ m}$  nad vodorovnou podlahou místnosti. Závěs se začal otáčet a frekvence otáčení se velmi pomalu zvětšovala. Při určité frekvenci  $f_0$  přestala být původní rovnovážná poloha kuličky stabilní a kulička začala obíhat po kružnicové trajektorii, jejíž poloměr se postupně zvětšoval (obr. 2). V okamžiku, kdy odchylka  $\varphi$  roviny bifilárního závěsu od osy otáčení dosáhla hodnoty  $\varphi_1 = 65^\circ$ , se vlákno přetrhlo. Určete

- frekvenci  $f_0$ ,
- jakou silou  $F_1$  bylo napnuto vlákno v okamžiku přetržení,
- v jaké vzdálenosti  $d$  od osy otáčení dopadla kulička na podlahu.

Řešte obecně a pak pro dané hodnoty veličin. Deformaci vlákna tahovou silou zanedbejte.



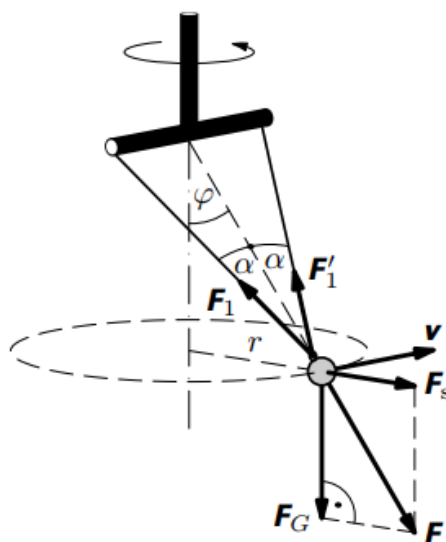
Obr. 1



Obr. 2

### Řešení

Úlohy a) a b) budeme řešit z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s rotujícím závěsem, úlohu c) z hlediska pozorovatele v inerciální vztažné soustavě spojené s místností. Vyjdeme z obr. R1.



Obr. R1

- a) Výslednice tíhové síly a setrvačné odstředivé síly, které působí na kuličku, leží v rovině vychýleného závěsu. Platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_s}{F_G} = \frac{m4\pi^2 f^2 r}{mg} = \frac{4\pi^2 f^2 l \sin \varphi}{g} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{g}{4\pi^2 f^2 l}. \quad (1)$$

Protože  $\cos \varphi \leq 1$ , může situace podle obr. R2 nastat až pro

$$f > f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 0,91 \text{ Hz.}$$

4 body

- b) Výslednice tíhové síly a setrvačné odstředivé síly je v rovnováze se silami, kterými na kuličku působí obě poloviny bifilárního závěsu. Z obr. R1 plyne

$$F = \frac{F_G}{\cos \varphi} = 2F_1 \cos \alpha.$$

V okamžiku přetržení bylo vlákno napínáno silou

$$F_1 = F'_1 = \frac{mg}{2 \cos \varphi_1 \cos \alpha} = 1,26 \text{ N.}$$

**2 body**

- c) Podle (1) se v okamžiku přetržení závěsu držák otáčel s frekvencí

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cos \varphi_1}}.$$

Okamžitá rychlost kuličky měla velikost  $v_1 = 2\pi f_1 l \sin \varphi_1 = \sin \varphi_1 \sqrt{\frac{gl}{\cos \varphi_1}}$ .

Následoval vodorovný vrh z výšky  $H + l(1 - \cos \varphi_1)$  ve směru tečny k trajektorii. Délka vrhu byla

$$L = v_1 \sqrt{\frac{2[H + l(1 - \cos \varphi_1)]}{g}} = \sin \varphi_1 \sqrt{\frac{2l[H + l(1 - \cos \varphi_1)]}{\cos \varphi_1}} = 1,17 \text{ m.}$$

Vzdálenost  $d$  místa dopadu od osy otáčení vypočítáme užitím Pythagorovy věty:

$$d = \sqrt{L^2 + (l \sin \varphi_1)^2} = l \sin \varphi_1 \sqrt{\frac{2(H + l)}{l \cos \varphi_1} - 1} = 1,20 \text{ m.}$$

**4 body**

## 8. FO56A3-1: Rozjíždění automobilu

[41 %]

Automobil o hmotnosti  $m = 1\,200 \text{ kg}$  má pohon na všechna čtyři kola a maximální výkon motoru  $P = 73,0 \text{ kW}$ . Při brzdění smykem na přímém vodorovném úseku cesty je jeho brzdňá dráha do zastavení, při počáteční rychlosti  $v_0 = 50,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , rovna  $s_b = 16,4 \text{ m}$ .

Automobil se na stejné cestě rozjíždí z klidu od počátku s maximálním výkonem motoru. To se neobejde bez toho, že kola automobilu budou po určitou dobu prokluzovat.

- a) Jak dlouho bude trvat rozjíždění automobilu na rychlost  $v_2 = 90,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ?  
 b) Jakou dráhu přitom automobil urazí?

Odpor vzduchu a valivý odpor proti pohybu automobilu zanedbejte. Řešte nejprve obecně a poté pro zadané hodnoty.

## Řešení

- a) Rozjíždění automobilu bude probíhat ve dvou fázích. V první fázi budou kola prokluzovat. Automobil se v této fázi bude rozjíždět s konstantním zrychlením  $a = fg$ , jehož velikost můžeme určit z brzdné dráhy:

$$a = fg = \frac{v_0^2}{2s_b} \doteq 5,88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Část výkonu motoru, která se postupně bude zvětšovat, se využije na zvyšování kinetické energie automobilu, zbytek se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie pneumatik a vozovky při prokluzování kol:

$$P = Fv + P_{\text{ztr}} = mav + P_{\text{ztr}} = m \frac{v_0^2}{2s_b} v + P_{\text{ztr}}.$$

Kola automobilu přestanou prokluzovat v okamžiku, kdy velikost rychlosti automobilu dosáhne hodnoty  $v_1$ , při které se celý výkon automobilu spotřebuje na jeho zrychlování:

$$P = mav_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{P}{ma} = \frac{2Ps_b}{mv_0^2} \doteq 10,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

První fáze pohybu proběhne za dobu

$$t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{P}{ma^2} = \frac{4Ps_b^2}{mv_0^4} \doteq 1,76 \text{ s}.$$

**3 body**

V druhé fázi rozjíždění už kola nebudou prokluzovat a celá práce motoru povede ke zvýšení kinetické energie automobilu. Na zvýšení rychlosti z hodnoty  $v_1$  na hodnotu  $v_2$  bude třeba za dobu  $t_2$  vykonat práci

$$Pt_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2P} = \frac{m}{2P} \left( v_2^2 - \frac{4s_b^2 P^2}{m^2 v_0^4} \right) \doteq 4,26 \text{ s}.$$

Celková doba rozjíždění pak bude  $t = t_1 + t_2 = 6,0 \text{ s}$ .

**2 body**

- b) V první fázi rozjíždění automobil urazí dráhu

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{P^2}{2m^2 a^3} = \frac{4P^2 s_b^3}{m^2 v_0^6} \doteq 9,1 \text{ m}.$$

V druhé fázi rozjíždění se při konstantním výkonu zvyšuje rychlost automobilu, jeho zrychlení se zmenšuje. Pro závislost okamžité rychlosti  $v$  na čase  $t$  měřeném od okamžiku dosažení rychlosti  $v_1$  dostaneme

$$Pt = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_1^2 + \frac{2P}{m}t}.$$



Dráhu v druhém úseku určíme integrací:

$$s_2 = \int_0^{t_2} \sqrt{v_1^2 + \frac{2P}{m}t} dt = \left[ \frac{m}{3P} \sqrt{\left(v_1^2 + \frac{2P}{m}t\right)^3} \right]_0^{t_2} =$$

$$= \frac{m}{3P} \sqrt{\left(v_1^2 + \frac{2P}{m}t_2\right)^3} - \frac{m}{3P} v_1^3 \doteq 79,5 \text{ m.}$$

Použili jsme úpravu:

$$v_1^2 + \frac{2P}{m}t = x \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{m}{2P} dx,$$

$$\int \sqrt{v_1^2 + \frac{2P}{m}t} dt = \frac{m}{2P} \int \sqrt{x} dx = \frac{m}{3P} \sqrt{x^3} + C = \frac{m}{3P} \sqrt{\left(v_1^2 + \frac{2P}{m}t\right)^3} + C.$$

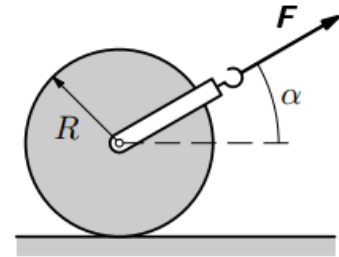
Celková dráha pak bude  $s = s_1 + s_2 = 88,7 \text{ m}$ .

**5 bodů**

### 9. FO46A3-2: Válec

[41 %]

Válec o hmotnosti  $m$ , poloměru  $R$  a momentu setrvačnosti  $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$  se valí po vodorovné rovině působením síly  $\mathbf{F}$ , která svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha$  (obr. 3). Součinitel smykového tření mezi válcem a rovinou je  $f$ , valivý odpor je zanedbatelný.



Obr. 3

- Určete maximální velikost  $F_{\max}$  síly  $\mathbf{F}$ , při které ještě nedochází k prokluzu, a tomu odpovídající úhlové zrychlení  $\varepsilon_{\max}$  válce.
- Jak musíme zvolit úhel  $\alpha$ , aby velikost  $F_{\max}$  síly  $\mathbf{F}$ , při které ještě nedochází k prokluzu, byla co nejmenší? Jaké hodnoty pak mají veličiny určené v úkolu a)?

Úlohu a) řešte jen obecně. Úlohu b) řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $m = 5,0 \text{ kg}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$  a  $f = 0,25$ .

## Řešení

- a) Vyjdeme z obr. R2. Na válec působí kromě síly  $F$  ještě tíhová síla  $F_G$  a reakce  $F_r$  vodorovné roviny, která má normálovou složku  $N$  a tečnou složku  $F_t$  – třecí sílu. Z pohybových zákonů plyne

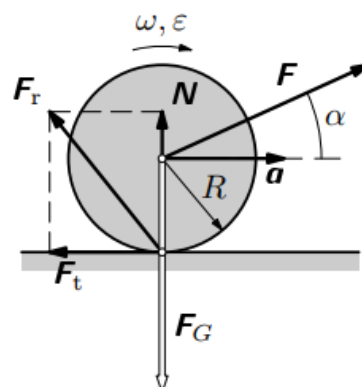
$$F \cos \alpha - F_t = ma, \quad (1)$$

$$F \sin \alpha + N = mg, \quad N = mg - F \sin \alpha, \quad (2)$$

$$F_t R = J_0 \varepsilon = \frac{mR^2}{2} \varepsilon. \quad (3)$$

Pokud valení probíhá bez prokluzu, platí ještě

$$a = R\varepsilon \quad (4)$$



Obr. R2

kde  $\varepsilon$  je úhlové zrychlení válce a  $a$  je zrychlení jeho těžiště. Pak

$$F_t R = J_0 \frac{a}{R} = \frac{mRa}{2}, \quad F_t = \frac{ma}{2}. \quad (5)$$

Z rovnic (1) a (5) plyne

$$F \cos \alpha = F_t + ma = \frac{3}{2}ma = 3F_t, \quad F_t = \frac{F \cos \alpha}{3}. \quad (6)$$

Pro smykové tření musí platit  $F_t \leq fN$ . Z toho

$$\frac{F \cos \alpha}{3} \leq f(mg - F \sin \alpha), \quad F \leq \frac{3fmg}{\cos \alpha + 3f \sin \alpha},$$

$$F_{\max} = \frac{3fmg}{\cos \alpha + 3f \sin \alpha}. \quad (7)$$

Z (3), (6) a (7) dostaneme

$$\varepsilon_{\max} = \frac{F_{t \max} \cdot R}{J_0} = \frac{F_{\max} \cos \alpha \cdot R}{3J_0} = \frac{2fg \cos \alpha}{R(\cos \alpha + 3f \sin \alpha)} \quad (8)$$

**4 body**

- b) Hodnoty vypočítané podle (7) a (8) budou nejmenší pro takový úhel  $\alpha$ , pro který výraz  $\cos \alpha + 3f \sin \alpha$  dosahuje maxima. Nutná podmínka pro to je, aby první derivace tohoto výrazu podle  $\alpha$  byla nulová:

$$\frac{d(\cos \alpha + 3f \sin \alpha)}{d\alpha} = -\sin \alpha + 3f \cos \alpha = 0, \quad \text{tg } \alpha = 3f.$$

Že se skutečně jedná o maximum, ověříme pomocí druhé derivace:

$$\frac{d^2(\cos \alpha + 3f \sin \alpha)}{d\alpha^2} = -\cos \alpha - 3f \sin \alpha < 0 \quad \text{pro } \alpha \in (0, 90^\circ).$$

Hodnoty  $F_{\max}$  a  $\varepsilon_{\max}$  jsou tedy nejmenší pro úhel

$$\alpha = \operatorname{arctg} 3f = \operatorname{arctg} 0,75 = 36,9^\circ.$$

**3 body**

Pro daný úhel platí

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 9f^2.$$

Z toho

$$\sin \alpha = \frac{3f}{\sqrt{1 + 9f^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 9f^2}},$$

$$F_{\max} = \frac{3fmg}{\frac{1}{\sqrt{1 + 9f^2}} + 3f \frac{3f}{\sqrt{1 + 9f^2}}} = \frac{3mgf}{\sqrt{1 + 9f^2}} = 29,4 \text{ N},$$

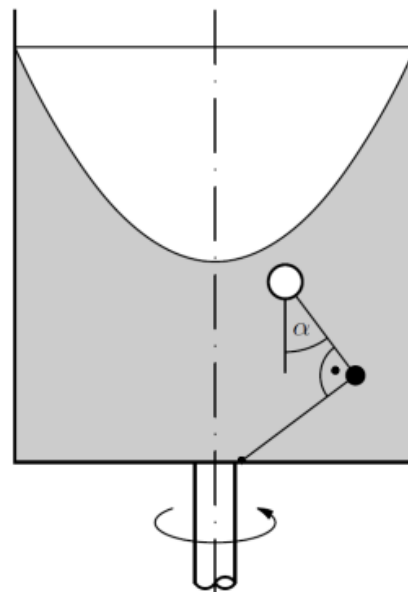
$$\varepsilon_{\max} = \frac{2fg \frac{1}{\sqrt{1 + 9f^2}}}{R \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 9f^2}} + 3f \frac{3f}{\sqrt{1 + 9f^2}} \right)} = \frac{2fg}{R(1 + 9f^2)} = 31,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

**3 body**

**Kuličky v rotující nádobě**

Ve válcové nádobě s vodou jsou ke dnu mimo osu válce připevněny na lehkém vlákně dvě malé homogenní kuličky, dřevěná a hliníková (obr. 1). Válcová nádoba se otáčí kolem svislé osy válce stálou úhlovou rychlostí. Po ustavení rovnováhy je vzdálenost hliníkové kuličky od osy otáčení 2krát větší než vzdálenost dřevěné kuličky. Vlákna přitom svírají navzájem pravý úhel a horní vlákno svírá se svislým směrem úhel  $\alpha$ , pro který platí  $\sin \alpha = 3/5$ .

- Jaký směr mají vztahové síly, kterými voda působí na kuličky?
- Jaký je poměr velikostí tahových sil, kterými je horní a dolní vlákno napínáno?
- Jaký je poměr objemů a poloměrů obou kuliček?



Obr. 1

Hustota dřeva  $\rho_1 = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , hustota hliníku  $\rho_2 = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , hustota vody  $\rho_k = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Rozměry kuliček jsou v porovnání s jejich vzdáleností od osy rotace zanedbatelné. Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty.

**Řešení**

Úlohu budeme řešit v neinerciální vztahné soustavě spojené s rotující nádobou. Síly působící na kuličky znázorňují obrázky R1 a R2. Jsou nakresleny v různém měřítku.

- Tíhová síla  $F_{G1}$  a setrvačná odstředivá síla  $F_{s1}$  působící na dřevěnou kuličku mají výslednici  $F_1$  o velikosti

$$F_1 = \sqrt{F_{G1}^2 + F_{s1}^2} = m_1 \sqrt{g^2 + \omega^4 r_1^2} = V \rho_1 \sqrt{g^2 + \omega^4 r_1^2}.$$

Podle Archimédova zákona působí na dřevěnou kuličku ještě v opačném směru vztahová síla o velikosti

$$F_{v1} = V \rho_k \sqrt{g^2 + \omega^4 r_1^2} = F_1 \frac{\rho_k}{\rho_1} > F_1.$$

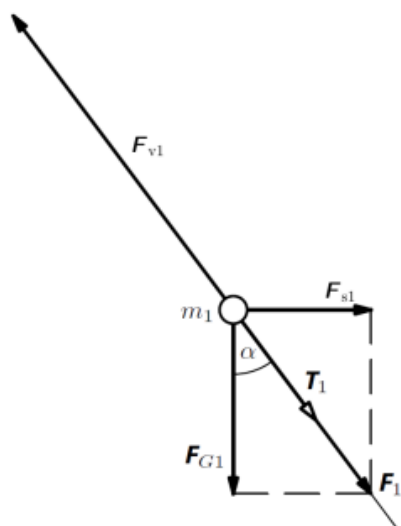
V téže vektorové přímce jako síly  $F_1$  a  $F_{v1}$  musí působit i tahná síla vlákna  $T_1$ , která je s nimi v rovnováze. Vztahová síla působící na dřevěnou kuličku má tedy směr horní části vlákna a svírá se svislým směrem úhel  $\alpha$ . Snadno odvodíme, že

$$\text{tg } \alpha = \frac{\omega^2 r_1}{g} = \frac{3}{4}.$$

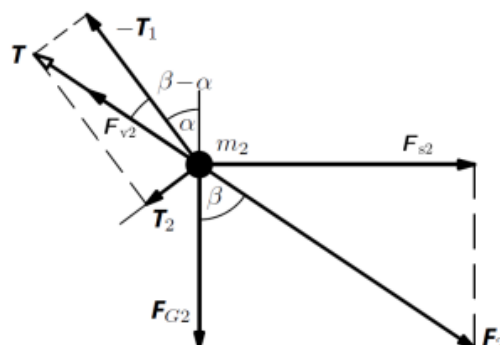
U hliníkové kuličky má vztaková síla  $F_{v2}$  opačný směr než výslednice  $F_2$  tíhové síly  $F_{G2}$  a setrvačné odstředivé síly  $F_{s2}$ . Svírá tedy se svislým směrem úhel  $\beta$ , pro který platí

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega^2 r_2}{g} = \frac{\omega^2 \cdot 2r_1}{g} = 2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}.$$

3 body



Obr. R1



Obr. R2

- b) Výslednice  $T$  tahových sil, kterými obě části vlákna působí na hliníkovou kuličku, je v rovnováze s výslednicí sil  $F_2$  a  $F_{v2}$  a svírá se svislým směrem úhel  $\beta$ . U hliníkové kuličky je

$$F_{v2} = V \rho_k \sqrt{g^2 + 4\omega^4 r_1^2} = F_2 \frac{\rho_k}{\rho_2} < F_2.$$

Z obr. R2 odvodíme

$$\frac{T_2}{T_1} = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{1 + 2 \cdot \frac{9}{16}} = \frac{6}{17}.$$

3 body

c) Pro velikosti  $T_1$  a  $T$  tahových sil platí

$$T_1 = F_{v1} - F_1 = F_1 \left( \frac{\rho_k}{\rho_1} - 1 \right) = \frac{F_{G1}}{\cos \alpha} \cdot \frac{\rho_k - \rho_1}{\rho_1},$$

$$T = F_2 - F_{v2} = F_2 \left( 1 - \frac{\rho_k}{\rho_2} \right) = \frac{F_{G2}}{\cos \beta} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_k}{\rho_2},$$

z toho

$$F_{G1} = V_1 \rho_1 g = T_1 \frac{\rho_1 \cos \alpha}{\rho_k - \rho_1}, \quad F_{G2} = V_2 \rho_2 g = T \frac{\rho_2 \cos \beta}{\rho_2 - \rho_k}.$$

Vydělením obou vztahů dostaneme

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_k}{\rho_k - \rho_1},$$

přičemž

$$T = \sqrt{T_1^2 + \left( \frac{6T_1}{17} \right)^2} = \frac{5\sqrt{13}}{17} T_1, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Po dosazení a úpravě vychází

$$\frac{V_1}{V_2} = 4,62, \quad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{\frac{V_1}{V_2}} = 1,67.$$

**4 body**

### 5.1.3 Gravitační pole

Pohyby těles v homogenním tíhovém poli Země

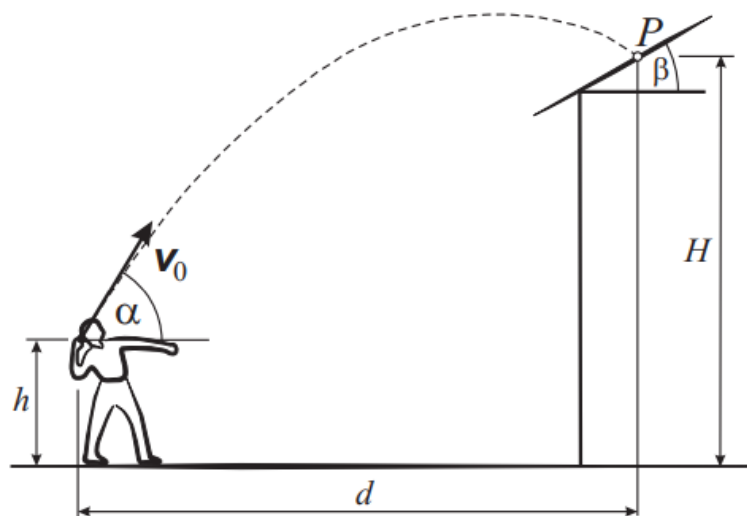
11.FO55A3-2: Hod míčku na střechu

[85 %]

Na obr. 1 je nakreslen chlapec, který házel malým míčkem (hopíkem) šikmo vzhůru pod úhlem  $\alpha$  na střechu domu, která svírá s vodorovným směrem úhel  $\beta$ . Míček opustil chlapcovu ruku ve výšce  $h$  a dopadl na střechu do bodu  $P$ , který má vodorovnou vzdálenost  $d$  od místa vrhu a nachází se ve výšce  $H$  nad vodorovnou rovinou. Od střechy se pružně odrazil a dopadl po odrazu na zem. Určete

- velikost  $v_0$  počáteční rychlosti, kterou chlapec míček hodil,
- úhel  $\gamma$  dopadu míčku na střechu vzhledem k vodorovné rovině, úhel  $\delta$  vzhledem k vodorovné rovině, pod kterým se míček odrazil zpět, a velikost  $v_1$  rychlosti dopadu míčku na střechu,
- polohu místa na zemi, kam míček po odrazu dopadl.

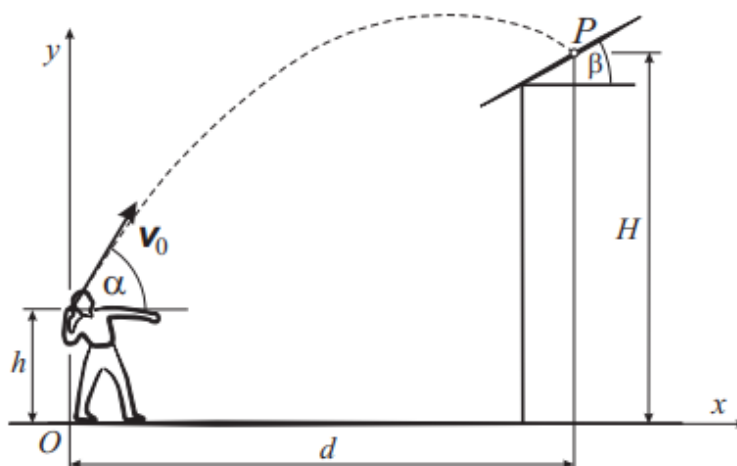
Úlohu a) řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty  $H = 3,5$  m,  $h = 1,5$  m,  $d = 5,0$  m,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , úlohy b) a c) pouze pro zadané hodnoty. Odpor prostředí zanedbejte. Odraz míčku považujte za dokonale pružný.



Obr. 1

## Řešení

- a) Zvolíme soustavu souřadnic  $Oxy$  dle obr. R4.



Obr. R4

Potom pro souřadnice místa dopadu platí:

$$x = d, \quad y = H.$$

Dále víme, že pro vrh šikmo vzhůru platí vztahy

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Ze vztahu pro  $x$  vyjádříme  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  a dosadíme do vztahu pro  $y$ . Po úpravě dostaneme

$$y = h + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Do vztahu (1) dále dosadíme za  $x$  a  $y$ , tj.

$$H = h + d \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} d^2.$$

Postupnými úpravami vyjádříme z této rovnice hledanou rychlost  $v_0$ :

$$v_0 = \frac{d}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(d \operatorname{tg} \alpha - H + h)}}. \quad (2)$$

Po dosazení zadaných hodnot dostaneme  $v_0 = 8,582 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 8,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**4 body**

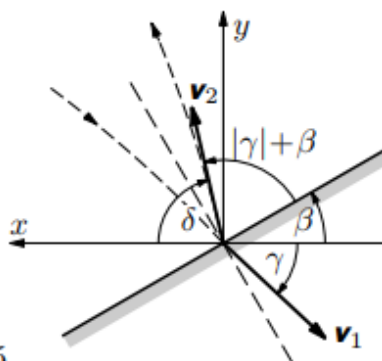
- b) Míček dopadne na střechu v čase  $t_1 = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} = 1,165 \text{ s}$ . V tomto okamžiku má rychlost míčku souřadnice

$$v_{1x} = v_0 \cos \alpha = 4,29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_{1y} = v_0 \sin \alpha - g t_1 = -4,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Velikost rychlosti dopadu je  $v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 5,87 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , úhel dopadu vzhledem k vodorovné rovině je  $\gamma = \text{arctg} \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = -43^\circ$ .

Z obr. R5 je zřejmé, že míček se odrazí se pod úhlem  $\delta = 180^\circ - 2\beta - |\gamma| = 77^\circ$  rovněž vzhledem k vodorovné rovině.



Obr. R5

**3 body**

- c) Zvolíme nový počátek soustavy souřadnic v místě dopadu míčku na střechu, a to tak, že kladný směr osy  $x$  bude směřovat na levou stranu, kladný směr osy  $y$  bude směřovat nahoru (obr. R5). Pak můžeme pro souřadnice míčku po odrazu od střechy psát:

$$x = v_1 t \cos \delta, \quad y = v_1 t \sin \delta - \frac{1}{2} g t^2.$$

Pro souřadnici  $y$  v okamžiku dopadu platí  $y = -H$ . Po dosazení dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_1 t \sin \delta - H = 0,$$

z níž vypočteme dobu dopadu míčku na zem od okamžiku odrazu míčku od střechy. Úloze vyhovuje kořen

$$t = \frac{v_1 \sin \delta + \sqrt{v_1^2 \sin^2 \delta + 2gH}}{g} = 1,61 \text{ s.}$$

Míček dopadne před chlapcem ve vzdálenosti  $d' = d - v_1 t \cos \delta = 2,9 \text{ m}$ .

**3 body**

*Alternativní řešení úlohy b):*

Úhel dopadu míčku na střechu  $\gamma$  (viz obr. R5) můžeme určit derivací vztahu (1) podle  $x$ :

$$y' = \text{tg} \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x.$$

Po dosazení  $x = d$  a za  $v_0$  z (2) dostaneme v bodě dopadu

$$y' = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{2(H-h)}{d} = -\operatorname{tg} \alpha + \frac{2(H-h)}{d} = -0,932,$$

z čehož  $\gamma = -43^\circ$ .

Velikost rychlosti dopadu míčku na střechnu můžeme určit užitím zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgH \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h-H)} = 5,87 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

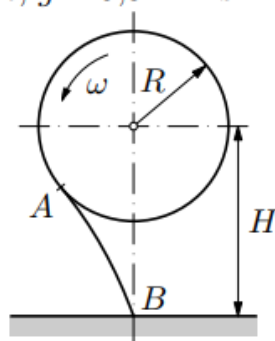
## 12.FO48A3-4: Kapka

[62 %]

Kolo o poloměru  $R = 1,00 \text{ m}$  se otáčí úhlovou rychlostí  $\omega = 5,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  okolo vodorovné osy umístěné ve výšce  $H = 2,00 \text{ m}$  nad zemí. Od kola odlétla kapka a dopadla do bodu  $B$  přesně pod středem kola (obr. 2).

- Určete dobu letu kapky a polohu bodu  $A$ , ve kterém se uvolnila od kola.
- Určete velikost a směr rychlosti dopadu.

Odpor vzduchu zanedbejte,  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



Obr. 2

## Řešení

- Zvolme vztažnou soustavu podle obr. R3 a označme  $\alpha$  úhel, který svírá úsečka  $OA$  se zápornou poloosou  $y$ . Po odtržení od kola koná kapka vrh šikmo dolů s počáteční rychlostí o velikosti  $v_0 = R\omega$  a s elevačním úhlem  $-\alpha$ , který popisují parametrické rovnice

$$x = -R \sin \alpha + v_0 t \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y = -R \cos \alpha - v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2)$$

**2 body**

V okamžiku dopadu platí  $x = 0$ ,  $y = -H$ . Po dosazení do (1) a (2) dostaneme

$$t = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{v_0} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\omega}, \quad (3)$$

$$-R \cos \alpha - R \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - \frac{g \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\omega^2} = -H. \quad (4)$$

Úpravou (4) dojdeme ke kvadratické rovnici  $(g+2\omega^2 H) \cos^2 \alpha - 2\omega^2 R \cos \alpha - g = 0$ .  
 Úloze vyhovuje kladný kořen

$$\cos \alpha = \frac{\omega^2 R + \sqrt{\omega^4 R^2 + g^2 + 2gH\omega^2}}{g + 2\omega^2 H}.$$

Dobu letu pak vypočítáme dosazením do (3).

Pro dané hodnoty vychází  $\cos \alpha = 0,6034$ ,  $\alpha = 52,9^\circ$ ,  $t = 0,264$  s.

**5 bodů**

*Jiný způsob výpočtu doby letu kapky:* Pohyb kapky probíhá jako pohyb složený z rovnoměrného přímočarého pohybu rychlostí  $v_0$  a volného pádu. Z obr. R4 plyne

$$\sqrt{R^2 + v_0^2 t^2} + \frac{1}{2}gt^2 = H.$$

Úpravou dojdeme k rovnici  $\frac{g^2}{4}t^4 - (\omega^2 R^2 + gH)t^2 + H^2 - R^2 = 0$ .

Úloze vyhovuje kořen  $t^2 = \frac{2}{g^2} \left( \omega^2 R^2 + gH - R\sqrt{\omega^4 R^2 + 2\omega^2 gH + g^2} \right)$ ,

neboť doba letu kapky je jistě menší než doba volného pádu z výšky  $H$ , která je  $\sqrt{2H/g}$ .

b) Velikost  $v_d$  rychlosti dopadu určíme užitím zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_d^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg(H - R \cos \alpha)$$

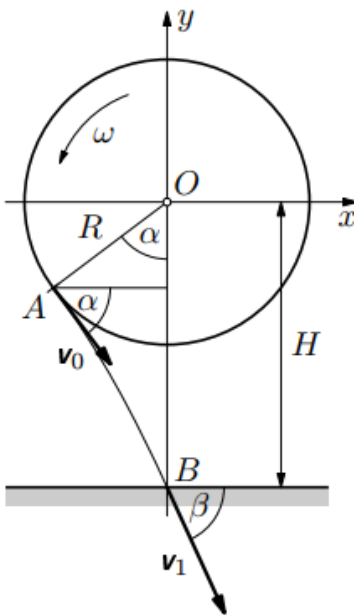
Z toho

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2g(H - R \cos \alpha)} = \sqrt{\omega^2 R^2 + 2g(H - R \cos \alpha)} = 7,24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

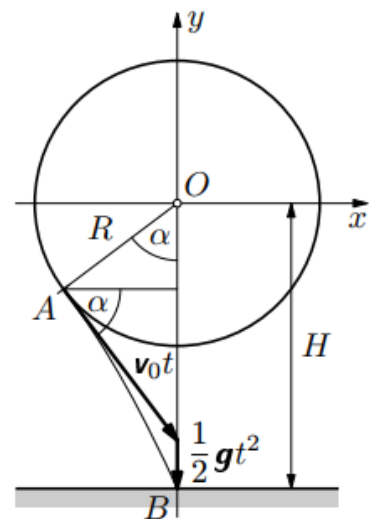
Vodorovná složka rychlosti kapky se během vrhu nemění. Proto

$$v_0 \cos \alpha = v_d \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{v_d} = 0,4168, \quad \beta = 65,4^\circ.$$

**3 body**



Obr. R3



Obr. R4

Algol (beta Persei) je zákrytová dvojhvězda, jejíž dvě složky obíhají okolo společného těžiště po přibližně kruhových trajektoriích s periodou  $T = 2,867$  dne. Rychlosti obou složek mají velikosti  $v_1 = 44,5$  km/s a  $v_2 = 203$  km/s.

- Určete poloměry jejich trajektorií a vyjádřete je v astronomických jednotkách ( $1\text{AU} = 1,50 \cdot 10^8$  km).
- Určete hmotnosti obou složek a porovnejte je s hmotností Slunce ( $m_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg).
- Určete velikost gravitačních sil, kterými na sebe obě složky působí.
- Hodnoty  $v_1, v_2$  byly vypočteny z výsledků spektroskopických měření. Bylo také zjištěno, že radiální rychlost, se kterou se od Slunce vzdaluje těžiště Algolu, má velikost  $v_c = 3,7$  km/s. V jakém rozmezí se mění během dlouhodobého pozorování vlnová délka spektrální čáry draslíku ve spektru meně hmotné složky Algolu, jestliže ve spektru draslíku z pozemského zdroje naměříme hodnotu  $\lambda_0 = 766,491$  nm? Pohyb Země kolem Slunce považujte za rovnoměrný s rychlostí o velikosti  $v_z = 30$  km/s, spojnice Slunce a Algolu je od roviny ekliptiky odchýlena o úhel  $\beta = 11,5^\circ$ .

Gravitační konstanta je  $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N  $\cdot$  m<sup>2</sup>  $\cdot$  kg<sup>-2</sup>.

### Řešení

- a) Poloměry trajektorií jsou

$$r_1 = \frac{v_1 T}{2\pi} = 1,75 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,012 \text{ AU}, \quad r_2 = \frac{v_2 T}{2\pi} = 8,00 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,053 \text{ AU},$$

**1 bod**

- b) Gravitační síly, kterými na sebe obě složky dvojhvězdy vzájemně působí, se uplatňují jako síly dostředivé. Platí

$$\frac{\varkappa m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} r_1, \quad \frac{\varkappa m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_2 \frac{4\pi^2}{T^2} r_2.$$

Vydělíme-li první rovnici  $m_1$ , druhou rovnici  $m_2$  a obě rovnice sečteme, dostaneme

$$\frac{\varkappa (m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} (r_1 + r_2),$$

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2}{\varkappa T^2} (r_1 + r_2)^3 = \frac{T}{2\pi \varkappa} (v_1 + v_2)^3 = 8,96 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Dále platí  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{v_2}{v_1}$ . Z toho

$$m_1 = (m_1 + m_2) \frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{T}{2\pi \varkappa} v_2 (v_1 + v_2)^2 = 7,35 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 3,7 m_\odot,$$

$$m_2 = (m_1 + m_2) \frac{v_1}{v_1 + v_2} = \frac{T}{2\pi \varkappa} v_1 (v_1 + v_2)^2 = 1,61 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 0,81 m_\odot.$$

**4 body**

- c) Gravitační síly vzájemného působení mají velikost

$$F = \frac{\varkappa m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{v_1 v_2 (v_1 + v_2)^2}{\varkappa} = 8,3 \cdot 10^{30} \text{ N}.$$

**1 bod**

- d) Obě složky Algolu se střídavě přibližují k Zemi a vzdalují od Země. Pro menší hmotnou složku Algolu je maximální rychlost vzdalování

$$v' = v_2 + v_c + v_z \cos \beta \doteq 237 \text{ km/s}$$

a maximální rychlost přibližování

$$v'' = v_2 - v_c + v_z \cos \beta \doteq 229 \text{ km/s}.$$

V prvním případě se v důsledku Dopplerova jevu změní maximální vlnová délka spektrální čáry

$$\lambda' = \lambda_0 \sqrt{\frac{c + v'}{c - v'}} \approx \lambda_0 \left( 1 + \frac{v'}{c} \right) = 767,10 \text{ nm},$$

V druhém případě je změřená vlnová délka minimální a má hodnotu

$$\lambda'' = \lambda_0 \sqrt{\frac{c - v''}{c + v''}} \approx \lambda_0 \left( 1 - \frac{v''}{c} \right) = 765,91 \text{ nm}.$$

**4 body**

#### 14.FO60A3-3b: Dvakrát

[50 %]

- b) Doba volného pádu malého tělesa z věže na povrchu Země je  $\tau$ . Jak dlouho by trval volný pád tělesa ze stejné věže na povrchu planety, která má stejnou průměrnou hustotu, ale dvakrát menší poloměr než Země? Odpor atmosféry při pohybu tělesa je zanedbatelný.

**Řešení**

- b) Doba volného pádu tělesa závisí na výšce a na tíhovém zrychlení  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .  
Tíhové zrychlení závisí na hmotnosti planety a na jejím poloměru

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = G \frac{4}{3}\pi R \rho.$$

Bude-li poloměr planety poloviční, bude tíhové zrychlení dvakrát menší a doba volného pádu ze stejné výšky  $\sqrt{2}$ krát větší. **2 body**

Družice Země o hmotnosti  $m = 150 \text{ kg}$  byla navedena na kruhovou oběžnou dráhu o poloměru  $R = 6,70 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

- Jaká je její rychlost a oběžná doba?
- Jaká je celková mechanická energie družice? (Potenciální energii v nekonečné vzdálenosti bereme jako nulovou.)
- Jak se změní poloměr trajektorie a rychlost družice během jednoho oběhu, působí-li na ni horní vrstvy atmosféry odporovou silou o velikosti  $F = 7,50 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ?

Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Hmotnost Země  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , gravitační konstanta  $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

### Řešení

- Z rovnosti gravitační a dostředivé síly

$$\frac{\kappa M m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} = \frac{4\pi^2 m R}{T^2} \quad (1)$$

odvodíme

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M}{R}} = 7720 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}} = 5460 \text{ s}.$$

**2 body**

- Celková mechanická energie  $E$  družice je rovna součtu energie kinetické a energie potenciální:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa M m}{R}.$$

Z (1) odvodíme  $E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{\kappa M m}{2R} = -\frac{E_p}{2}$ . Pak

$$E = \frac{E_p}{2} = -E_k = -\frac{\kappa M m}{2R} = -\frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Celková mechanická energie družice je záporná. Pro dané hodnoty  $E = -4,46 \cdot 10^9 \text{ J}$ .

**3 body**

- Působením odporové síly se během jednoho oběhu celková mechanická energie družice zmenší o spotřebovanou práci:  $\Delta E = -F \cdot 2\pi R$ . Z (2) plyne, že poloměr trajektorie se zmenší, ale rychlost družice se zvětší.

**1 bod**

Pro změnu rychlosti bude platit

$$-\frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2}\right) = -mv\Delta v - \frac{m(\Delta v)^2}{2} = -F \cdot 2\pi R.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$(\Delta v)^2 + 2v\Delta v - \frac{4\pi R F}{m} = 0,$$

jejímž řešením dostaneme

$$\Delta v = -v \pm \sqrt{v^2 + \frac{4\pi RF}{m}}.$$

Podle předcházející úvahy se musí velikost rychlosti družice zvětšit, vyhovovat bude pouze řešení

$$\Delta v = -v + \sqrt{v^2 + \frac{4\pi RF}{m}} = -\sqrt{\frac{\varkappa M}{R}} + \sqrt{\frac{\varkappa M}{R} + \frac{4\pi RF}{m}} = 0,273 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**2 body**

Pro změnu poloměru bude platit

$$-\frac{\varkappa M m}{2(R + \Delta R)} - \left(-\frac{\varkappa M m}{2R}\right) = \frac{\varkappa M m \Delta R}{2(R + \Delta R)R} = -F \cdot 2\pi R.$$

Z toho

$$\Delta R = -\frac{4\pi FR^3}{\varkappa M m + 4\pi R^2 F} = -474 \text{ m}.$$

**2 body**

*Ke stejným výsledkům můžeme rychleji dojít pomocí aproximací:*

Pro změnu rychlosti bude platit

$$-\frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2}\right) \approx -mv\Delta v = -F \cdot 2\pi R,$$

$$\Delta v = \frac{2\pi RF}{mv} = \frac{2\pi RF}{m\sqrt{\frac{\varkappa M}{R}}} = \frac{2\pi FR^{1,5}}{m\sqrt{\varkappa M}} = 0,273 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pro změnu poloměru bude platit

$$-\frac{\varkappa M m}{2(R + \Delta R)} - \left(-\frac{\varkappa M m}{2R}\right) = \frac{\varkappa M m \Delta R}{2(R + \Delta R)R} \approx \frac{\varkappa M m \Delta R}{2R^2} = -F \cdot 2\pi R,$$

$$\Delta R = -\frac{4\pi FR^3}{\varkappa M m} = -474 \text{ m}.$$

### 5.1.4 Mechanika tuhého tělesa

#### 16.FO53A3-3: Vibrátor mobilního telefonu

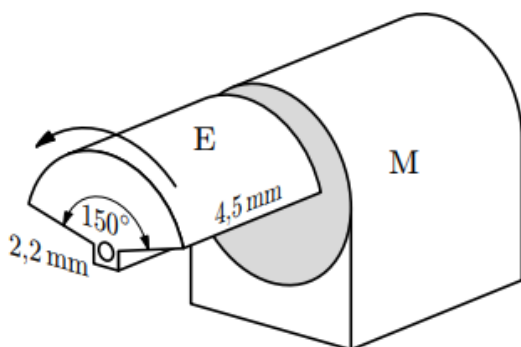
[54 %]

Vibrátor mobilního telefonu (obr. 3) je tvořen miniaturním motorkem M, na jehož ose je nasazen excentr E ve tvaru válcové výseče o poloměru  $r = 2,2$  mm, výšce  $h = 4,5$  mm a středovém úhlu  $2\alpha = 150^\circ$  vyrobený z kovu o hustotě  $\rho = 8\,300$  kg · m<sup>-3</sup>. Motorek se otáčí s frekvencí  $f = 130$  Hz. Těžiště válcové výseče se nachází ve vzdálenosti

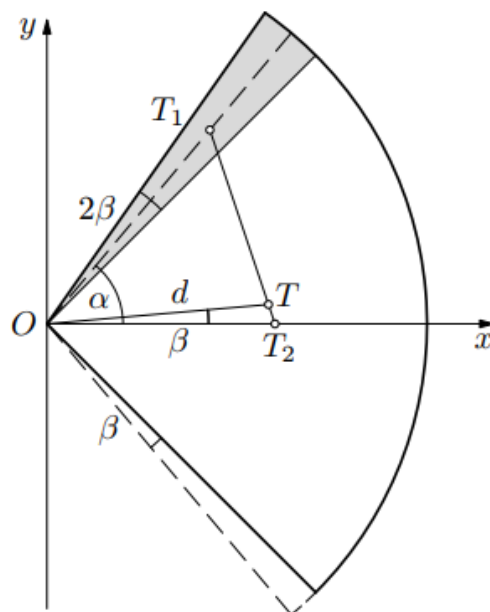
$$d = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha} \quad (1)$$

od osy motorku.

- Odvoďte vzorec (1). Můžete k tomu využít obr. 4, kde je válcová výseč otočena o malý úhel  $\beta$  ze základní polohy symetrické podle osy  $x$ . V pootočené poloze je  $y$ -ová souřadnice těžiště  $y_T = d \sin \beta$ . Těleso si přitom můžeme představit rozdělené na válcovou výseč s malým středovým úhlem  $2\beta$  a těžištěm  $T_1$  ve vzdálenosti  $2r/3$  od osy a na válcovou výseč se středovým úhlem  $2\alpha - 2\beta$  a těžištěm  $T_2$  na ose  $x$ .
- Určete velikost odstředivé síly působící na rotující excentr.



Obr. 3



Obr. 4



## Řešení

- a) Označme  $m$  hmotnost celého tělesa a  $m_1$  hmotnost výseče se středovým úhlem  $2\beta$ . Platí

$$y_T = \frac{m_1 \cdot \frac{2r}{3} \sin \alpha + (m - m_1) \cdot 0}{m} = \frac{2r \sin \alpha}{3} \cdot \frac{m_1}{m} = \frac{2r \sin \alpha}{3} \cdot \frac{2\beta}{2\alpha} = d \sin \beta \approx d \cdot \beta.$$

Z toho  $d = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$ .

**5 bodů**

- b) Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě spojené s rotujícím excentrem. Počátek zvolíme na ose motorku, osa  $x$  prochází těžištěm (obr. R3). Na náhodně zvolený element působí odstředivá síla  $\mathbf{F}_i = m_i \omega^2 \mathbf{r}_i$ . Výsledná odstředivá síla je

$$\mathbf{F} = \sum m_i \omega^2 \mathbf{r}_i = \omega^2 \sum m_i \mathbf{r}_i = \omega^2 m \mathbf{r}_T,$$

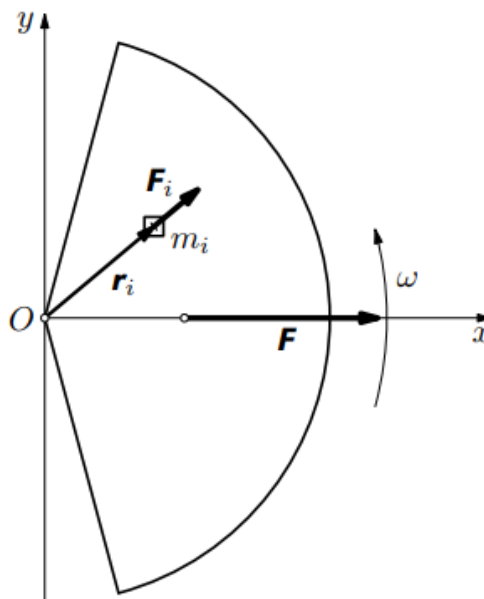
kde  $m$  je celková hmotnost excentru a  $\mathbf{r}_T$  je polohový vektor těžiště. Vzhledem k souměrnosti excentru působí výsledná odstředivá síla  $\mathbf{F}$  v ose  $x$  a má velikost

$$F = \omega^2 m x_T = \omega^2 m d.$$

Hmotnost excentru je  $m = \alpha r^2 h \rho$  a velikost výsledné odstředivé síly je

$$F = 4\pi^2 f^2 \cdot \frac{2}{3} h \rho r^3 \sin \alpha = 0,17 \text{ N.}$$

**5 bodů**



Obr. R3

Alternativní řešení úkolu a) užitím integrálního počtu:

Válcovou výseč umístěnou v základní poloze rozdělíme na elementární válcové výseče s malým středovým úhlem  $d\varphi$  (obr. R4). Těžiště  $T_i$  elementární výseče má  $x$ -ovou souřadnici

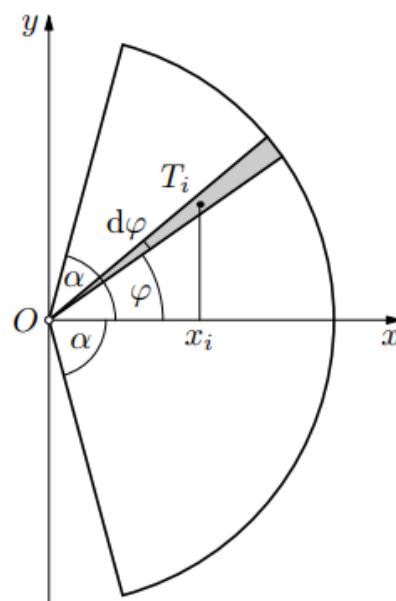
$$x_i = \frac{2}{3}r \cos \varphi,$$

hmotnost elementární výseče je

$$dm = m \frac{d\varphi}{2\alpha}.$$

Pro  $x$ -ovou souřadnici těžiště celého tělesa platí

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m} \int_m x \cdot dm = \frac{1}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3}r \cos \varphi \cdot \frac{m}{2\alpha} d\varphi = \\ &= \frac{r}{3\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}. \end{aligned}$$

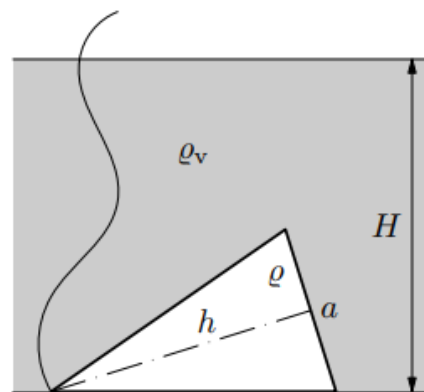


Obr. R4

### 17.FO55A3-1: Ležící jehlan

[50 %]

Na vodorovném dně nádrže s vodou o hloubce  $H$  leží na boku pravidelný homogenní čtyřboký jehlan s délkou podstavné hrany  $a$  a výškou  $h$  (obr. 1). Hustota materiálu jehlanu  $\rho$  je větší než hustota vody  $\rho_v$ . Hloubka nádrže je větší, než stěnová výška jehlanu. Objem nádrže je mnohonásobně větší než objem jehlanu. Jehlan budeme zvedat pomocí niti upevněné k malému háčku na vrcholu.



Obr. 1

- Odvoďte vztah pro výpočet vzdálenosti těžiště pravidelného homogenního jehlanu od podstavy.
- Určete nejmenší práci  $W_1$  potřebnou k postavení jehlanu na jeho podstavu.
- Určete nejmenší práci  $W_2$  potřebnou na vytažení jehlanu stojícího na dně těsně nad hladinu vody.

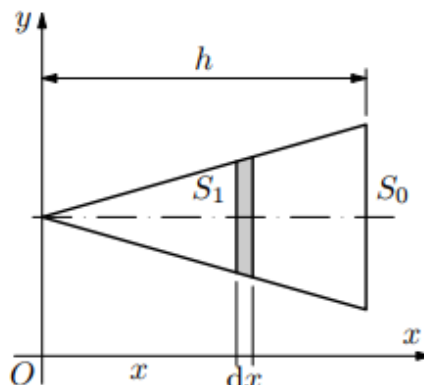
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty:  $H = 1,20$  m,  $a = 10,0$  cm,  $h = 16,0$  cm,  $\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

## Řešení

- a) Pro určení polohy těžiště umístíme jehlan do polohy podle obr. R1. Obsah příčného řezu jehlanem ve vzdálenosti  $x$  od vrcholu je

$$S_1 = S_0 \left( \frac{x}{h} \right)^2,$$

kde  $S_0$  je obsah podstavy. Souřadnici  $x_T$  těžiště určíme integrací:



Obr. R1

$$x_T = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int_0^h x \rho S_1 dx}{\int_0^h \rho S_1 dx} = \frac{\frac{S_0 \rho}{h^2} \int_0^h x^3 dx}{\frac{S_0 \rho}{h^2} \int_0^h x^2 dx} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3}{4}h.$$

Vzdálenost těžiště jehlanu od podstavy je  $h - 0,75h = 0,25h$ .

**3 body**

- b) Abychom převrátili jehlan do svislé polohy, musíme jeho těžiště zvednout nad hranu podstavy (obr. R2). Přitom budeme udržovat svislý směr vlákna, aby nedošlo ke sklouznutí podstavné hrany po dně. Po překročení této vratké polohy už nemusíme konat práci, jehlan se postaví působením tíhové síly. Těžiště jehlanu se nachází v jedné čtvrtině jeho výšky. Výšku  $s$  těžiště ležícího jehlanu nade dnem nádrže stanovíme z podobnosti trojúhelníků  $VSO$  a  $VPT$ :

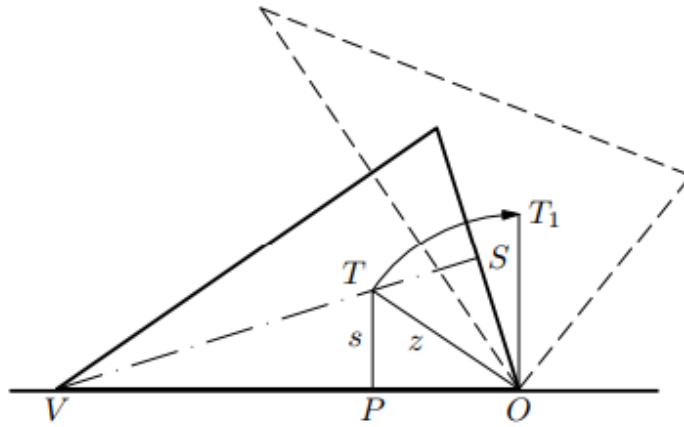
$$\frac{s}{0,75h} = \frac{0,5a}{\sqrt{0,25a^2 + h^2}} \Rightarrow s = \frac{0,375ah}{\sqrt{0,25a^2 + h^2}},$$

jeho vzdálenost od podstavné hrany je  $z = \sqrt{(0,25h)^2 + 0,25a^2}$ . Práce, kterou musíme vykonat při zvednutí jehlanu do vratké polohy, je rovna změně celkové potenciální energie soustavy nádrž–jehlan. Potenciální energie jehlanu se zvětší o  $V \rho g(z - s)$ . Současně se ale zmenší potenciální energie vody v nádrži o  $V \rho_v g(z - s)$ , neboť voda z prostoru, který zabírá stojící jehlan, zaplní prostor, který jehlan zabíral původně. Celkově tedy

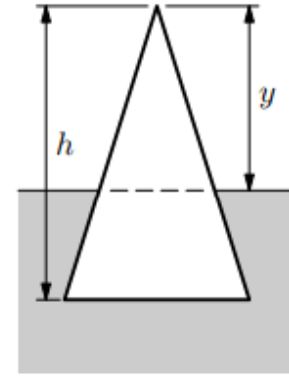
$$W_1 = V(\rho - \rho_v)g(z - s) = \frac{1}{3}a^2h(\rho - \rho_v)g \left( \sqrt{(0,25h)^2 + 0,25a^2} - \frac{0,375ah}{\sqrt{0,25a^2 + h^2}} \right).$$

Číselně vychází  $W_1 = 0,251 \text{ J}$ .

**4 body**



Obr. R2



Obr. R3

- c) Stejnou úvahu můžeme provést i v případě zvedání stojícího jehlanu nad hladinu. Potenciální energie jehlanu se zvětší o  $V\rho gH$  a potenciální energie vody v nádrži se zmenší o  $V\rho_v g(H - 0,25h)$ , neboť voda, která zaplní prostor u dna, kde stál jehlan, bude chybět u hladiny, která nepatrně poklesne. Celkově tedy

$$\begin{aligned} W_2 &= V\rho gH - V\rho_v g(H - 0,25h) = V(\rho - \rho_v)gH + 0,25V\rho_v gh = \\ &= \frac{1}{3}a^2hg[(\rho - \rho_v)H + 0,25\rho_v h]. \end{aligned}$$

Číselně vychází  $W_2 = 10,9 \text{ J}$ .

**3 body**

*Poznámka:*

Výsledek úlohy c) můžeme zkontrolovat výpočtem práce jako dráhového integrálu síly: Do okamžiku, kdy se vrchol jehlanu dotkne hladiny, tedy na dráze  $H - h$ , musíme táhnout konstantní silou o velikosti  $V(\rho - \rho_v)g$  a vykonáme práci

$$W_{21} = V(\rho - \rho_v)g(H - h).$$

Jakmile se vrchol jehlanu dostane nad hladinu (obr. R3), zmenší se vztlaková síla. V okamžiku, kdy vystoupí do výšky  $y$ , plyne z prostorové podobnosti pro objem  $V_1$  vynořené části

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{y}{h}\right)^3$$

a musíme působit silou o velikosti

$$V\rho g - (V - V_1)\rho_v g = V(\rho - \rho_v)g + V\rho_v \left(\frac{y}{h}\right)^3 g.$$

Nad hladinou tedy vykonáme práci

$$W_{22} = \int_0^h \left\{ V(\rho - \rho_v)g + V\rho_v \left(\frac{y}{h}\right)^3 g \right\} dy = Vg \left[ (\rho - \rho_v)y + \frac{\rho_v}{4h^3}y^4 \right]_0^h =$$

$$= Vg \left\{ (\rho - \rho_v)h + \frac{\rho_v h}{4} \right\}.$$

Celková práce při zvednutí jehlanu ze dna nad hladinu je

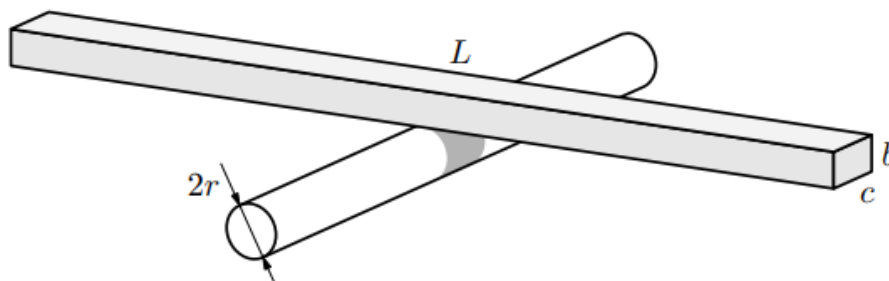
$$W_2 = W_{21} + W_{22} = V(\rho - \rho_v)gH + 0,25V\rho_vgh.$$

### 18.FO46A3-1: Houpačka

[37 %]

Na tyč kruhového průřezu o poloměru  $r = 1,00$  cm upevněnou ve vodorovné poloze je kolmo vodorovně položena homogenní tyč hmotnosti  $m = 310$  g, délky  $L = 20,0$  cm a obdélníkového průřezu výšky  $b = 1,00$  cm a šířky  $c = 2,00$  cm (obr. 1). Střed horní tyče se nachází nad osou dolní tyče.

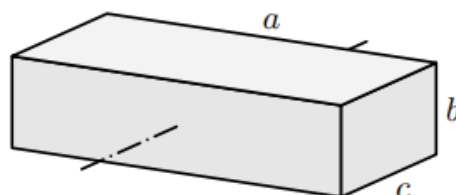
- Ověřte, že při daných rozměrech tyčí se horní tyč nachází ve stabilní rovnovážné poloze.
- Určete periodu  $T$  pohybu tyče, který nastane, jestliže horní tyč nepatrně vychýlíme z rovnovážné polohy a necháme ji volně kývat. Předpokládejte, že úhlové výchylky jsou velmi malé a že mezi povrchy v oblasti kontaktu nedochází ke klouzání. Pasivní odpory zanedbejte.



Obr. 1

Moment setrvačnosti homogenního kvádru a rozměrech  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (obr. 2) vzhledem k ose jdoucí jeho středem rovnoběžně s rozměrem  $c$  je

$$J_0 = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$



Obr. 2

## Řešení

- a) Vyjdeme z obr. R1: Odvalování tyče po válci si můžeme představit jako její rotaci kolem okamžitého pólu  $P$ . Má-li být původní rovnovážná poloha stabilní, musí být moment tíhové síly vzhledem k pólu  $P$  při malém vychýlení namířen proti úhlové výchylce tyče. Vychýlíme-li tyč vpravo o úhel  $\alpha$ , má oblouk  $P_0P$  délku  $r\alpha$ . Vektorová přímka tíhové síly musí procházet vlevo od bodu  $P$ . Proto

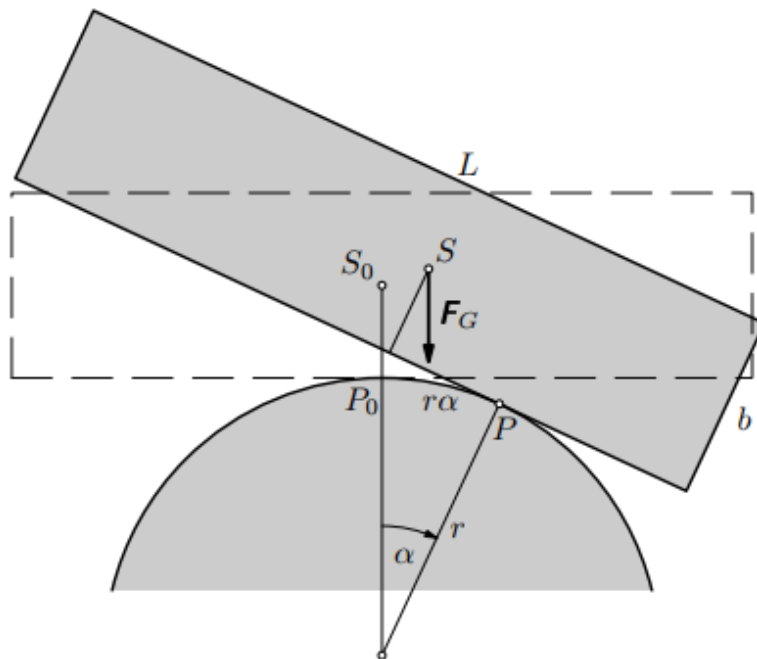
$$r\alpha \cos \alpha > \frac{b}{2} \sin \alpha.$$

Pro malé úhly můžeme položit  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Pak

$$r\alpha > \frac{b}{2}\alpha, \quad r > \frac{b}{2}.$$

Aby rovnovážná poloha horní tyče byla stabilní, musí být její výška  $b$  menší než průměr dolní válcové tyče. To je pro dané hodnoty splněno.

**3 body**



Obr.R1

- b) *Řešení užitím zákona zachování energie:*  
Předpokládáme, že se jedná o harmonické kmity s úhlovou frekvencí  $\omega$ . Pro okamžitou úhlovou výchylku  $\alpha$  horní tyče a pro její úhlovou rychlost  $\Omega$  platí

$$\alpha = \alpha_m \sin \omega t, \quad \Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \omega \alpha_m \cos \omega t,$$

kde  $\alpha_m$  je amplituda úhlové výchylky. Po vychýlení o úhel  $\alpha$  se hmotný střed  $S$  tyče zvedne oproti rovnovážné poloze  $S_0$  do výšky

$$h = r\alpha \sin \alpha - \frac{b}{2}(1 - \cos \alpha) - r(1 - \cos \alpha).$$

Pro malé úhly položíme

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad 1 - \cos \alpha = 1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \approx \frac{\alpha^2}{2}.$$

Pak  $h \approx \left(r - \frac{b}{2}\right) \frac{\alpha^2}{2}$ . Považujeme-li potenciální energii tyče v rovnovážné poloze na nulovou, je v krajní poloze

$$E_p = mg \left(r - \frac{b}{2}\right) \frac{\alpha_m^2}{2}.$$

Při návratu do rovnovážné polohy se tyč otáčí s maximální úhlovou rychlostí  $\Omega_m = \omega \alpha_m$  okolo pólu  $P_0$  a má kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2} J \Omega_m^2,$$

přičemž podle Steinerovy věty  $J = \frac{m(L^2 + b^2)}{12} + m \frac{b^2}{4} = \frac{m(L^2 + 4b^2)}{12}$ .

Ze zákona zachování energie plyne

$$mg \left(r - \frac{b}{2}\right) \frac{\alpha_m^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m(L^2 + 4b^2)}{12} \cdot \omega^2 \alpha_m^2,$$

$$\omega^2 = \frac{12 \left(r - \frac{b}{2}\right) g}{L^2 + 4b^2}, \quad \omega = 2 \sqrt{\frac{3g \left(r - \frac{b}{2}\right)}{L^2 + 4b^2}} = \frac{2\pi}{T}.$$

Tyč bude kývat s periodou  $T = \pi \sqrt{\frac{L^2 + 4b^2}{3g \left(r - \frac{b}{2}\right)}}$ .

**6 bodů**

Pro dané hodnoty  $T = 1,65$  s

**1 bod**

*Řešení užitím pohybové rovnice:*

Vychýlíme-li horní tyč o úhel  $\alpha$ , působí v opačném smyslu moment tíhové síly

$$M = -mg \left(r\alpha \cos \alpha - \frac{b}{2} \sin \alpha\right).$$

Moment setrvačnosti tyče vzhledem k okamžitému pólu  $P$  je

$$J = J_0 + m \left[ (r\alpha)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] = \frac{m(L^2 + b^2)}{12} + m \left[ (r\alpha)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{m [L^2 + 4b^2 + 12(r\alpha)^2]}{12}.$$

Užitím druhé impulsové věty  $M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha}$  dostaneme pohybovou rovnici

$$-mg \left(r\alpha \cos \alpha - \frac{b}{2} \sin \alpha\right) = \frac{m [L^2 + 4b^2 + 12(r\alpha)^2]}{12} \ddot{\alpha}.$$

Pro kmity s malou amplitudou můžeme použít aproximace  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$  a zanedbat člen  $12(r\alpha)^2$ . Pohybová rovnice se zjednoduší na tvar

$$-mg \left( r - \frac{b}{2} \right) \alpha = \frac{m(L^2 + 4b^2)}{12} \ddot{\alpha}, \quad \ddot{\alpha} = \frac{12g \left( r - \frac{b}{2} \right)}{L^2 + 4b^2} \alpha,$$

což je rovnice harmonických kmitů s úhlovou frekvencí  $\omega = 2\sqrt{\frac{3g \left( r - \frac{b}{2} \right)}{L^2 + 4b^2}}$  a

periodou  $T = \pi \sqrt{\frac{L^2 + 4b^2}{3g \left( r - \frac{b}{2} \right)}}$ .

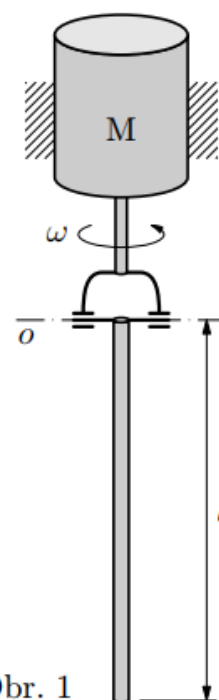
### 19.FO47A3-1: Rotující soustava

(!)[22 %]

Motor je upevněn ve svislé poloze. K dolnímu konci hřídele je otáčivě upevněn konec tyče délky  $l$  a zanedbatelného průřezu tak, že se tyč může otáčet okolo vodorovné osy  $o$  (obr. 1). Rotor motoru se začne otáčet spolu s osou  $o$  a jeho úhlová rychlost se bude velmi pomalu zvětšovat.

- Vysvětlete, proč v reálném zařízení po překročení určité kritické úhlové rychlosti  $\omega_0$  se tyč vychýlí ze svislé polohy.
- Určete, jak bude odchylka obíhající tyče od svislého směru záviset na úhlové rychlosti rotoru.
- Sestrojte graf této závislosti, jestliže  $l = 0,50$  m. Při jaké úhlové rychlosti dosáhne odchylka tyče od svislého směru hodnoty  $60^\circ$ ?

Počítejte s tíhovým zrychlením  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Vliv okolního vzduchu zanedbejte.



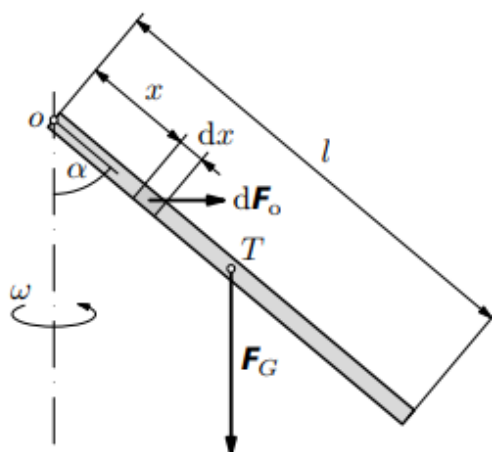
Obr. 1



## Řešení

- a) Úlohu budeme řešit z hlediska pozorovatele ve vztažné soustavě otáčející se spolu s vychýlenou tyčí okolo svislé osy rotoru. Určíme nejprve celkový moment odstředivých sil působících na jednotlivé části tyče vzhledem k vodorovné ose  $o$  procházející koncem tyče (obr. R1). Na element tyče délky  $dx$  ve vzdálenosti  $x$  od osy  $o$  působí odstředivá síla  $d\mathbf{F}_o$  momentem o velikosti

$$dM = |d\mathbf{F}_o| \cdot x \cos \alpha = dm \omega^2 x \sin \alpha \cdot x \cos \alpha = \frac{dx}{l} m \omega^2 x^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$



Obr. R1

Celkový moment odstředivých sil dostaneme integrací:

$$M = \frac{m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{l} \int_0^l x^2 dx = m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{l^2}{3} = m\omega^2 \sin 2\alpha \frac{l^2}{6}. \quad (1)$$

**3 body**

Proti němu působí moment tíhové síly

$$M' = mg \frac{l}{2} \sin \alpha. \quad (2)$$

Pokud tyč vychýlíme jen nepatrně ze svislé rovnovážné polohy, například v důsledku chvění, které se vždy v takovéto rotující soustavě vyskytuje, můžeme psát

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \sin 2\alpha \approx 2 \sin \alpha \approx 2\alpha.$$

Pak

$$M \approx \frac{m\omega^2 l^2 \alpha}{3}, \quad M' = \frac{mgl\alpha}{2}.$$

Jestliže  $M < M'$ , je svislá rovnovážná poloha stabilní, tyč se po malém vychýlení vrátí do svislé polohy. Jestliže  $M > M'$ , je svislá rovnovážná poloha labilní, tyč se

při sebemenší výchylce z rovnovážné polohy bude dále vychylovat, dokud se oba momenty nevyrovnají. Kritická úhlová rychlost  $\omega_0$  je taková, pro kterou při malé výchylce z rovnovážné polohy platí  $M = M'$ . Z rovnosti

$$\frac{m\omega_0^2 l^2 \alpha}{3} = \frac{mgl\alpha}{2}$$

dostaneme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

**2 body**

- b) Odchylku tyče od svislého směru po překročení kritické úhlové rychlosti určíme z rovnosti momentu odstředivých sil a momentu tíhové síly podle (1) a (2):

$$m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{l^2}{3} = mg \frac{l}{2} \sin \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{3g}{2\omega^2 l},$$

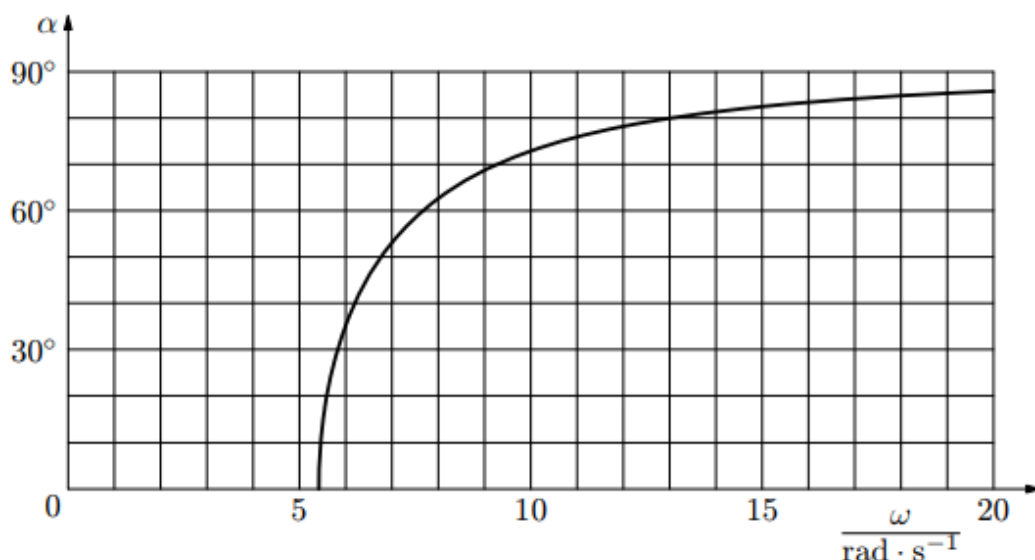
$$\alpha = \arccos \frac{3g}{2\omega^2 l}. \quad (3)$$

**2 body**

- c) Pro  $l = 0,50$  m dostaneme  $\omega_0 = 5,42$  rad  $\cdot$  s $^{-1}$ .

Pomocí vztahu (3) vyplníme tabulku a sestrojíme graf (obr. R2):

$\omega/\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	5,42	6	7	8	10	12	15	20
$\cos \alpha$	1	0,8175	0,6006	0,4598	0,2943	0,2044	0,1308	0,0736
$\alpha$	0°	35,2°	53,1°	62,6°	72,9°	78,2°	82,5°	85,8°



Obr. R2

Odchylky 60° dosáhneme, když

$$\frac{3g}{2\omega^2 l} = \frac{1}{2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 7,67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**3 body**

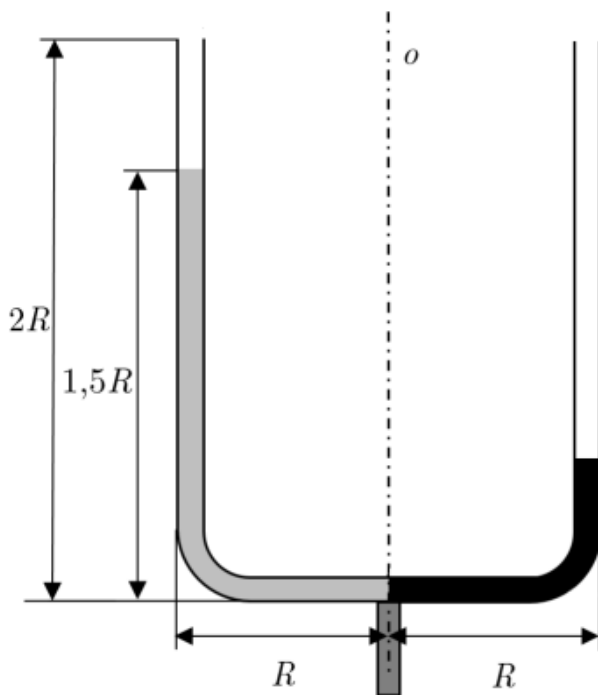
### 5.1.5 Mechanika kapalin a plynů

#### 20.FO60A3-1: U-trubice

[69 %]

V U-trubici s rozměry ramen  $2R = 20,0$  cm jsou nality dvě kapaliny, jedna o hustotě  $\rho_1 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a druhá o hustotě  $\rho_2 = 4000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , které se navzájem nemísí. V počátečním stavu je rozhraní mezi kapalinami právě uprostřed spodního ramena trubice o délce  $2R$  (obr. 1). Hladina kapaliny o menší hustotě je ve výšce  $1,5R$ . Tíhové zrychlení  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Vnitřní průměr trubice je zanedbatelný vzhledem k  $R$ . Kapilární jevy neuvažujte.

- Do jaké výšky  $h_1$  sahá kapalina o větší hustotě?
- O jakou vzdálenost  $d$  se posune rozhraní mezi kapalinami, dolijeme-li do levé části trubice kapalinu o hustotě  $\rho_1$  až po okraj?
- Kterým směrem a o jakou vzdálenost  $x$  by se posunulo rozhraní mezi kapalinami, kdybychom trubici v počátečním stavu roztočili úhlovou rychlostí  $\omega = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  kolem osy souměrnosti?



#### Řešení

- a) Z rovnosti hydrostatických tlaků

$$1,5R\rho_1g = h_1\rho_2g \Rightarrow h_1 = 1,5R\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{8}R = 3,75 \text{ cm.}$$

1 bod

b) Označme  $h_2$  výšku kapaliny v pravém rameni. Pak platí:

$$2R\rho_1g = h_2\rho_2g \Rightarrow h_2 = 2R\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{R}{2}.$$

Rozhraní mezi kapalinami se posune o  $d = h_2 - h_1 = \frac{R}{2} - \frac{3}{8}R = \frac{1}{8}R = 1,25 \text{ cm}$ .

**1 bod**

c) Protože setrvačná odstředivá síla, která působí na obě kapaliny ve vodorovné části trubice, závisí na jejich hmotnosti, posune se rozhraní mezi kapalinami doprava.

**1 bod**

Při otáčení U-trubice působí na každý element hmotnosti  $dm = S\rho dr$  setrvačná odstředivá síla, jejíž velikost závisí na vzdálenosti  $r$  od osy otáčení

$$dF = dm \cdot \omega^2 r = S\rho dr \cdot \omega^2 r.$$

Celková setrvačná odstředivá síla působící na kapalinu ve vodorovné části trubice nacházející se ve vzdálenosti od  $r_1$  do  $r_2$  od osy otáčení je určena integrálem

$$F = \int_{r_1}^{r_2} S\rho\omega^2 r dr = S\rho\omega^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}.$$

Na vodorovný sloupec kapaliny o délce  $R$  a hustotě  $\rho_1$  působí setrvačná odstředivá síla o velikosti  $F_{o1} = S\rho_1\omega^2 \frac{R^2}{2}$  směrem doleva,

**1 bod**

na vodorovný sloupec kapaliny o délce  $x$  a hustotě  $\rho_1$  pak působí setrvačná síla o velikosti  $F_{o2} = S\rho_1\omega^2 \frac{x^2}{2}$  směrem doprava.

**1 bod**

Konečně na vodorovný sloupec kapaliny o délce  $R - x$  a hustotě  $\rho_2$  setrvačná síla o velikosti  $F_{o3} = S\rho_2\omega^2 \frac{R^2 - x^2}{2}$  směrem doprava.

**1 bod**

Protože hladina v pravé části nádoby o vzdálenost  $x$  stoupne a v levé části nádoby o stejnou vzdálenost klesne, musíme vzít v úvahu i změnu hydrostatické tlakové síly.

Hydrostatická tlaková síla působící zleva se sníží o  $\Delta F_1 = x\rho_1gS$ , tlaková síla působící zprava se zvýší o  $\Delta F_2 = x\rho_2gS$ .

**1 bod**

V rovnováze na rozhraní kapalin nyní bude platit

$$F_{o1} + \Delta F_1 = F_{o2} + F_{o3} - \Delta F_2.$$

Po dosazení a zkrácení

$$\rho_1\omega^2 \frac{R^2}{2} - \rho_1\omega^2 \frac{x^2}{2} - \rho_2\omega^2 \frac{R^2 - x^2}{2} + x\rho_1g + x\rho_2g = 0,$$

$$\rho_1\omega^2 R^2 - \rho_1\omega^2 x^2 - \rho_2\omega^2 (R^2 - x^2) + 2xg(\rho_1 + \rho_2) = 0.$$

Úpravou získáme kvadratickou rovnici

$$x^2 + \frac{2xg(\rho_1 + \rho_2)}{\omega^2(\rho_2 - \rho_1)} - R^2 = 0,$$

$$x^2 + 0,08175x - 0,01 = 0.$$

Rovnici vyhovuje kladný kořen  $x = 6,7$  cm.

**3 body**

#### 21.FO52A3-4: Klesání koule

[69 %]

Lehkoatletickou kouli o hmotnosti  $m = 7,26$  kg, vyrobenou z oceli o hustotě  $\rho_k = 7800$  kg · m<sup>-3</sup>, umístíme pod hladinu hluboké vodní nádrže a pustíme.

- Jaké mezní rychlosti dosáhne koule během klesání ke dnu?
- Jakou rychlost získá koule během první sekundy klesání a jak hluboko za tuto dobu klesne?

Úlohu b) řešte numerickým modelováním Eulerovou metodou s časovým krokem  $h = 0,1$  s. Předpokládáme, že pro odpor prostředí platí Newtonův vzorec  $F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2$ . Hustota vody  $\rho = 1000$  kg · m<sup>-3</sup>, součinitel odporu  $C = 0,48$ .

**Řešení**

- Po dosažení mezní rychlosti je tíhová síla působící na kouli v rovnováze se vztlakovou silou

$$F_{vz} = V\rho g = \frac{m\rho g}{\rho_k}$$

a odporovou silou

$$F_o = \frac{1}{2}C \cdot \pi r^2 \rho v_m^2 = K v_m^2.$$

Poloměr koule určíme z její hmotnosti a hustoty:

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho_k r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho_k}}.$$

Pak

$$K = \frac{1}{2}C\pi\rho \left(\frac{3m}{4\pi\rho_k}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Platí

$$mg = \frac{m\rho g}{\rho_k} + K v_m^2 \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{mg(\rho_k - \rho)}{K\rho_k}}.$$

Číselně vychází  $r = 0,06057$  m,  $K = 2,766$  N · s<sup>2</sup> · m<sup>-2</sup>,  $v_m = 4,74$  m · s<sup>-1</sup>.

**3 body**

b) Koule se pohybuje se zrychlením

$$a = \frac{F_G - F_{vz} - F_o}{m} = \frac{g(\varrho_k - \varrho)}{\varrho_k} - \frac{K}{m}v^2.$$

Počáteční podmínky děje jsou

$$a_0 = \frac{g(\varrho_k - \varrho)}{\varrho_k}, \quad v_0 = 0, \quad s_0 = 0.$$

Při použití Eulerovy metody modelování s časovým krokem  $h$  použijeme buď rekurentní vztahy metody AVR

$$a_i = \frac{g(\varrho_k - \varrho)}{\varrho_k} - \frac{K}{m}v_i^2, \quad v_{i+1} = v_i + a_i * h, \quad s_{i+1} = s_i + v_{i+1} * h,$$

nebo rekurentní vztahy metody ARV

$$a_i = \frac{g(\varrho_k - \varrho)}{\varrho_k} - \frac{K}{m}v_i^2, \quad s_{i+1} = s_i + v_i * h, \quad v_{i+1} = v_i + a_i * h.$$

**3 body**

Výsledky výpočtů jsou v prvním případě zapsány v tab. 1, v druhém případě v tab. 2. Oběma způsoby dojdeme k závěru, že koule během první sekundy klesání dosáhne rychlosti přibližně  $4,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , která se blíží k mezní rychlosti, a urazí dráhu přibližně 3 metry. Pokud bychom chtěli získat přesnější hodnoty, museli bychom zmenšit časový krok.

*Poznámka*

Při tvorbě modelu jsme v autorském řešení pracovali s *velikostmi* zrychlení, rychlosti a dráhy. Mohli jste také pracovat se *souřadnicemi* zrychlení, rychlosti a polohy. Pokud jste zvolili směr vzhůru jako kladnou orientaci, vycházely ovšem všechny souřadnice záporné, což není na závadu.

$t / \text{s}$	$a / \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	$v / \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$s / \text{m}$
0,0	8,552	0,000	0,000
0,1	8,552	0,855	0,086
0,2	8,274	1,683	0,254
0,3	7,474	2,430	0,497
0,4	6,303	3,060	0,803
0,5	4,984	3,559	1,159
0,6	3,727	3,931	1,552
0,7	2,664	4,198	1,972
0,8	1,839	4,382	2,410
0,9	1,238	4,505	2,860
1,0	0,819	4,587	3,319

tab. 1

$t / \text{s}$	$a / \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	$v / \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$s / \text{m}$
0,0	8,552	0,000	0,000
0,1	8,552	0,855	0,000
0,2	8,274	1,683	0,086
0,3	7,474	2,430	0,254
0,4	6,303	3,060	0,497
0,5	4,984	3,559	0,803
0,6	3,727	3,931	1,159
0,7	2,664	4,198	1,552
0,8	1,839	4,382	1,972
0,9	1,238	4,505	2,410
1,0	0,819	4,587	2,860

tab.2  
**4 body**

### Analytické řešení úlohy

Pohybovou rovnicí klesající koule

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{g(\varrho_k - \varrho)}{\varrho_k} - \frac{K}{m}v^2$$

můžeme upravit na tvar

$$dt = \frac{dv}{P - Qv^2} = \frac{dv}{2\sqrt{P}} \left( \frac{1}{\sqrt{P} + \sqrt{Q}v} + \frac{1}{\sqrt{P} - \sqrt{Q}v} \right),$$

kde  $P = \frac{g(\varrho_k - \varrho)}{\varrho_k}$ ,  $Q = \frac{K}{m}$ . Integrací dostaneme

$$\int_0^t dt = t = \frac{1}{2\sqrt{P}} \left( \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{P} + \sqrt{Q}v} + \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{P} - \sqrt{Q}v} \right) = \frac{1}{2\sqrt{PQ}} \ln \frac{\sqrt{P} + \sqrt{Q}v}{\sqrt{P} - \sqrt{Q}v}.$$

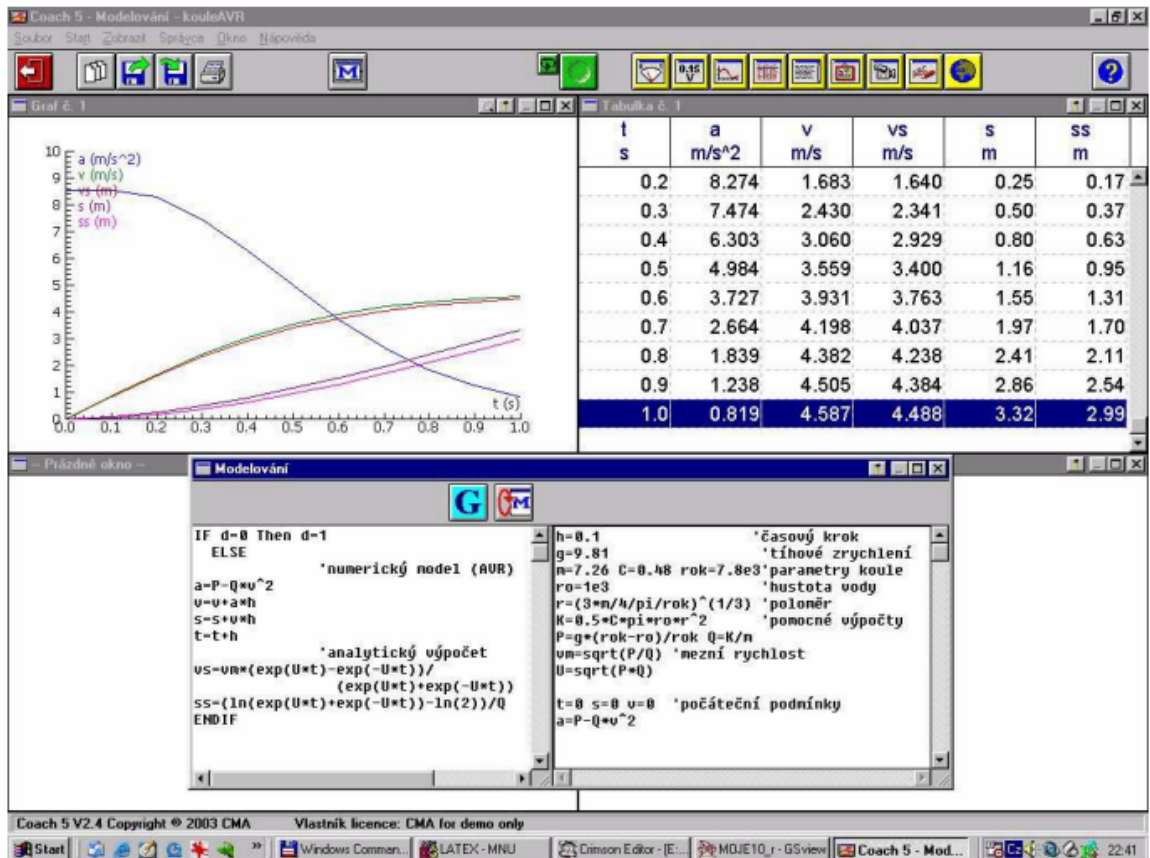
Z toho

$$\begin{aligned} \sqrt{P} + \sqrt{Q}v &= (\sqrt{P} - \sqrt{Q}v) e^{2t\sqrt{PQ}}, \\ v &= \frac{\sqrt{P} (e^{2t\sqrt{PQ}} - 1)}{\sqrt{Q} (e^{2t\sqrt{PQ}} + 1)} = v_m \frac{e^{t\sqrt{PQ}} - e^{-t\sqrt{PQ}}}{e^{t\sqrt{PQ}} + e^{-t\sqrt{PQ}}} = v_m \operatorname{tgh}(t\sqrt{PQ}). \end{aligned}$$

Druhou integrací dostaneme

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t v dt = \frac{v_m}{\sqrt{PQ}} \left[ \ln (e^{t\sqrt{PQ}} + e^{-t\sqrt{PQ}}) - \ln 2 \right] = \\ &= \frac{1}{Q} \ln \frac{e^{t\sqrt{PQ}} + e^{-t\sqrt{PQ}}}{2} = \frac{1}{Q} \ln [\operatorname{cosh}(t\sqrt{PQ})]. \end{aligned}$$

Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že koule za 1 sekundu od uvolnění získala rychlost  $4,49 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a urazila dráhu 2,99 m. Na následujícím obrázku pořízeném programem Coach 5 můžeme porovnat, jak se po jednotlivých krocích liší výsledky ( $v, s$ ) našeho numerického modelu získaného metodou AVR od přesných hodnot ( $vs, ss$ ) analytického výpočtu.



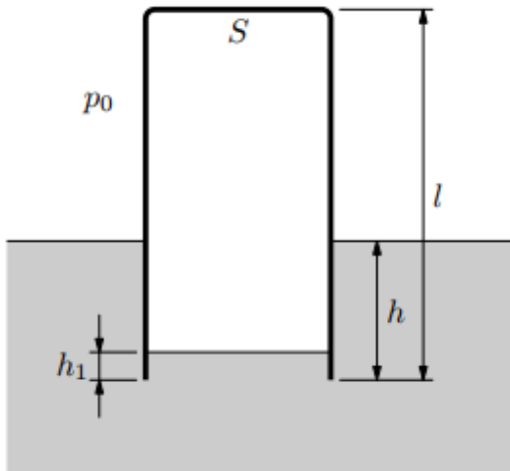
## 22.FO51A3-1: Zasouvání nádoby pod hladinu

[49 %]

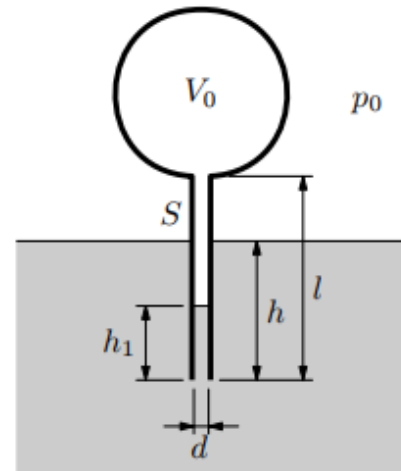
- Do nádoby s vodou pomalu zasouváme válcovou nádobku obrácenou dnem vzhůru (obr. 1). Dno nádoby má obsah  $S$ , výška  $l$  nádoby je mnohem menší než výška  $H$  vodního sloupce, který by vyvolal hydrostatický tlak rovný barometrickému tlaku  $p_0$ . Na počátku se nádobka dotkne hladiny a klesá až do hloubky  $h = l$ . Dokažte, že výška  $h_1$ , do které vystoupí hladina vody uvnitř nádoby nad její okraj, je přibližně přímo úměrná hloubce  $h$  okraje nádoby pod okolní hladinou, a určete konstantu úměrnosti  $k_1$ .
- Stejný pokus provedeme s baňkou s úzkým válcovým hrdlem délky  $l \ll H$  a vnitřním průřezem o obsahu  $S$  (obr. 2). Objem baňky i s hrdlem je  $V_0$ . Dokažte, že i v tomto případě je výška  $h_1$  přibližně přímo úměrná hloubce  $h$ , a určete konstantu úměrnosti  $k_2$ . Jaký musí být průměr  $d$  hrdla při daném objemu  $V_0$ , aby platilo  $h_1 \approx h/2$ ?



Úlohu řešte obecně a pak úlohu a) pro hodnoty  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $S = 50 \text{ cm}^2$ ,  $l = 20 \text{ cm}$ , úlohu b) pro hodnoty  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $l = 20 \text{ cm}$ ,  $V_0 = 1,00 \text{ dm}^3$ . Hustota vody  $\rho = 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , vliv vodních par v nádobách zanedbejte.



Obr. 1



Obr. 2

### Řešení

- a) Zpočátku je v nádobce vzduch o objemu  $V_0 = Sl$  a tlaku  $p_0 = \rho g H$ . Jak nádobka pomalu klesá, probíhá izotermický děj, při kterém se tlak zvětšuje o hydrostatický tlak odpovídající rozdílu hladin a objem se zmenšuje. Podle Boylova-Mariottova zákona platí

$$V_0 p_0 = (V_0 - Sh_1)[p_0 + \rho g(h - h_1)].$$

Dosazením a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} Sl \cdot \rho g H &= (Sl - Sh_1)[\rho g H + \rho g(h - h_1)], \\ lH &= (l - h_1)(H + h - h_1) = lH + lh - lh_1 - Hh_1 - hh_1 + (h_1)^2, \\ h_1(H + l + h - h_1) &= lh. \end{aligned}$$

Protože  $H \gg l > h > h_1$ , můžeme v závorce veličiny  $l$ ,  $h$  a  $h_1$  zanedbat a dojdeme tak k aproximaci

$$h_1 \approx \frac{l}{H} h = k_1 h, \quad \text{kde } k_1 = \frac{l}{H}$$

je konstanta úměrnosti. Pro dané hodnoty je

$$H = \frac{p_0}{\rho g} = 10,2 \text{ m}, \quad k_1 = 0,0196 \approx 0,02.$$

Hladina uvnitř nádobky vystoupí jen nepatrně. Pro maximální hodnotu  $h = l = 0,2 \text{ m}$  je  $h_1 = 4 \text{ mm}$ . **4 body**

b) Podobně budeme postupovat i v případě baňky s úzkým hrdlem. Platí

$$V_0 p_0 = (V_0 - Sh_1)[p_0 + \rho g(h - h_1)].$$

Dosazením a úpravou dostaneme

$$V_0 \cdot \rho g H = (V_0 - Sh_1)[\rho g H + \rho g(h - h_1)],$$

$$V_0 H = (V_0 - Sh_1)(H + h - h_1) = V_0 H + V_0 h - V_0 h_1 - SH h_1 - Sh h_1 + S(h_1)^2,$$

$$V_0 h = h_1(V_0 + SH + Sh - Sh_1) \approx h_1(V_0 + SH),$$

neboť členy  $Sh$  a  $Sh_1$  můžeme v závorce vedle  $V_0$  a  $SH$  zanedbat. Pak

$$h_1 \approx \frac{V_0}{V_0 + SH} h = k_2 h, \quad \text{kde} \quad k_2 = \frac{V_0}{V_0 + SH} = \frac{4V_0}{4V_0 + \pi d^2 H}$$

je konstanta úměrnosti.

**4 body**

Aby platilo  $h_1 = h/2$ , tj.  $k_2 = 0,5$ , musí být

$$d = \sqrt{\frac{4V_0}{\pi H}} = 11,2 \text{ mm.}$$

**2 body**

## 5.2 Molekulová fyzika a termika

### 5.2.1 Vnitřní energie, práce, teplo

#### 23.FO62A3-3: Rozpouštění soli

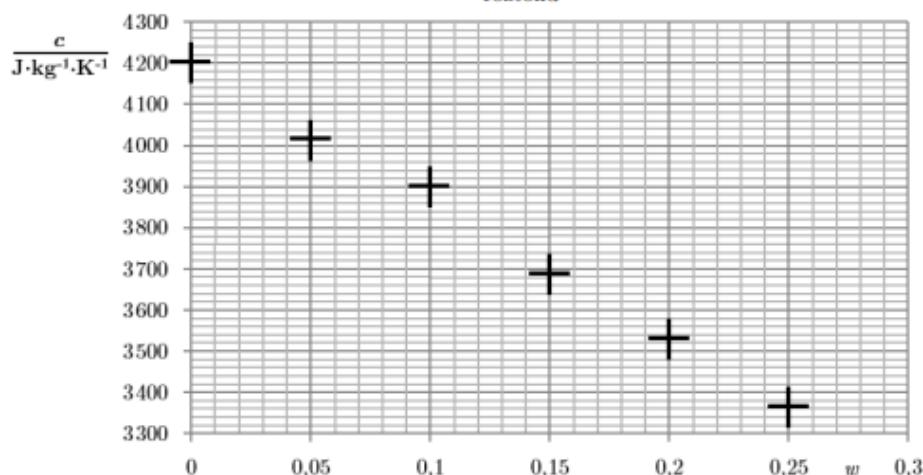
[46 %]

Vhodíme-li do vroucí vody trochu kuchyňské soli, voda na chvíli přestane vařit.

- a) Určete, k jakému snížení teploty dojde pouze tepelnou výměnou, uvážíme-li, že sůl má před vhozením do vody pokojovou teplotu. Podle směšovacího pravidla je tepelná kapacita směsi rovna součtu tepelných kapacit jednotlivých složek.

K určení měrné tepelné kapacity  $c_s$  chloridu sodného využijte experimentem získaný graf závislosti měrné tepelné kapacity  $c$  solného roztoku na jeho koncentraci  $w$ .

Koncentraci definujeme jako podíl  $w = \frac{m_s}{m_{\text{roztoku}}}$ , kde  $m_s$  je hmotnost soli.



Obr. 2

- b) Určete, k jakému snížení teploty dojde, uvážíme-li, že na samotné rozpouštění soli je potřeba dodat rozpouštěcí teplo  $q$ .

Závislost rozpouštěcího tepla soli  $q$  na hmotnosti soli  $m_s$  připadající na 1 kg vody při teplotách blízkých teplotě varu vody je v tabulce:

$\frac{m_s}{\text{g}}$	10	50	100	200	350
$\frac{q}{\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$	72,3	66,2	57,3	42,5	32,2

- c) S využitím přiložené tabulky závislosti bodu varu na koncentraci soli ukažte, že zvýšení bodu varu vody je úměrné podílu hmotnosti soli a hmotnosti vody

$\Delta t = \frac{km_s}{m_v}$  a určete zvýšení bodu varu vody.

$\frac{w}{\%}$	0	5	10	15	20	25
$\frac{t_v}{\text{°C}}$	100	100,5	101,0	101,6	102,2	102,9

- d) Při uvážení všech tří jevů vypočítejte, za jak dlouho bude voda znovu vařit, jestliže zahřátí 1 kg čisté vody z teploty  $t = 20 \text{ °C}$  na teplotu varu  $t_v = 100 \text{ °C}$  za stejných podmínek trvalo 6 minut.

Měrná tepelná kapacita vody  $c_v = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Počáteční teplota soli  $t = 20 \text{ °C}$ . Hmotnost vody  $m_v = 1,0 \text{ kg}$ , hmotnost soli  $\alpha) m_{s1} = 25 \text{ g}$ ,  $\beta) m_{s2} = 250 \text{ g}$ .

## Řešení

- a) Označme úbytek teploty  $\Delta t$ . Z kalorimetrické rovnice

$$m_v c_v \Delta t = c_s m_s (t_v - \Delta t - t)$$

vyjádříme

$$\Delta t = \frac{c_s m_s (t_v - t)}{m_v c_v + c_s m_s}.$$

Podle směšovacího pravidla  $c(m_v + m_s) = m_v c_v + m_s c_s$ .

Protože  $w = \frac{m_s}{m_v + m_s}$ ,  $\frac{m_v}{m_v + m_s} = 1 - w$ , můžeme měrnou tepelnou kapacitu roztoku vyjádřit jako

$$c = c_v (1 - w) + c_s w = c_v - (c_v - c_s) w.$$

Závislost tepelné kapacity roztoku na jeho koncentraci je tedy lineární, směrnice přímky je

$$k = -(c_v - c_s) \Rightarrow -\frac{4\,200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} - 3\,360 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{0,25} =$$
$$= -3\,360 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1},$$

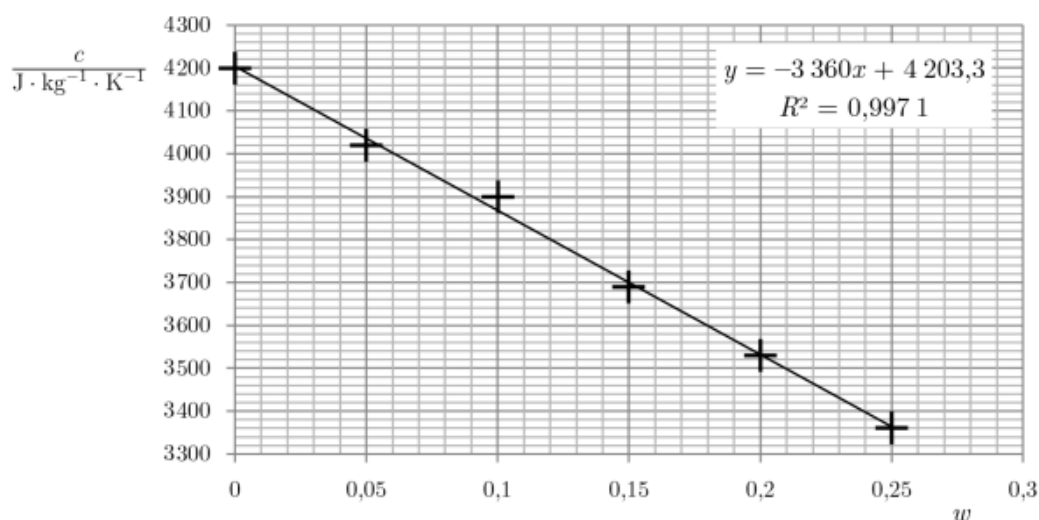
měrná tepelná kapacita čisté soli  $c_s = 840 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Teplota vody se tedy sníží o

$$\alpha) \Delta t_1 = \frac{c_s m_{s1} (t_v - t)}{m_v c_v + c_s m_{s1}} = 0,40 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$\beta) \Delta t_2 = \frac{c_s m_{s2} (t_v - t)}{m_v c_v + c_s m_{s2}} = 3,8 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Pro ilustraci uvádíme parametry lineární regrese:



Obr. R2

- b) Závislost rozpouštěcího tepla soli na její hmotnosti v 1 kg vody je také přibližně lineární, můžeme tedy napsat

$$q = am_s + b,$$

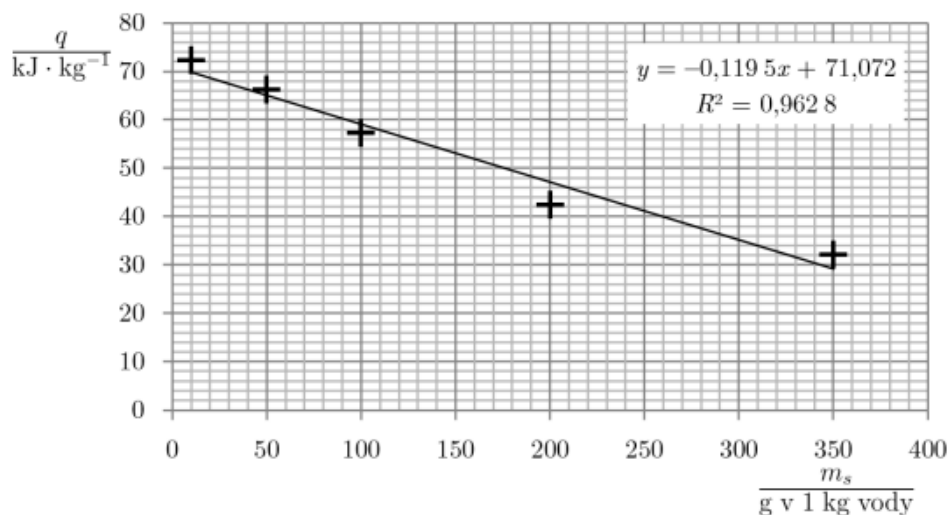
pro krajní meze intervalu (10; 350) dostaneme

$$72,3 = 10a + b,$$

$$32,2 = 350a + b.$$

Odtud  $a = -0,12 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{g}}$ ,  $b = 73,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ .

Pro ilustraci uvádíme přesné parametry lineární regrese:



Obr. R3

Pro  $m_{s1} = 25$  g dostaneme  $q_1 = 25a + b = 70,5$  kJ/kg,

pro  $m_{s2} = 250$  g dostaneme  $q_2 = 250a + b = 44$  kJ/kg.

Na rozpuštění soli je potřeba teplo  $qm_s$ . Z kalorimetrické rovnice

$$qm_s = (m_v c_v + c_s m_s) \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{qm_s}{(m_v c_v + c_s m_s)}.$$

Snížení teploty pro  $m_{s1} = 25$  g  $\Delta t_1 = 0,40$  °C.

Snížení teploty pro  $m_{s2} = 250$  g  $\Delta t_2 = 2,5$  °C.

**3 body**

c) Upravíme vztah pro koncentraci

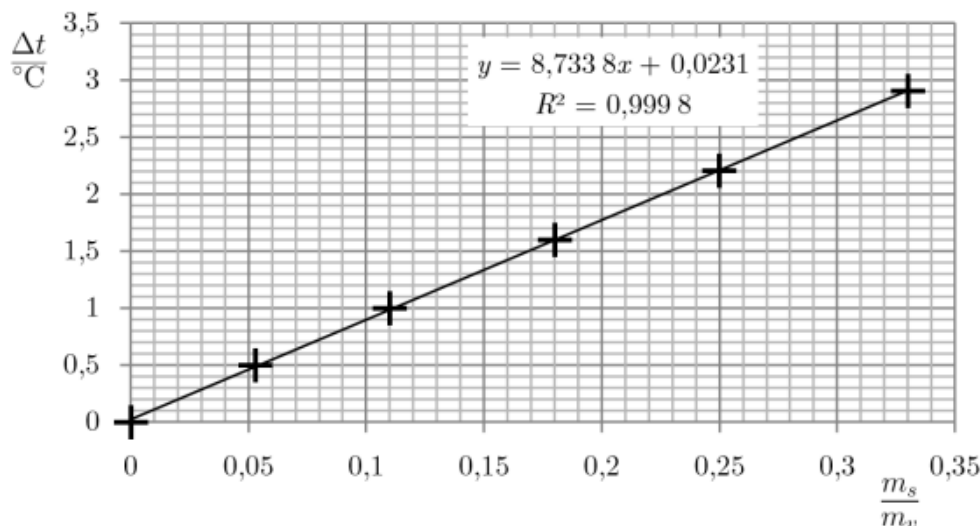
$$w = \frac{m_s}{m_v + m_s} = \frac{1}{1 + \frac{m_v}{m_s}} \Rightarrow \frac{m_s}{m_v} = \frac{w}{1 - w}$$

Doplníme tabulku závislosti bodu varu na koncentraci soli:

$\frac{w}{\%}$	0	5	10	15	20	25
$\frac{m_s}{m_v}$	0	0,053	0,11	0,18	0,25	0,33
$\frac{t_v}{^\circ\text{C}}$	100	100,5	101,0	101,6	102,2	102,9
$\frac{\Delta t}{^\circ\text{C}}$	0	0,5	1,0	1,6	2,2	2,9

Podle předpokladu jde o lineární závislost  $\Delta t = k \frac{m_s}{m_v}$ , tedy  $k = \frac{\Delta t}{\frac{m_s}{m_v}} = 8,7 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Hodnoty konstanty  $k$  můžeme opět porovnat s přesnými parametry lineární regrese:



Obr. R4

Pro  $m_{s1} = 25 \text{ g}$  je  $\Delta t_1 = k \frac{m_{s1}}{m_v} = 0,22 \text{ }^\circ\text{C}$ , pro  $m_{s2} = 250 \text{ g}$  je  $\Delta t_2 = k \frac{m_{s2}}{m_v} = 2,2 \text{ }^\circ\text{C}$ . **2 body**

d) Roztok budeme muset ještě ohřát o  $\Delta t_1 = (0,42 + 0,4 + 0,22) \text{ }^\circ\text{C} = 1 \text{ }^\circ\text{C}$  při přidání 25 g soli nebo o  $\Delta t_2 = (3,8 + 2,5 + 2,2) \text{ }^\circ\text{C} = 8,5 \text{ }^\circ\text{C}$  při přidání 250 g soli. K tomu bude třeba ještě zahřívát po dobu  $\tau_1 = \frac{360 \text{ s}}{80 \text{ }^\circ\text{C}} \cdot 1 \text{ }^\circ\text{C} = 4,5 \text{ s}$  při přidání 25 g soli nebo  $\tau_2 = \frac{360 \text{ s}}{80 \text{ }^\circ\text{C}} \cdot 8,5 \text{ }^\circ\text{C} = 38,3 \text{ s}$  při přidání 250 g soli.

**2 body**

## 5.2.2 Vlastnosti plynných látek

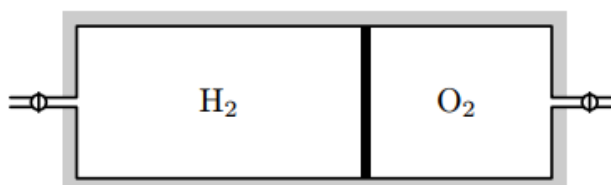
### 24.FO50A3-3: Válec s pístem

[70 %]

Dokonale tepelně izolovaná válcová nádoba o celkovém objemu  $V = 20,0 \text{ dm}^3$  je rozdělena na dvě části lehce pohyblivým pístem zanedbatelné hmotnosti (obr. 2). Do levé části nádoby napustíme vodík o hmotnosti  $m_1 = 3,00 \text{ g}$  a teplotě  $T_1 = 300 \text{ K}$ , do pravé části kyslík o hmotnosti  $m_2 = 16,0 \text{ g}$  a teplotě  $T_2 = 400 \text{ K}$ . Píst slabě vede teplo a teploty v obou částech nádoby se postupně vyrovnají.

- Určete počáteční objemy vodíku a kyslíku  $V_1, V_2$  a počáteční tlak  $p_0$  plynů v nádobě.
- Určete teplotu  $T$ , tlak  $p'$  a objemy  $V'_1, V'_2$  plynů po vyrovnání teplot.
- Určete teplo, které během celého děje projde pístem.

Vnitřní energie  $n$  molů ideálního plynu s dvouatomovými molekulami je  $\frac{5}{2}nRT$ .



Obr. 2

### Řešení

- Ze stavové rovnice ideálního plynu odvodíme:

$$p_0 V_1 = n_1 R T_1, \quad p_0 V_2 = n_2 R T_2, \quad p_0 V = R(n_1 T_1 + n_2 T_2),$$

kde  $n_1 = m_1/M_{m1} = 1,4881 \text{ mol}$ ,  $n_2 = m_2/M_{m2} = 0,500 \text{ mol}$  jsou látková množství vodíku a kyslíku. Z toho

$$p_0 = \frac{R(n_1 T_1 + n_2 T_2)}{V} = 2,69 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$V_1 = V \frac{n_1 T_1}{n_1 T_1 + n_2 T_2} = 13,8 \text{ dm}^3, \quad V_2 = V \frac{n_2 T_2}{n_1 T_1 + n_2 T_2} = 6,2 \text{ dm}^3.$$

**3 body**

- Protože nádoba je dokonale tepelně izolovaná, je celková vnitřní energie  $U$  obou plynů konstantní. Ze zákona zachování energie plyne

$$U = \frac{5}{2}n_1 R T_1 + \frac{5}{2}n_2 R T_2 = \frac{5}{2}(n_1 + n_2) R T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} = 325 \text{ K}.$$

Po vyrovnání teplot je objem jednoho molu vodíku stejný jako objem jednoho molu kyslíku. Platí

$$V_1' : V_2' : V = n_1 : n_2 : (n_1 + n_2),$$

$$V_1' = \frac{n_1 V}{n_1 + n_2} = 15,0 \text{ dm}^3, \quad V_2' = \frac{n_2 V}{n_1 + n_2} = 5,0 \text{ dm}^3,$$

$$p'V_1' + p'V_2' = p'V = (n_1 + n_2)RT = n_1RT_1 + n_2RT_2,$$

$$p' = \frac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = p_0.$$

**4 body**

- c) Podle předpokladu píst vede teplo slabě, proto se teploty vyrovnávají pomalu a děj můžeme považovat za rovnovážný. Jestliže v určitém okamžiku teplota vodíku stoupne na hodnotu  $T_1^*$  a teplota kyslíku klesne na hodnotu  $T_2^*$ , platí podle zákona zachování energie

$$U = \frac{5}{2}n_1RT_1^* + \frac{5}{2}n_2RT_2^* = \frac{5}{2}n_1RT_1 + \frac{5}{2}n_2RT_2 = \text{konst.}$$

Tlak plynů v daném okamžiku je  $p^* = \frac{R(n_1T_1^* + n_2T_2^*)}{V} = \frac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = p_0$ .

Tlak plynů v nádobě se tedy během děje nemění, jedná se tedy u vodíku, jehož teplota vzroste, o izobarickou expanzi a u kyslíku, jehož teplota poklesne, o izobarickou kompresi. Teplo  $Q$ , které kyslík předá vodíku, je rovno součtu přírůstku vnitřní energie vodíku a práce vykonané vodíkem při posunutí pístu. Platí

$$Q = \frac{5}{2}n_1R(T - T_1) + p_0(V_1' - V_1) = \frac{5}{2}n_1R(T - T_1) + n_1R(T - T_1) =$$

$$= \frac{7}{2}n_1R(T - T_1) = \frac{7n_1n_2}{2(n_1 + n_2)}R(T_2 - T_1) = 1090 \text{ J.}$$

**3 body**

## 25.FO60A3-2: Píst s čočkou

[35 %]

Vodorovně ležící válec o objemu  $V = 2,0 \text{ l}$  je rozdělen na dvě části hladkým, pohyblivým pístem, v němž je umístěna tenká čočka, jejíž optický střed je v ose válce (obr. 2). V levé části válce je plyn s jednoatomovými molekulami o atmosférickém tlaku  $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , v pravé části je plyn s dvouatomovými molekulami o stejném tlaku, jehož látkové množství je  $k$ -krát větší.

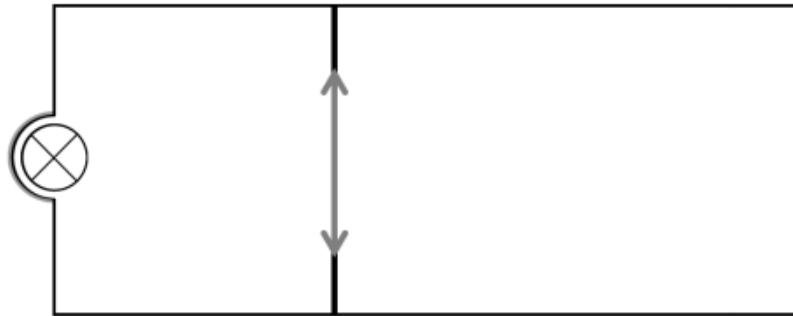
Uprostřed levé základny je umístěna žárovka se žhaveným kovovým vláknem. Připojíme-li lampu na ideální zdroj napětí  $U_e = 4,0 \text{ V}$ , bude žárovkou procházet proud  $I = 0,32 \text{ A}$ , vlákno se rozžárí a zobrazí se jasně na stínítku. Velikost obrazu  $y_1 = 4,0 \text{ cm}$ . Obraz se ale postupně rozostří na světlou skvrnu, aby po určité době  $t$  vznikl opět ostrý obraz o velikosti  $y_2 = 1,0 \text{ cm}$ .



Tepelná kapacita povrchu válce, pístu s čočkou, levé základny se žárovkou je ve srovnání s plynem zanedbatelně malá. energii elektromagnetického záření prošlého čočkou považujte za zanedbatelnou vzhledem k elektrické energii dodané do žárovky. Píst, čočku i válec považujte za dokonalé tepelné izolanty, s výjimkou pravého dna, které je dokonale tepelně vodivé a zajišťuje tak stálou teplotu v pravé části válce. Počáteční teplota plynu v obou částech nádoby je na počátku měření shodná.

- Jakou velikost  $y$  má vlákno žárovky?
- Určete hodnotu čísla  $k$  a vypočítejte, jaký tlak bude v levé a v pravé části nádoby, když na stínítku vznikne opět ostrý obraz vlákna žárovky.
- Jakou elektrickou energii spotřebuje žárovka a za jakou dobu  $t$  vznikne na stínítku opět ostrý obraz vlákna žárovky?

Předpokládejte, že veškeré teplo vydávané žhavým vláknem žárovky zahřeje plyn ve válci.



Obr. 2

### Řešení

- Označme vzdálenost pístu od levé základny  $a$ , od pravé základny  $b$  a výšku válce  $l$ . Na počátku děje platí:

$$\frac{y_1}{y} = \frac{b}{a} \quad (1)$$

a po jeho skončení

$$\frac{y_2}{y} = \frac{b_1}{a_1}. \quad (2)$$

Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$$

a z rovnice  $a + b = a_1 + b_1$  zjistíme, že ostrý obraz podruhé vznikne, když bude  $a_1 = b$  a  $b_1 = a$ . Ze vztahů (1) a (2) plyne

$$y^2 = y_1 y_2 \frac{a a_1}{b b_1} = y_1 y_2 \Rightarrow y = \sqrt{y_1 y_2} = 2,0 \text{ cm.}$$

**3 body**

- b) Označme  $V_1$  počáteční objem levé části a  $V_2$  počáteční objem pravé části nádoby,  $n_1$  látkové množství jednoatomového plynu v levé části nádoby a  $n_2$  látkové množství dvouatomového plynu v pravé části nádoby. Pro celkový objem platí

$$V = V_1 + V_2. \quad (3)$$

Protože poměr velikosti obrazu a předmětu je na počátku pokusu 2 : 1 a na konci pokusu 1 : 2 a průřez válce je stálý, je i poměr  $\frac{V_2}{V_1} = 2$ . V okamžiku vzniku druhého ostrého obrazu na stínítku bude objem levé části nádoby  $V_2$  a pravé části  $V_1$ . Protože tlak a teplota v levé i v pravé části nádoby byly na počátku stejné, bude ze stavové rovnice platit

$$k = \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} = 2. \quad (4)$$

V pravé části nádoby se plyn izotermicky stlačil, tedy podle Boyle–Mariotteova zákona bude jeho konečný tlak

$$p = p_0 \frac{V_2}{V_1} = p_0 \frac{n_2}{n_1} = kp_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad (5)$$

stejný tlak bude i v levé části nádoby.

**2 body**

- c) Energie získaná z žárovky se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie plynu v levé části nádoby a na práci vnějších sil při izotermickém stlačení v pravé části nádoby s využitím vztahů (3), (4) a (5):

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + W' = \\ &= \frac{3}{2}(pV_2 - p_0V_1) + p_0V_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2}[kp_0(V - V_1) - p_0V_1] + p_0(V - V_1) \ln k = \\ &= \frac{3}{2} \left[ kp_0 \left( V - \frac{V}{k+1} \right) - p_0 \frac{V}{k+1} \right] + p_0 \left( V - \frac{V}{k+1} \right) \ln k = \\ &= p_0V \left[ \frac{3}{2}(k-1) + \frac{k \ln k}{k+1} \right] = p_0V \left[ \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \ln 2 \right] = 390 \text{ J}. \end{aligned}$$

**3 body**

Pro tepelný výkon žárovky platí

$$\begin{aligned} P = U \cdot I = \frac{Q}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{Q}{UI} = \frac{p_0V}{UI} \left[ \frac{3}{2}(k-1) + \frac{k \ln k}{k+1} \right] = \\ = p_0V \left[ \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \ln 2 \right] = 310 \text{ s}. \end{aligned}$$

**2 body**

Jean Perrin konal pokusy se sedimentací částic gumiguty (angl. gamboge), mléčné šťávy některých tropických rostlin, rozptýlených ve vodě. Částice stejné velikosti získal pomocí odstředivky.

Částice tvaru koule o poloměru  $R = 0,212 \mu\text{m}$  se nachází ve vodě o hustotě  $\rho_v = 0,998 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ve vzdálenosti  $r = 15,0 \text{ cm}$  od osy rotující odstředivky, která koná 2 500 otáček za minutu. Hustota gumiguty  $\rho = 1,194 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , součinitel dynamické viskozity  $\eta = 1,005 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Obtékání částic tekutinou můžeme považovat za laminární.

- a) Napište závislost rychlosti  $v$  radiálního pohybu částice gumiguty na její vzdálenosti  $r$  od osy otáčení a určete její velikost pro částici poloměru  $R$ .
- b) Za jakou dobu  $\tau$  se zvětší vzdálenost částice od osy o  $l = 5,0 \text{ cm}$ ?

Na hladinu vody ve válci nalil Perrin tenkou vrstvu částic gumiguty o stejném poloměru  $R = 0,212 \mu\text{m}$  (získaných v odstředivce).

- c) Jakou rychlostí  $v_1$  budou částice klesat ke dnu nádoby a za jakou dobu  $\tau_1$  urazí vzdálenost  $l = 5,0 \text{ cm}$ ? Posunutí způsobené Brownovým pohybem částic můžeme (jak ukázal Einstein) zanedbat.
- d) Závislost tlaku vzduchu na výšce nad zemským povrchem udává barometrická rovnice:

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g \Delta h}{p_0}}$$

Upravte barometrickou rovnici a určete, při jaké změně výšky  $\Delta h$  se za stálé teploty  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  hustota molekul kyslíku v atmosféře zmenší o 1 %. Molární plynová konstanta  $R_m = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , tíhové zrychlení  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Molární hmotnost kyslíku  $M_m(\text{O}_2) = 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

- e) Perrin sledoval mikroskopem rozložení hustoty částic s poloměrem  $R$  ve vodě v tíhovém poli Země při různých teplotách. Ke kapce emulze, ve které bylo obsaženo velké množství (okolo 13 000) částic, přidal vodu, přiklopil krycím sklíčkem, obrátil na bok, a po ustavení rovnovážného stavu mikroskopem z boku sledoval pokles počtu částic směrem vzhůru.

Teoretická analýza (A. Einstein) ukázala, že částice emulze se chovají stejně jako ideální plyn a jejich hustota molekul s výškou klesá podobně jako hustota molekul kyslíku v tíhovém poli v atmosféře. Perrin pak částice přímo počítal. Výsledky pro teplotu  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  jsou v následující tabulce:

Výška	5 $\mu\text{m}$	35 $\mu\text{m}$	65 $\mu\text{m}$	95 $\mu\text{m}$
Koncentrace	100	47	22,6	12

Z těchto údajů odhadněte s přesností na jednu platnou cifru (tak jako Perrin) hodnotu Avogadrovy konstanty  $N_A$ .

## Řešení

- a) V neinerciální vztažné soustavě spojené s částicí na částici působí setrvačná odstředivá síla a proti ní jednak síla odporová, jednak síla vztlaková

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \omega^2 r = 6\pi\eta Rv + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_v \omega^2 r.$$

Odtud  $v = \frac{2R^2(\rho - \rho_v)\omega^2 r}{9\eta} = \frac{2R^2(\rho - \rho_v)(2\pi f)^2 r}{9\eta} = 0,020 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . **2 body**

- b) Rychlost částice je přímo úměrná vzdálenosti od osy otáčení. Její průměrná rychlost bude

$$\bar{v} = \frac{2R^2(\rho - \rho_v)\omega^2}{18\eta}(2r + l)$$

a hledaná doba  $\tau = \frac{l}{\bar{v}} = \frac{18\eta l}{2R^2(\rho - \rho_v)(2\pi f)^2(2r + l)} = 2,1 \text{ s}$ . **2 body**

- c) Postup je stejný jako v částech a) a b), jen odstředivé zrychlení nahradíme tíhovým. Rychlost pak bude

$$v_1 = \frac{2R^2(\rho - \rho_v)g}{9\eta} = 1,91 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

a doba  $\tau_1 = \frac{l}{v_1} = \frac{9\eta l}{2R^2(\rho - \rho_v)g} = 2,6 \cdot 10^3 \text{ s}$ . **2 body**

- d) Ze stavové rovnice  $p = \frac{\rho R_m T}{M_m}$  vidíme, že podíl  $\frac{\rho}{p} = \frac{M_m}{R_m T}$  je při stálé teplotě stálý. Dosazením do barometrické rovnice dostaneme

$$p = p_0 e^{-\frac{M_m g}{R_m T} \Delta h}. \quad (1)$$

Protože tlak je za stálé teploty přímo úměrný hustotě molekul  $p = N_V kT$ , můžeme napsat

$$N_{V1} = N_{V0} e^{-\frac{M_m g}{R_m T} \Delta h} \Rightarrow \Delta h = -\frac{R_m T}{M_m g} \ln \frac{N_{V1}}{N_{V0}} = -\frac{R_m T}{M_m g} \ln 0,99 = 80 \text{ m}.$$

**2 body**

- e) Při stálé teplotě je hustota molekul přímo úměrná tlaku. Z naměřených hodnot je vidět, že hustota molekul klesne každých 30  $\mu\text{m}$  na polovinu. Hledáme tedy, v jaké výšce  $h_{1/2}$  nad základnou má tlak poloviční velikost. Z barometrické rovnice (1) plyne

$$h_{1/2} = \frac{R_m T}{M_m g} \ln 2.$$

V této rovnici nahradíme molární hmotnost molekuly „molární hmotností částice“  $M_m = mN_A$ , kde  $m$  je hmotnost jedné částice. Na částice emulze působí ale také vztlačková síla, proto je zrychlení  $g^*$  v našem případě menší než tíhové zrychlení. Po dosazení

$$h_{1/2} = \frac{R_m T}{N_A m g^*} \ln 2 = \frac{R_m T}{N_A \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho_v) g} \ln 2,$$

$$N_A = \frac{R_m T}{\frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho_v) g h_{1/2}} \ln 2 = 7 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

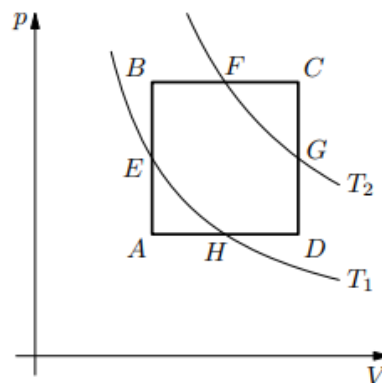
2 body

### 5.2.3 Práce plynu, kruhový děj

27.FO55A3-3: Účinnost kruhového děje

[40 %]

Kruhový děj, jehož  $p$ - $V$  diagram je na obr. 1, se skládá ze dvou dějů izochorických a dvou dějů izobarických. Pracovní látkou je 1 mol ideálního plynu s dvouatomovými molekulami. Středů spodní izobary a levé izochory leží na stejné izotermě s odpovídající teplotou  $T_1$ , středů horní izobary a pravé izochory leží na stejné izotermě s odpovídající teplotou  $T_2$ .



Obr. 1

- Určete teploty plynu v bodech  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ .
- Určete práci plynem vykonanou během kruhového děje  $ABCD$ .
- Určete teoretickou účinnost tepelného stroje, který by podle tohoto cyklu pracoval.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $T_2 = 700 \text{ K}$ .

## Řešení

- a) Střední příčka  $EG$  je rovněž izobara a střední příčka  $FH$  je izochora. Protože při ději izobarickém je objem přímo úměrný termodynamické teplotě a při ději izochorickém je tlak přímo úměrný termodynamické teplotě, platí

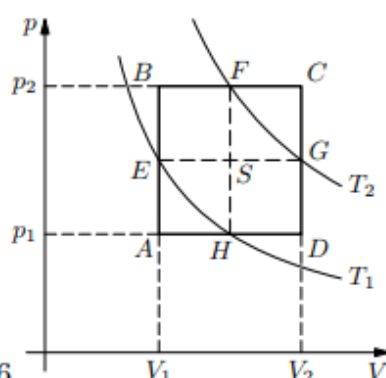
$$T_S = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad \frac{T_B}{T_1} = \frac{T_C}{T_2} = \frac{T_2}{T_1 + T_2}, \quad \frac{T_A}{T_1} = \frac{T_D}{T_2} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

Pak

$$T_B = T_D = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} = 420 \text{ K}, \quad T_A = \frac{2T_1^2}{T_1 + T_2} = 180 \text{ K},$$

$$T_C = \frac{2T_2^2}{T_1 + T_2} = 980 \text{ K}.$$

**3 body**



Obr. R6

- b) Práce vykonaná plynem při jednom cyklu je číselně rovna obsahu obdélníka  $ABCD$ . Ze stavové rovnice ideálního plynu odvodíme

$$W' = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = p_2V_2 - p_2V_1 - p_1V_2 + p_1V_1 =$$

$$: nR(T_C - T_B - T_D + T_A) = 2nR \frac{T_2^2 - 2T_1T_2 + T_1^2}{T_1 + T_2} = 2nR \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1 + T_2} = 2660 \text{ J}.$$

**3 body**

- c) Plyn přijímá teplo při dějích  $AB$  a  $BC$ :

$$Q_{AB} = \frac{5}{2}nR(T_B - T_A) = 5nR \frac{T_1T_2 - T_1^2}{T_1 + T_2},$$

$$Q_{BC} = \frac{7}{2}nR(T_C - T_B) = 7nR \frac{T_2^2 - T_1T_2}{T_1 + T_2},$$

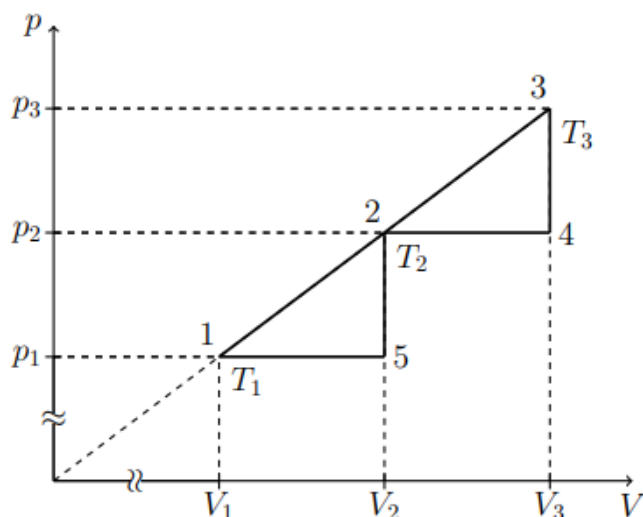
$$Q_{AB} + Q_{BC} = nR \frac{7T_2^2 - 2T_1T_2 - 5T_1^2}{T_1 + T_2} = 21300 \text{ J}.$$

Teoretická účinnost kruhového děje

$$\eta = \frac{W'}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{2T_2^2 - 4T_1T_2 + 2T_1^2}{7T_2^2 - 2T_1T_2 - 5T_1^2} = \frac{2(T_2 - T_1)}{7T_2 + 5T_1} = 0,125.$$

**4 body**

Tepelný stroj, jehož pracovní látkou je ideální plyn s dvouatomovými molekulami pracuje v cyklu 1–2–3–4–2–5–1, jehož  $pV$ -diagram je na obr. 2. Body 1, 2 a 3 leží na přímce procházející počátkem, bod 2 je střed úsečky 1–3. Nejnižší teplota cyklu je  $T_{\min}$ , nejvyšší teplota cyklu je  $k$ -krát vyšší.



Obr. 2

- a) Určete teplotu  $T_2$ , poměry objemů  $\frac{V_2}{V_1}$  a  $\frac{V_3}{V_1}$ .  
 b) Určete účinnost  $\eta$  stroje, pracujícího podle tohoto cyklu.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $T_{\min} = 300 \text{ K}$ ,  $k = 4$ .

Vnitřní energie ideálního plynu s dvouatomovými molekulami je  $U = \frac{5}{2}nRT$ .

### Řešení

- a) Teplota plynu, jehož stav je zobrazen přímkou, roste se vzdáleností od počátku. Proto  $T_{\min} = T_1$  a  $T_3 = kT_1$ . Dále platí:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{\frac{nRT_3}{V_3}}{\frac{nRT_1}{V_1}} = \frac{T_3 V_1}{T_1 V_3} = k \frac{V_1}{V_3} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \sqrt{k} = 2,$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{V_1 + V_3}{2}}{V_1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{V_3}{V_1} \right) = \frac{1 + \sqrt{k}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Z rovnic  $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$  a  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}$  plyne

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = \frac{V_2^2}{V_1^2} T_1 = \frac{(1 + \sqrt{k})^2}{4} T_1 = 675 \text{ K.}$$

**5 bodů**

- b) Abychom určili účinnost cyklu, musíme určit teplo  $Q_1$ , které plyn během cyklu dostane od ohříváče a práci  $W'$ , kterou plyn během cyklu vykoná. V daném cyklu plyn přijímá teplo při ději 1–2–3. Podle 1. zákona termodynamiky platí:

$$Q_1 = \Delta U_{13} + W'_{123} = \frac{5}{2} nR (T_3 - T_1) + \frac{1}{2} (p_1 + p_3) (V_3 - V_1).$$

Užitím vztahu  $\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_3}{p_1}$  a stavové rovnice dostaneme

$$Q_1 = \frac{5}{2} nR (T_3 - T_1) + \frac{1}{2} (p_1 V_3 - nRT_1 + nRT_3 - p_3 V_1) = \\ = 3nR (T_3 - T_1) = 3(k - 1) nRT_1.$$

Práce plynem vykonaná během cyklu: Vykonaná práce je rovna součtu obsahů dvou shodných trojúhelníků:

$$W' = 2 \cdot \frac{(p_2 - p_1) (V_2 - V_1)}{2} = p_1 V_1 + p_2 V_2 - p_1 V_2 - p_2 V_1.$$

Dosažením  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \sqrt{k}}{2}$  a  $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$  a drobnou úpravou dále dostaneme

$$W' = nRT_1 \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right)^2 = \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{4} nRT_1.$$

Pro účinnost kruhového děje pak:

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{\frac{1 - 2\sqrt{k} + k}{4} nRT_1}{3(k - 1) nRT_1} = \frac{1 - 2\sqrt{k} + k}{12(k - 1)} = \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{12(k - 1)} = \frac{1}{36} = 2,8 \%$$

**5 bodů**

*Alternativní výpočet vykonané práce:*

Vykonaná práce je rovna polovině obsahu trojúhelníku s vrcholy 1, 3 a s třetím vrcholem určeným objemem  $V_3$  a tlakem  $p_1$ :

$$\frac{1}{4} (p_3 - p_1) (V_3 - V_1) = \frac{1}{4} (\sqrt{k} - 1) p_1 (\sqrt{k} - 1) V_1 = \\ = \frac{1}{4} p_1 V_1 (\sqrt{k} - 1)^2 = \frac{1}{4} nRT_1 (\sqrt{k} - 1)^2.$$



## 5.2.4 Vlastnosti pevných látek

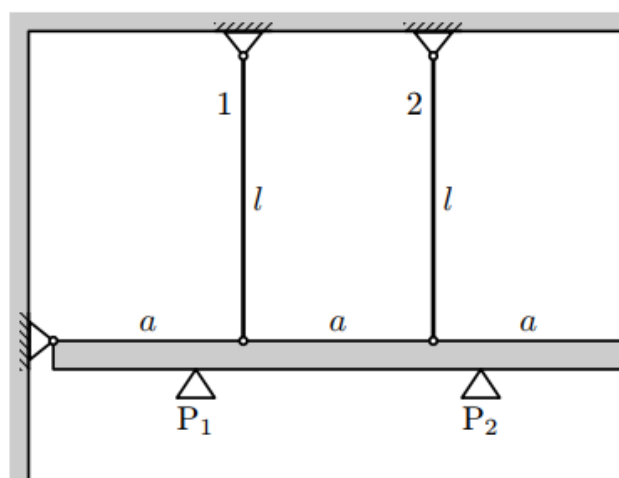
29.FO49A3-4: Staticky neurčitá soustava

[45 %]

Homogenní nosník stálého průřezu a délky  $3a = 120$  cm, na který působí tíhová síla  $F_G = 2000$  N, byl umístěn do vodorovné polohy na dvě podpěry  $P_1, P_2$ . Při teplotě  $t_1 = 10$  °C byl jedním koncem otáčivě připevněn ke stěně a pomocí dvou svislých pružných ocelových prutů 1, 2 délky  $l = 0,60$  m uchycených v jedné třetině a ve dvou třetinách délky nosníku zavěšen na strop (obr. 3). Pruty mají kruhový průřez o plošném obsahu  $S = 25,0$  mm<sup>2</sup> a po jejich připojení k nosníku a stropu bylo jejich napětí nulové. Po ukončení montáže byly podpěry odstraněny.

- Za předpokladu, že nosník, stěna a strop jsou dokonale tuhé, určete síly  $F_1, F_2$  a  $F_0$ , kterými na nosník působily pruty a stěna, prodloužení obou prutů  $\Delta l_1, \Delta l_2$ , napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  v prutech a odchylku  $\varphi$  nosníku od vodorovné polohy.
- Při provozu zařízení se teplota prutů zvýšila na  $t_2 = 35$  °C, zatímco teplota stěny a stropu a jejich rozměry se nezměnily. Jak se změnila hodnoty veličin vypočítaných v úkolu a)?
- Při které teplotě  $t_3$  v obou prutech bylo napětí v prutu 1 nulové?

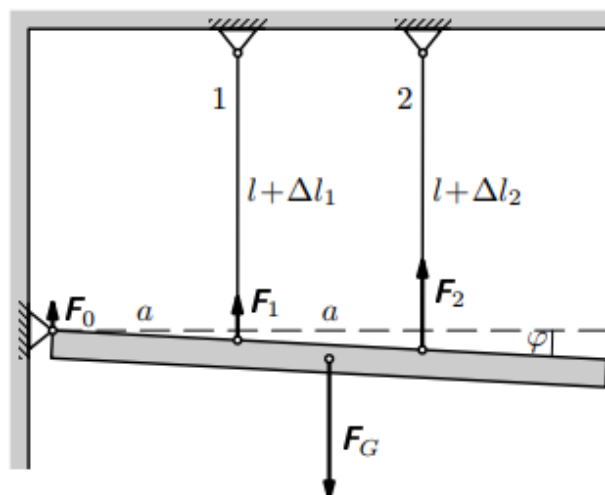
Youngův modul oceli je  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Pa, teplotní součinitel délkové roztažnosti oceli  $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5}$  K<sup>-1</sup>.



Obr. 3

## Řešení

- a) Situace po odstranění podpěr je na obr. R3. Tíhová síla a síly, kterými na nosník působí stěna a pruty, musí splňovat podmínky rovnováhy. Protože odchylky prutů od svislého směru jsou nepatrné, můžeme vektorové přímky všech těchto sil považovat za svislé.



Obr. R3

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1 \quad \Rightarrow \quad F_2 = 2F_1.$$

Podle momentové věty k bodu upevnění na stěně je

$$F_G \cdot 1,5a = F_1 a + F_2 \cdot 2a = 5F_1 a.$$

Z toho dostaneme

$$F_1 = \frac{3}{10} F_G = 600 \text{ N}, \quad F_2 = 1200 \text{ N}, \quad F_0 = F_G - F_1 - F_2 = 200 \text{ N}$$

a napětí v prutech  $\sigma_1 = \frac{F_1}{S} = 2,4 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ ,  $\sigma_2 = 2\sigma_1 = 4,8 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ .

Pruty se prodloužily o

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{ES} = \frac{0,3 F_G l}{ES} = 6,86 \cdot 10^{-5} \text{ m}, \quad \Delta l_2 = 1,37 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

a nosník se odchýlil od vodorovného směru o úhel

$$\varphi = \frac{\Delta l_1}{a} = 1,71 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,0098^\circ = 0,59'.$$

**4 body**

- b) Po zahřátí se prodloužení prutů změnilo na  $\Delta l'_2 = 2\Delta l'_1$ . Z toho část o velikosti  $\alpha l \Delta t$  připadá na teplotní prodloužení. Elastické síly, kterými pruty působí na nosník, se změnilo na

$$F'_1 = \frac{ES(\Delta l'_1 - \alpha l \Delta t)}{l}, \quad F'_2 = \frac{ES(2\Delta l'_1 - \alpha l \Delta t)}{l}. \quad (1)$$

Z momentové věty plyne

$$F_G \cdot \frac{3a}{2} = \frac{ES(\Delta l'_1 - \alpha l \Delta t)}{l} \cdot a + \frac{ES(2\Delta l'_1 - \alpha l \Delta t)}{l} \cdot 2a = \\ = \frac{ESa(5\Delta l'_1 - 3\alpha l \Delta t)}{l}.$$

Z toho  $\Delta l'_1 = \frac{3F_G l}{10ES} + \frac{3}{5}\alpha l \Delta t = 2,036 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\Delta l'_2 = 4,07 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

Dosažením do (1) dostaneme

$$F'_1 = \frac{3}{10}F_G - \frac{2}{5}ES\alpha\Delta t = -188 \text{ N}, \quad F'_2 = \frac{6}{10}F_G + \frac{1}{5}ES\alpha\Delta t = 1594 \text{ N}, \quad (2)$$

$$F'_0 = F_G - F'_1 - F'_2 = 594 \text{ N}$$

a napětí v prutech  $\sigma'_1 = \frac{F'_1}{S} = -7,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ,  $\sigma'_2 = \frac{F'_2}{S} = 64 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Napětí v prutu 1 se změnilo z tahového na tlakové. Vychýlení nosníku se zvětšilo na  $\varphi' = \frac{\Delta l'_1}{a} = 5,09 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,029^\circ = 1,7'$ .

**5 bodů**

*Poznámka:* Kritická síla, při které tyč dané délky a kruhového průřezu upevněná na koncích otáčivě ztratí stabilitu ve vzpěru, je

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2} = \frac{\pi^2 E \frac{\pi d^4}{64}}{l^2} = \frac{\pi ES^2}{4l^2} = 286 \text{ N}.$$

- c) Teplotu  $t_3$ , při které bylo napětí v prutu 1 nulové, určíme úpravou vztahu (2). Dostaneme

$$\frac{3}{10}F_G = \frac{2}{5}ES\alpha(t_3 - t_1) \Rightarrow t_3 = t_1 + \frac{3F_G}{4ES\alpha} = 29^\circ \text{C}.$$

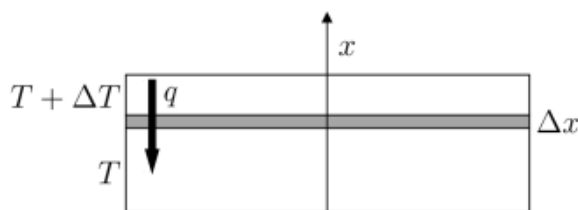
**1 bod**

## 5.2.5 Změny skupenství látek

### 30.FO59A3-4: Zamrzání jezera

[52 %]

Předpokládejme, že ve vrstvě látky teplota závisí pouze na souřadnici  $x$ . Jestliže udržujeme protilehlé plochy vrstvy homogenní a izotropní látky na různých teplotách s teplotním rozdílem  $\Delta T$ , pak vrstvou tloušťky  $\Delta x$  prochází ve směru poklesu teploty tepelný tok. Hustota tepelného toku je  $q = \frac{Q}{S\tau} = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$ , kde  $Q$  je teplo prošlé za čas  $\tau$  plochou o obsahu  $S$  a  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti látky.



Obr. 2

Hustota vody  $\rho_0 = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , hustota ledu  $\rho_l = 0,90 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , teplota tání ledu  $t_0 = 0,0 \text{ }^\circ\text{C}$ , měrné skupenské teplo tání ledu  $l_t = 3,3 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ , měrná tepelná kapacita vody  $c_0 = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , měrná tepelná kapacita ledu  $c_l = 2,1 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , součinitel tepelné vodivosti vody  $\lambda_0 = 0,63 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , součinitel tepelné vodivosti ledu  $\lambda_l = 2,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

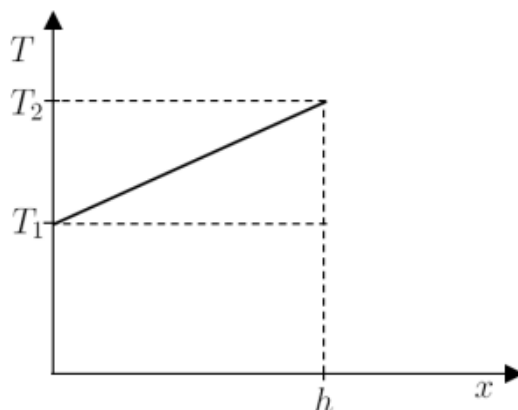
- Jak závisí teplota uvnitř desky o tloušťce  $h$ , jejíž stěny jsou udržovány na stálých teplotách  $T_1$  a  $T_2$ , na vzdálenosti  $x$  od jejího chladnějšího okraje? Platí  $T_1 < T_2$ .
- Ledový hranol má tloušťku  $h = 30 \text{ cm}$  a teplotu  $t_1 = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ . Hranol položíme na masivní kovovou podložku, jejíž teplota je udržována na hodnotě  $t_2 = -5 \text{ }^\circ\text{C}$ . Teplota okolí ledu je rovněž  $t_1$ . Jak dlouhou dobu  $\tau_0$  bude trvat vytvoření stálého rozložení teplot uvnitř ledového hranolu? Můžeme předpokládat, že k přenosu energie mezi deskou a ledem dochází stejně jako při již vytvořeném stavu tepelné rovnováhy. Únik tepla bočními stěnami hranolu je zanedbatelný.
- Teplota nad klidnou hladinou jezera klesla na hodnotu  $t_3 = -10 \text{ }^\circ\text{C}$  a zůstává stálá. Teplota vody v jezeře je stálá a je rovna  $t_0 = 0,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Jak dlouhou dobu  $\tau_1$  bude trvat vytvoření ledové vrstvy na hladině jezera, která bude mít tloušťku  $h = 30 \text{ cm}$ ?
- Na hladině jezera je vrstva ledu o tloušťce  $h_0 = 30 \text{ cm}$ . Teplota okolního vzduchu stoupla na hodnotu  $t_4 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  a zůstává stálá. Jak dlouhou dobu  $\tau_2$  bude trvat, než led roztaje? Předpokládejte, že všechna voda vzniklá táním ledu zůstává nad ledem.

## Řešení

- a) Z předpokladu ustáleného tepelného toku  $q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} = \text{konst.}$  plyne

$$-\lambda \frac{T_2 - T_1}{h} = -\lambda \frac{T - T_1}{x}.$$

Z rovnice dostaneme  $T = \frac{T_2 - T_1}{h}x + T_1$ . Teplota uvnitř desky se tedy mění lineárně (viz obr. R5).



Obr. R4

1 bod

- b) Hranol leží na ploše o velikosti  $S$ . Do ustavení tepelné rovnováhy, kdy teplota uvnitř hranolu ve směru dolů lineárně roste, přijme hranol teplo

$$Q = mc_l \frac{T_2 - T_1}{2} = Sh\rho_l c_l \frac{T_2 - T_1}{2}.$$

Toto teplo musí hranolu předat teplejší deska za dobu  $\tau_0$ :

$$Q = \lambda_l S \frac{T_2 - T_1}{h} \tau_0.$$

Pak

$$Sh\rho_l c_l \frac{T_2 - T_1}{2} = \lambda_l S \frac{T_2 - T_1}{h} \tau_0 \Rightarrow \tau_0 = \frac{\rho_l c_l h^2}{2\lambda_l} \cong 4 \cdot 10^4 \text{ s} = 11 \text{ h}.$$

3 body

- c) Při zamrzání ledu odebírá teplo vznikajícímu ledu vzduch nad jeho povrchem. Toto teplo dodává kapalná voda pod ledem. Za velmi krátkou dobu  $d\tau$  vznikne vrstvička ledu o tloušťce  $dx$ . Přitom se skupenské teplo krystalizace musí rovnat odebranému teplu. Vzduch musí odebrat jednak teplo rovné skupenskému teplu tuhnutí a navíc teplo, potřebné k ustavení tepelné rovnováhy ve vznikající vrstvě ledu.

$$l_t dm + x S \rho_l c_l \frac{t_0 - t_3}{2} dx = l_t S \rho_l dx + x S \rho_l c_l \frac{t_0 - t_3}{2} dx = \lambda_l S \frac{t_0 - t_3}{x} d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\tau = \frac{l_t \rho_l}{\lambda_l (t_0 - t_3)} x dx + \frac{\rho_l c_l}{2 \lambda_l} x dx,$$

$$\tau_1 = \left( \frac{l_t \rho_l}{\lambda_l (t_0 - t_3)} + \frac{\rho_l c_l}{2 \lambda_l} \right) \int_0^h x dx = \frac{l_t \rho_l h^2}{2 \lambda_l (t_0 - t_3)} + \frac{\rho_l c_l}{4 \lambda_l} h^2 \cong 6,27 \cdot 10^5 \text{ s} = 7,3 \text{ dne.}$$

**3 body**

- d) Při tání ledu je teplo potřebné k jeho tání přiváděno vrstvou vody, která vzniká na jeho povrchu. Zvolme osu  $x$  s počátkem v rovině hladiny v horní vrstvě vody ve směru dolů. Za nekonečně malou dobu  $d\tau$  přibude nad ledem voda nekonečně malé tloušťky  $dx$ , přičemž platí rovnice tepelné rovnováhy

$$\lambda_0 \frac{t_4 - t_0}{x} S dx = l_t S \rho_l dx + S \rho_0 c_0 \frac{t_4 - t_0}{2} dx$$

z níž plyne

$$d\tau = \left( \frac{l_t \rho_l}{\lambda_0 (t_4 - t_0)} + \frac{\rho_0 c_0}{2 \lambda_0} \right) x dx.$$

Integrací v mezích od nuly do konečné tloušťky vrstvy  $h'_0 = \frac{\rho_l}{\rho_0} h_0$  dostaneme

$$\tau_2 = \left( \frac{l_t \rho_l}{\lambda_0 (t_4 - t_0)} + \frac{\rho_0 c_0}{2 \lambda_0} \right) \int_0^{h'_0} x dx = \left( \frac{l_t \rho_l}{\lambda_0 (t_4 - t_0)} + \frac{\rho_0 c_0}{2 \lambda_0} \right) \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\rho_l}{\rho_0} h_0} =$$

$$= \frac{l_t \rho_l^3 h_0^2}{2 \lambda_0 \rho_0^2 (t_4 - t_0)} + \frac{c_0 \rho_l^2 h_0^2}{4 \lambda_0 \rho_0} = 1,84 \cdot 10^6 \text{ s} = 511 \text{ h} = 21 \text{ dní.}$$

**3 body**

### 31.FO60A3-3c: Dvakrát

[50 %]

- c) Za stálého mrazivého počasí, kdy je teplota vody  $0^\circ\text{C}$ , teplota vzduchu je trvale pod bodem mrazu a nemění se, ledová vrstva se za jeden den zvětší o tloušťku  $h$ . Jak silná bude tato vrstva za dva dny?

## Řešení

- c) Označme  $\Delta t$  stálý teplotní rozdíl vzduchu a vody,  $S$  povrch rybníka,  $l_t$  měrné skupenské teplo tání ledu,  $\lambda$  součinitel tepelné vodivosti ledu a  $\rho$  jeho hustotu. V daném okamžiku má led tloušťku  $x$  a za velmi krátkou dobu  $d\tau$  vznikne na jeho spodním povrchu vrstvička ledu tloušťky  $dx$ . Současně se lineární rozložení teplot v ledu předchozí tloušťky  $x$  změní na nové lineární rozložení teplot ledu na tloušťce  $x + dx$ . Teplo uvolněné při obou procesech odebere vzduch nad jeho povrchem.

$$l_t dm + S\rho c \frac{\Delta t}{2} dx = l_t S \rho dx + S\rho c \frac{\Delta t}{2} dx = \lambda S \frac{\Delta t}{x} d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\tau = \frac{l_t \rho}{\lambda \Delta t} x dx + \frac{\rho c}{2\lambda} x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = \left( \frac{l_t \rho}{\lambda \Delta t} + \frac{\rho c}{2\lambda} \right) \int_0^h x dx = \frac{l_t \rho h^2}{2\lambda \Delta t} + \frac{\rho c}{4\lambda} h^2 = k \cdot h^2.$$

Jestliže za 1 den vznikla vrstva o tloušťce  $h$ , vznikne za dva dny vrstva o tloušťce  $\sqrt{2}h$ .

**3 body**

## 5.3 Mechanické kmitání a vlnění

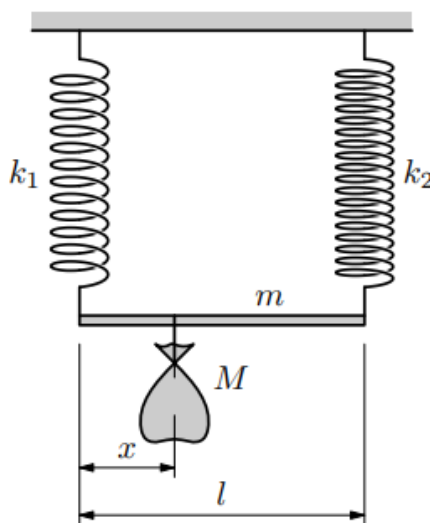
### 32.FO50A3-2: Pružiny

[54 %]

Na obr. 1 je znázorněna soustava dvou pružin zanedbatelné hmotnosti o tuhostech  $k_1$  a  $k_2$ , jejichž konce jsou spojeny homogenní tyčí stálého průřezu o délce  $l$  a hmotnosti  $m$ . Obě pružiny měly v nezátíženém stavu (před spojením konců pružin tyčí) stejnou délku. Na tyč zavěsíme jako závaží sáček s broky o hmotnosti  $M$ .

- Určete souřadnici  $x \in \langle 0; l \rangle$  místa na tyči, kam musíme zavěsit závaží, aby tyč zůstala ve vodorovné poloze. Jaká bude v tomto případě deformace obou pružin?
- Tyč spojující konce pružin odstraníme a všechny broky rozdělíme do dvou sáčků o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , z nichž první zavěsíme na pružinu o tuhosti  $k_1$  a druhý na pružinu o tuhosti  $k_2$ . Jaký musí být poměr  $p = m_1/m_2$ , aby prodloužení obou pružin bylo stejné?
- Odvoďte vztah pro výpočet celkové elastické energie obou pružin jako funkce poměru  $p$ . Určete, pro jakou hodnotu  $p$  bude tato energie minimální a pro kterou maximální. Vypočítejte její velikosti.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $M = 500$  g,  $m = 100$  g,  $l = 20$  cm,  $k_1 = 16$  N · m<sup>-1</sup>,  $k_2 = 32$  N · m<sup>-1</sup>,  $g = 9,81$  m · s<sup>-2</sup>.

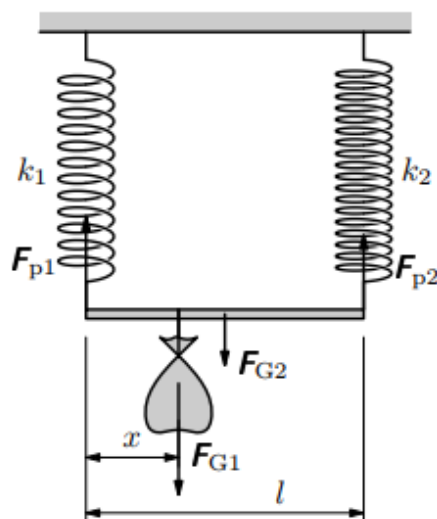


Obr. 1



## Řešení

- a) Označme  $F_{p1}$ ,  $F_{p2}$  síly, kterými působí pružiny na tyč,  $F_{G1} = Mg$ ,  $F_{G2} = mg$  tíhové síly (obr. R2).



Obr. R2

Podle momentové věty platí

$$F_{p1} \cdot l = F_{G1} \cdot (l - x) + F_{G2} \cdot \frac{l}{2}, \quad F_{p2} \cdot l = F_{G1} \cdot x + F_{G2} \cdot \frac{l}{2},$$

z čehož  $F_{p1} = Mg \frac{l-x}{l} + \frac{1}{2}mg$ ,  $F_{p2} = Mg \frac{x}{l} + \frac{1}{2}mg$ .

Protože tyč je uchycená na pružinách, platí také  $F_{p1} = k_1 y_1$ ,  $F_{p2} = k_2 y_2$ . Má-li tyč zůstat ve vodorovné poloze, musí platit  $y_1 = y_2$ , tj.

$$\left( Mg \frac{l-x}{l} + \frac{1}{2}mg \right) \frac{1}{k_1} = \left( Mg \frac{x}{l} + \frac{1}{2}mg \right) \frac{1}{k_2},$$

z čehož

$$x = \frac{Mk_2 + \frac{1}{2}m(k_2 - k_1)}{M(k_1 + k_2)} l = \frac{k_2(2M + m) - k_1 m}{2M(k_1 + k_2)} l.$$

*Diskuze:* Výsledek řešení vyhovuje úloze, jestliže  $0 \leq x \leq l$ . Musí tedy platit

$$k_2(2M + m) - k_1 m \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_2}{k_1} \geq \frac{m}{2M + m}$$

a současně

$$\frac{k_2(2M + m) - k_1 m}{2M(k_1 + k_2)} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad k_2(2M + m) - k_1 m \leq 2M(k_1 + k_2),$$

$$\frac{k_2}{k_1} \leq \frac{2M + m}{m}.$$

Pro dané hodnoty  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $m$  a  $M$  jsou tyto podmínky splněny a po dosazení dostaneme  $x = 14$  cm.

Pružiny se prodlouží o  $y = y_1 = y_2 = \frac{F_{G1} + F_{G2}}{k_1 + k_2} = \frac{(M + m)g}{k_1 + k_2} = 12 \text{ cm}$ .

**4 body**

- b) Má-li platit  $y_1 = y_2$ , pak  $\frac{m_1 g}{k_1} = \frac{m_2 g}{k_2}$ . Z toho  $p = \frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2}$ . Pro dané hodnoty je  $p = 0,5$ .

**1 bod**

- c) Po rozdělení broků do dvou sáčků platí  $m_1/m_2 = p$ ,  $m_1 + m_2 = M$ . Z toho

$$m_1 = \frac{pM}{1+p}, \quad m_2 = \frac{M}{1+p}.$$

Celková elastická energie pružin je

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_2 y_2^2 = \frac{m_1^2 g^2}{2k_1} + \frac{m_2^2 g^2}{2k_2} = \\ &= \frac{M^2 g^2}{2} \left( \frac{p^2}{k_1(1+p)^2} + \frac{1}{k_2(1+p)^2} \right) = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{k_2 p^2 + k_1}{(1+p)^2}. \end{aligned}$$

**2 body**

Nyní tento výraz zderivujeme podle  $p$ . Dostaneme

$$\frac{dE}{dp} = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{2k_2 p(1+p)^2 - (k_2 p^2 + k_1) \cdot 2(1+p)}{(1+p)^4} = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{2(k_2 p - k_1)}{(1+p)^3}.$$

Položíme-li tuto druhou derivaci rovnou nule a vyjádříme  $p$ , dostaneme

$$p = \frac{k_1}{k_2}.$$

Pro  $p > k_1/k_2$  je  $\frac{dE}{dp} > 0$ , funkce je rostoucí. Pro  $p < k_1/k_2$  je  $\frac{dE}{dp} < 0$ , funkce je klesající.

Pro  $p = \frac{k_1}{k_2}$  je tedy celková elastická energie pružin minimální a má hodnotu

$$E_{\min} = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{k_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + k_1}{\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)^2} = \frac{M^2 g^2}{2(k_1 + k_2)}.$$

Pro dané hodnoty je  $E_{\min} = 0,25 \text{ J}$ .

Celková elastická energie pružin je maximální v krajních případech, tedy buď pro  $p = 0$ , kdy má hodnotu  $E = \frac{M^2 g^2}{2k_2}$ , nebo pro  $p = \infty$ , kdy má hodnotu  $E = \frac{M^2 g^2}{2k_1}$ . V našem případě je  $E_{\max} = 0,75 \text{ J}$  pro  $p = \infty$ .

*Poznámka*

Minimum elastické energie tedy nastává pro situaci, kdy  $y_1 = y_2$ , což plyne z výsledku úlohy b).

**3 body**

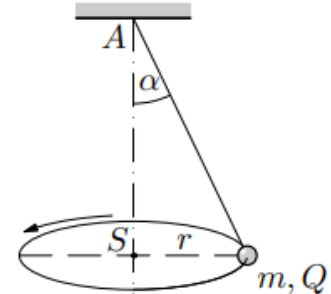
## 5.4 Elektřina a magnetismus

### 5.4.1 Elektrický náboj a elektrické pole

#### 33.FO54A3-2: Nabité kuželové kyvadlo

[63 %]

Kuželové kyvadlo upevněné v bodě  $A$  (obr. 2) je tvořeno nabitou kuličkou hmotnosti  $m$  zavěšenou na vlákne, která obíhá ve vodorovné rovině stálou úhlovou rychlostí  $\omega$ . Náboj kuličky je  $Q$ , hmotnost nití je v porovnání s hmotností kuličky zanedbatelná. Poloměr kružnice, po které obíhá kulička je  $r$ . V ose otáčení kyvadla je v bodě  $B$  umístěna druhá kulička nabitá stejně velkým souhlasným nábojem. Vzdálenost  $|AS| = |BS|$ . Závěs kyvadla svírá se svislým směrem úhel  $\alpha$ .



Obr. 2

- Jak velký je náboj  $Q$  kuliček?
- Jakou silou  $\mathbf{T}$  je napínána nit, na které je kyvadlo zavěšeno?
- Jakou úhlovou rychlostí  $\omega_1$  by musela kulička kyvadla obíhat po stejné trajektorii, kdyby kuličky nesly náboj shodné velikosti  $Q_1$ , ale opačného znaménka? Jakou silou  $\mathbf{T}_1$  teď bude napínána nit?

Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty:  $\omega = 10,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $r = 5,00 \text{ cm}$ ,  $m = 10,0 \text{ g}$ ,  $\alpha = 30,0^\circ$ ,  $Q_1 = 0,10 \mu\text{C}$ ,  $k = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ .

#### Řešení

- V neinerciální vztažné soustavě otáčející se spolu s kuličkou působí na kuličku tíhová síla  $\mathbf{F}_G$ , tahová síla závěsu  $\mathbf{T}$ , setrvačná síla  $\mathbf{F}_s$  a elektrická síla  $\mathbf{F}_e$ , které jsou v rovnováze (obr. R1). Ve vodorovném směru platí

$$T \sin \alpha = m\omega^2 r + F_e \sin \alpha, \quad (1)$$

ve svislém směru platí

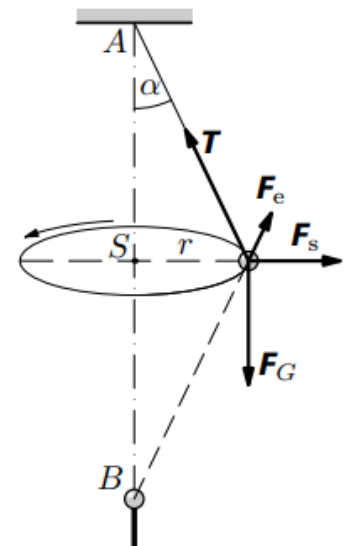
$$T \cos \alpha + F_e \cos \alpha = mg. \quad (2)$$

Z (1) vyjádříme

$$T = F_e + \frac{m\omega^2 r}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

dosadíme do (2) a upravíme:

$$F_e = \frac{mg}{2 \cos \alpha} - \frac{m\omega^2 r}{2 \sin \alpha}. \quad (4)$$



Obr. R1

Po dosazení  $F_e = \frac{kQ^2}{\left(\frac{r}{\sin \alpha}\right)^2}$  a úpravě dostaneme

$$|Q| = \frac{r}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{m}{2k} \left( \frac{g}{\cos \alpha} - \frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} \right)}.$$

Aby úloha měla řešení, musí být splněna podmínka  $\frac{g}{\cos \alpha} - \frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} > 0$ , která v našem případě splněna je.

Číselně:  $|Q| = 8,6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .

**5 bodů**

b) Dosazením z (4) do (3) a úpravou dostaneme

$$T = \frac{mg}{2 \cos \alpha} - \frac{m\omega^2 r}{2 \sin \alpha} + \frac{m\omega^2 r}{\sin \alpha} = \frac{mg}{2 \cos \alpha} + \frac{m\omega^2 r}{2 \sin \alpha}.$$

Číselně:  $T = 0,107 \text{ N}$ .

**1 bod**

c) Elektrická síla  $F'_e$  má teď opačný směr (obr. R2) a vztahy (1), (2) a (3) se změjí na:

$$T_1 \sin \alpha = m\omega_1^2 r - F'_e \sin \alpha, \quad (5)$$

$$T_1 \cos \alpha - F'_e \cos \alpha = mg, \quad (6)$$

$$T_1 = -F'_e + \frac{m\omega_1^2 r}{\sin \alpha}, \quad (7)$$

Dosazením ze (7) do (6) a úpravou dostaneme

$$\frac{m\omega_1^2 r \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2F'_e \cos \alpha + mg,$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{2F'_e \sin \alpha}{mr} + \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r}} = \\ &= \sqrt{\frac{2kQ_1^2 \sin^3 \alpha}{mr^3} + \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r}}. \end{aligned}$$

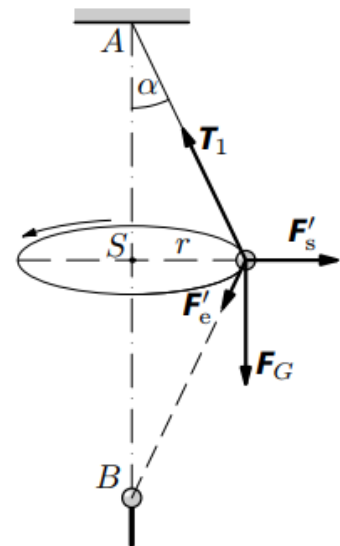
Číselně:  $\omega_1 = 11,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Ze vztahu (6) vyjádříme

$$T_1 = F'_e + \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{kQ_1^2 \sin^2 \alpha}{r^2} + \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

Číselně:  $T_1 = 0,122 \text{ N}$ .

**4 body**



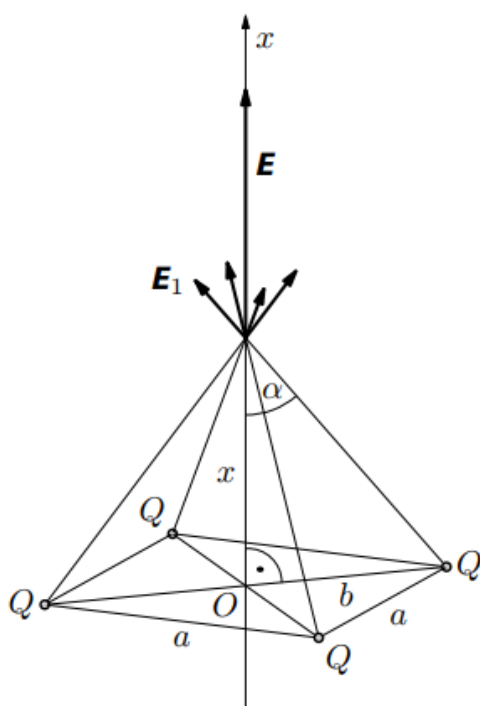
Obr. R2

Každý ze čtyř hmotných bodů nacházejících se ve vrcholech čtverce o straně délky  $a$  ve vakuu má elektrický náboj  $Q$  shodného znaménka.

- a) Uvažujme osu  $x$  totožnou s osou souměrnosti čtverce kolmou k rovině čtverce a s počátkem ve středu čtverce. Najděte souřadnici  $x_m$  bodu osy, kde je intenzita elektrického pole maximální. Určete obecně i číselně velikost této intenzity  $E_{\max}$ .
- b) Do středu čtverce umístíme částici o klidové hmotnosti  $m_0$  a s nábojem  $q$  shodného znaménka s nábojem  $Q$ , a nepatrně vychýlíme kolmo k rovině čtverce. Určete limitní velikost rychlosti částice ve velmi velké vzdálenosti. Řešte obecně klasicky i obecně relativisticky.
- c) Vypočtěte velikost rychlosti z úlohy b) pro částici alfa s nábojem  $q = 2e$  a s klidovou hmotností  $m_\alpha = 6,644 \cdot 10^{-27}$  kg a pro elektron s nábojem  $q = -e$  a s klidovou hmotností  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg.  
Další hodnoty pro číselná řešení:  $|Q| = 1,80 \cdot 10^{-7}$  C,  $a = 4,00 \cdot 10^{-2}$  m,  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9$  N·C<sup>-2</sup>·m<sup>2</sup>,  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>.

### Řešení

a)



Obr. R2

Předpokládejme pro jednoduchost  $Q > 0$ . Intenzita elektrického pole každého ze čtyř nábojů má v bodě o souřadnici  $x$  velikost

$$E_1 = \frac{kQ}{x^2 + b^2},$$

kde  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$  je polovina délky úhlopříčky čtverce (obr. R2). Průmět intenzity  $\mathbf{E}_1$  do osy  $x$  má velikost

$$E_{1x} = E_1 \cos \alpha = E_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

Celková velikost intenzity je

$$\begin{aligned} E &= 4E_{1x} = \frac{4kQ}{x^2 + b^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \\ &= \frac{4kQx}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Derivace velikosti intenzity podle souřadnice  $x$  je

$$\frac{dE}{dx} = 4kQ \frac{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - x \frac{3}{2}(x^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + b^2)^{\frac{6}{2}}} = 4kQ \frac{b^2 - 2x^2}{(x^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Z podmínky nulové derivace plyne

$$x_m = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{a}{2}. \quad (2)$$

Pro  $x < x_m$  je derivace kladná a funkce je tedy rostoucí, pro  $x > x_m$  je derivace záporná a funkce je klesající, proto je nalezený extrém maximem. (Tuto skutečnost lze též dokázat pomocí druhé derivace

$$\frac{d^2E}{dx^2} = 4kQ \frac{3x(2x^2 - 3b^2)}{(x^2 + b^2)^{\frac{7}{2}}},$$

která pro  $x_m = \frac{\sqrt{2}}{2}b$  vychází záporná.)

Dosažením hodnoty (2) do vztahu (1) dostaneme

$$E_{\max} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{kQ}{a^2} = 3,11 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

b) Elektrický potenciál ve středu čtverce je

$$\varphi = \frac{4kQ}{b} = \frac{4\sqrt{2}kQ}{a}.$$

Ze zákona zachování energie plyne pro limitní kinetickou energii urychlené částice

$$E_k = q \cdot \varphi = \frac{4\sqrt{2}kqQ}{a}. \quad (3)$$

Podle klasické fyziky je kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2}m_0v^2. \quad (4)$$

Ze vztahů (3) a (4) plyne

$$v = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}kqQ}{m_0a}}.$$

**2 body**

Podle teorie relativity je kinetická energie

$$E_k = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (5)$$

Ze vztahů (3) a (5) plyne

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{4\sqrt{2}kqQ}{am_0c^2} + 1\right)^2}} = c \sqrt{1 - \frac{a^2 m_0^2 c^4}{(am_0c^2 + 4\sqrt{2}kqQ)^2}}.$$

**2 body**

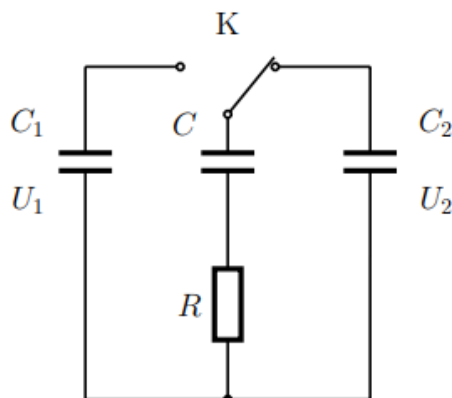
- c) Podle klasické fyziky vychází pro částici alfa  $v_\alpha = 4,70 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , pro elektron  $v_e = 2,84 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Jelikož  $v_\alpha \ll c$ , lze výsledek podle klasické fyziky pro částici alfa považovat za dostatečně přesný. Velikost rychlosti elektronu je však blízká rychlosti světla, proto je nutné počítat podle relativistického vzorce, kde vychází  $v_e = 2,17 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**2 body**

### 35.FO56A3-4: Přepínání kondenzátorů

[42 %]

Dva nabité kondenzátory s kapacitami  $C_1 = 5,0 \mu\text{F}$  a  $C_2 = 7,0 \mu\text{F}$  jsou zapojeny podle obr. 3. Napětí na kondenzátorech je  $U_1 = 20 \text{ V}$  a  $U_2 = 70 \text{ V}$ . Třetí kondenzátor s kapacitou  $C$  je připojen ke kondenzátoru s kapacitou  $C_2$ . Klíč  $K$  přepneme z pravé do levé polohy a po vyrovnání napětí zase zpět do pravé polohy. Po provedení sedmi takových dvojích přepojení rozdíl  $U_2 - U_1$  napětí na kondenzátorech klesl na  $5,5 \text{ V}$ .



Obr. 3

- Jaká je kapacita  $C$  třetího kondenzátoru?
- Jaké bude napětí  $U_m$  na kondenzátorech, budeme-li přepínat klíč tak dlouho, až na kondenzátorech bude prakticky stejné napětí?
- Jaké teplo se přitom uvolní na rezistoru  $R$ ?

#### Řešení

- Při prvním přepojení klíče vlevo se napětí na kondenzátorech  $C$  a  $C_1$  vyrovná na hodnotě  $U_A$ . Platí:

$$C(U_2 - U_A) = C_1(U_A - U_1) \quad \Rightarrow \quad U_A = \frac{C_1 U_1 + C U_2}{C + C_1}.$$

Po přepojení klíče do původní polohy se napětí na kondenzátorech  $C$  a  $C_2$  vyrovná na hodnotě  $U_B$ . Platí:

$$C_2(U_2 - U_B) = C(U_B - U_A),$$

$$U_B = \frac{C_2 U_2 + C U_A}{C + C_2} = \frac{U_2 (C C_2 + C_1 C_2 + C^2) + U_1 C C_1}{(C + C_1)(C + C_2)}.$$

Rozdíl napětí po prvním cyklu tedy bude:

$$U_B - U_A = \frac{U_2 (C C_2 + C_1 C_2 + C^2) + U_1 C C_1}{(C + C_1)(C + C_2)} - \frac{C_1 U_1 + C U_2}{C + C_1} =$$

$$= \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} (U_2 - U_1).$$

Rozdíl napětí po 7 cyklech je

$$5,5 \text{ V} = \left[ \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} \right]^7 \cdot (U_2 - U_1) = \left[ \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} \right]^7 \cdot 50 \text{ V}.$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} \right]^7 &= 0,11, \\ \log \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} &= \frac{\log 0,11}{7} = -0,1369, \\ \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} &= 10^{-0,1369} = 0,7296, \end{aligned}$$

dojdeme ke kvadratické rovnici pro číselnou hodnotu kapacity  $C$  v mikrofaradech:

$$\{C\}^2 + 12\{C\} - 12,97 = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen  $C \doteq 1,0 \mu\text{F}$ .

**5 bodů**

b) Podle zákona zachování náboje

$$C_1 U_1 + (C + C_2) U_2 = (C_1 + C_2 + C) U_m \quad \Rightarrow \quad U_m = \frac{C_1 U_1 + (C + C_2) U_2}{C_1 + C_2 + C} \doteq 51 \text{ V}.$$

**2 body**

c) Teplo uvolněné na rezistoru je rovno rozdílu počáteční a konečné energie soustavy kondenzátorů:

$$Q = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{(C + C_2) U_2^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2 + C) U_m^2}{2} \doteq 3,8 \text{ mJ}.$$

**3 body**

### 36.FO59A3-3: Přenos náboje

[32 %]

Dvě stejné vodivé koule A a B s poloměrem  $R$  nesou každá náboj stejného znaménka  $Q_{A0}$  a  $Q_{B0}$ . Náboj budeme přenášet pomocí malé, vodivé, zprvu nenabitě kuličky s poloměrem  $r$  tak, že se nejprve dotkneme koule A, pak koule B a pak zase koule A. Označme  $Q_{Ak}$  a  $Q_{Bk}$  náboje koulí po  $k$ -tém přenosu. Jedním přenosem rozumíme dotyk koule B nabitou kuličkou a následný dotyk koule A

- Nechť se na kouli s poloměrem  $R$  nachází náboj  $Q$ . Po dotyku bude na malé kuličce s poloměrem  $r$  náboj  $q = \gamma Q$ . Určete obecně součinitel  $\gamma$ , který budeme dále považovat za známý.
- Určete náboje koulí  $Q_{Ak}$  a  $Q_{Bk}$  po  $k$ -tém přenosu náboje. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $Q_{A0} = 10,0 \text{ nC}$ ,  $Q_{B0} = 1,0 \text{ nC}$ ,  $\gamma = 0,02$  a  $k = 10$ . Velikost přenášeného náboje je při daném součiniteli  $\gamma$  v porovnání s velikostí náboje koulí zanedbatelná.
- Určete, kolikrát bude třeba přenos náboje opakovat, je-li součinitel  $\gamma = 0,02$  a poměr  $\frac{Q_{A0}}{Q_{B0}} = 10$ , aby konečný rozdíl nábojů koulí  $(Q_{Ak} - Q_{Bk})$  nebyl větší, než 1 % součtu  $(Q_{A0} + Q_{B0})$ .



## Řešení

- a) Při dotyku malé kuličky a velké koule budou mít obě stejný potenciál.

$$\varphi = \frac{Q}{C + c_0} = \frac{q}{c_0}.$$

Odtud  $q = \frac{c_0}{C + c_0}Q$ . Protože kapacita kulového vodiče závisí na jeho poloměru

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R, \text{ je hledaný součinitel } \gamma = \frac{c_0}{C + c_0} = \frac{r}{R + r}.$$

**2 body**

- b) Potenciál koule A po dotyku malé kuličky bude  $\varphi_{A0} = \frac{Q_{A0}}{C + c_0}$ . Náboj malé kuličky bude  $q = \frac{Q_{A0}c_0}{C + c_0} = c_0\varphi_{A0}$ ; na kouli zůstane náboj  $C\varphi_{A0}$ . Dotkneme-li se nyní malou kuličkou koule B, bude na soustavě celkový náboj  $C\varphi_{B0} + c_0\varphi_{A0}$  a její potenciál bude

$$\varphi_{B1} = \frac{C\varphi_{B0} + c_0\varphi_{A0}}{C + c_0} = (1 - \gamma)\varphi_{B0} + \gamma\varphi_{A0}.$$

Na malé kuličce zůstane náboj  $q = c_0\varphi_{B1}$ , na kouli B zůstane náboj  $Q_{B1} = C\varphi_{B1}$ . Při dotyku koule A bude celkový náboj  $(C\varphi_{A0} + c_0\varphi_{B1})$ , jejich potenciál bude

$$\varphi_{A1} = \frac{C\varphi_{A0} + c_0\varphi_{B1}}{C + c_0} = (1 - \gamma)\varphi_{A0} + \gamma\varphi_{B1}.$$

Rozdíly potenciálů budou

$$\varphi_{A0} - \varphi_{B1} = \varphi_{A0} - (1 - \gamma)\varphi_{B0} - \gamma\varphi_{A0} = (1 - \gamma)(\varphi_{A0} - \varphi_{B0})$$

$\varphi_{A1} - \varphi_{B1} = (1 - \gamma)\varphi_{A0} + \gamma\varphi_{B1} - \varphi_{B1} = (1 - \gamma)(\varphi_{A0} - \varphi_{B1}) = (1 - \gamma)^2(\varphi_{A0} - \varphi_{B0})$ .  
Provedeme-li  $k$  přenosů, bude

$$\varphi_{Ak} - \varphi_{Bk} = (1 - \gamma)^{2k}(\varphi_{A0} - \varphi_{B0}). \quad (1)$$

Uvážíme-li, že přenášený náboj je v porovnání s náboji velkých koulí zanedbatelný a že potenciál je úměrný náboji, můžeme napsat

$$Q_{Ak} - Q_{Bk} = (1 - \gamma)^{2k}(Q_{A0} - Q_{B0})$$

a podle zákona zachování náboje

$$Q_{Ak} + Q_{Bk} = Q_{A0} + Q_{B0}. \quad (2)$$

Sečtením vztahů dostaneme

$$Q_{Ak} = \frac{1}{2}Q_{A0} \left[ 1 + (1 - \gamma)^{2k} \right] + \frac{1}{2}Q_{B0} \left[ 1 - (1 - \gamma)^{2k} \right] = 8,5 \text{ nC}$$

a jejich odečtením

$$Q_{Bk} = \frac{1}{2}Q_{A0} \left[ 1 - (1 - \gamma)^{2k} \right] + \frac{1}{2}Q_{B0} \left[ 1 + (1 - \gamma)^{2k} \right] = 2,5 \text{ nC.}$$

**5 bodů**

c) Rozdíl nábojů má být menší, než 1 % součtu původních nábojů, tedy

$$\frac{Q_{Ak} - Q_{Bk}}{Q_{A0} + Q_{B0}} = \frac{(Q_{A0} - Q_{B0})(1 - \gamma)^{2k}}{Q_{A0} + Q_{B0}} = \frac{\left(\frac{Q_{A0}}{Q_{B0}} - 1\right)}{\left(\frac{Q_{A0}}{Q_{B0}} + 1\right)} (1 - \gamma)^{2k} = 0,01$$

$$k = \frac{\ln \left[ 0,01 \frac{\left(\frac{Q_{A0} + 1}{Q_{B0}}\right)}{\left(\frac{Q_{A0} - 1}{Q_{B0}}\right)} \right]}{2 \ln(1 - \gamma)} = 110.$$

**3 body**

*Přesné řešení části b):*

$$\begin{aligned} \text{Z rovnice (1)} \quad \frac{Q_{Ak}}{C + c_0} - \frac{Q_{Bk}}{C} &= (1 - \gamma)^{2k} \left( \frac{Q_{A0}}{C + c_0} - \frac{Q_{B0}}{C} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{C}{C + c_0} Q_{Ak} - Q_{Bk} &= (1 - \gamma)^{2k} \left( \frac{C}{C + c_0} Q_{A0} - Q_{B0} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \gamma) Q_{Ak} - Q_{Bk} &= \{(1 - \gamma) Q_{A0} - Q_{B0}\} (1 - \gamma)^{2k}. \end{aligned}$$

a ze zákona zachování náboje (2)  $Q_{Ak} + Q_{Bk} = Q_{A0} + Q_{B0}$

sečtením a úpravou dostaneme náboj koule A:

$$Q_{Ak} = \frac{1}{2 - \gamma} \left\{ (1 - \gamma) Q_{A0} \left[ 1 + (1 - \gamma)^{2k} \right] + Q_{B0} \left[ 1 - (1 - \gamma)^{2k} \right] \right\} + \frac{\gamma}{2 - \gamma} Q_{A0}.$$

Náboj koule B pak

$$\begin{aligned} Q_{Bk} &= Q_{A0} + Q_{B0} - \frac{1}{2 - \gamma} \left\{ (1 - \gamma) Q_{A0} \left[ 1 + (1 - \gamma)^{2k} \right] + Q_{B0} \left[ 1 - (1 - \gamma)^{2k} \right] \right\} - \\ &= \frac{\gamma}{2 - \gamma} Q_{A0} = \frac{1}{2 - \gamma} \left\{ (1 - \gamma) Q_{A0} \left[ 1 - (1 - \gamma)^{2k} \right] + Q_{B0} \left[ 1 + (1 - \gamma)^{2k} \right] \right\} - \frac{\gamma}{2 - \gamma} Q_{B0} \end{aligned}$$

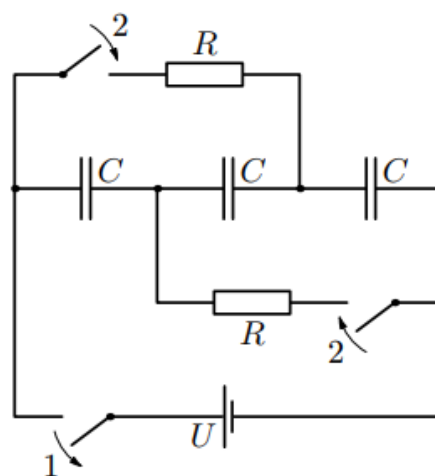
Výsledky se neliší o více než 0,2 %.

### 37.FO50A3-4: Tři kondenzátory

[31 %]

Tři stejné kondenzátory s kapacitou  $C$  byly sériově připojeny ze zdroji o svorkovém napětí  $U$ . Po odpojení zdroje ke kondenzátorům současně připojíme dva rezistory o stejném odporu  $R$  podle obr. 3.

- Na jaké hodnotě se ustálí napětí na jednotlivých kondenzátorech?
- Jaké teplo se během přechodného děje uvolní na každém z rezistorů?
- Vysvětlete, proč v určitém okamžiku bude na prostředním kondenzátoru nulové napětí. Jaký proud bude v tomto okamžiku procházet rezistory?



Obr. 3

## Řešení

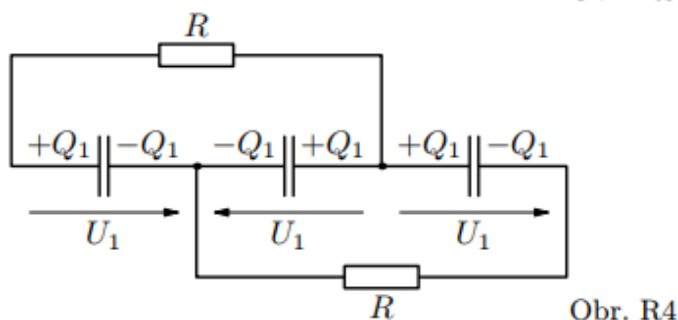
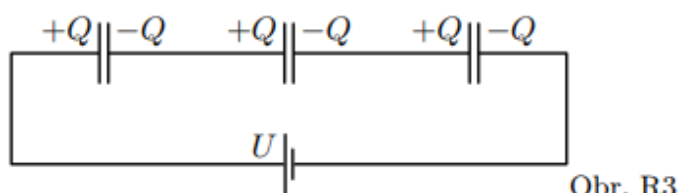
- a) Po připojení kondenzátorů ke zdroji bylo na každém z nich stejné napětí  $U/3$  a na jejich deskách byly stejné náboje o velikosti  $+Q$  a  $-Q$  (obr. R3).

$$Q = \frac{CU}{3}.$$

Po odpojení zdroje a připojení rezistorů dojde k přenosu nábojů mezi deskami kondenzátorů, které tvoří dvě samostatné izolované soustavy (obr R4). Do první patří levá deska levého kondenzátoru, pravá deska prostředního kondenzátoru a levá deska pravého kondenzátoru. Do druhé patří zbývající desky. Po proběhnutí přechodného děje zaniknou proudy v rezistorech a spojené desky budou mít stejný potenciál. Napětí na všech třech kondenzátorech bude mít stejnou velikost  $U_1$ , ovšem na prostředním kondenzátoru bude jeho polarita opačná než na počátku děje. Náboje na deskách všech tří kondenzátorů budou proto mít stejnou velikost  $+Q_1$  a  $-Q_1$ . Ze zákona zachování náboje plyne

$$Q = 3Q_1, \quad U_1 = \frac{Q_1}{C} = \frac{Q}{3C} = \frac{U}{9}.$$

**4 body**



- b) Joulovo teplo  $Q_j$ , které se během přechodného děje uvolní na obou rezistorech, je rovno rozdílu energie kondenzátorů na začátku a na konci děje:

$$Q_j = 3 \cdot \frac{1}{2} C \left( \frac{U}{3} \right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} C U_1^2 = \frac{4}{27} C U^2.$$

Na každém z rezistorů se uvolní teplo  $\frac{2}{27} C U^2$ .

**3 body**

- c) Napětí na prostředním kondenzátoru mění v určitém okamžiku přechodného děje polaritu. V tomto okamžiku je nulové a situaci znázorňuje obr. R5. Na krajních kondenzátorech je v tomto okamžiku stejné napětí  $U_2$  a na jejich deskách jsou

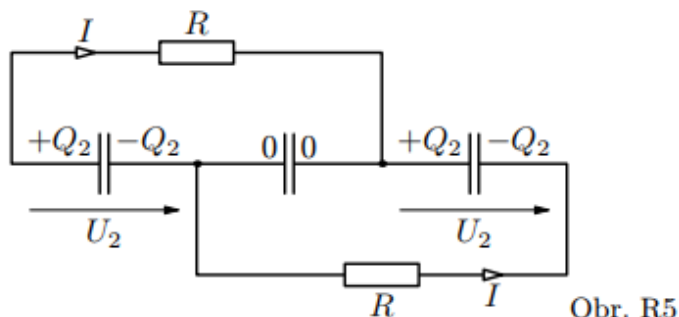
náboje  $+Q_2$  a  $-Q_2$ . Podle zákona zachování náboje platí

$$2Q_2 = Q, \quad U_2 = \frac{Q_2}{C} = \frac{Q}{2C} = \frac{U}{6}.$$

Stejně je v daném okamžiku i napětí na rezistorech, takže jimi prochází proud

$$I = \frac{U_2}{R} = \frac{U}{6R}.$$

**3 body**



Obr. R5

## 5.4.2 Elektrický proud v kovech

38.FO60A3-3a: Dvakrát

[50 %]

- a) Tenký rezistor tvaru válce je připojen ke zdroji stálého napětí a nachází se ve vzduchu, jehož teplota je  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Po určité době se teplota rezistoru ustálí na  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Na jaké hodnotě se ustálí teplota rezistoru ze stejného materiálu za stejných podmínek, budou-li všechny rozměry rezistoru dvakrát větší? (Tepelný výkon, který předává rezistor do okolí, je úměrný velikosti jeho pláště a rozdílu teplot mezi rezistorem a jeho okolím).

**Řešení**

- a) Teplo se na rezistoru uvolňuje s výkonem  $P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 S}{\rho l} = \frac{U^2 \pi r^2}{\rho l}$ . Tento výkon je přímo úměrný velikosti povrchu rezistoru bez podstav a rozdílu teplot mezi rezistorem a okolím  $P = \alpha \cdot 2\pi r l \Delta t$ . Porovnáním vztahů

$$\Delta t = \frac{U^2 \pi r^2}{\alpha \cdot 2\pi r \rho l^2} = \frac{U^2 r}{\alpha \cdot 2\rho l^2}.$$

Zvětší-li se rozměry rezistoru dvakrát, bude teplotní rozdíl dvakrát menší, tedy teplota rezistoru bude  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

**2 body**

- d) V nádobě tvaru kvádrů, jejíž dvě protější stěny jsou z tepelně i elektricky z vodivého materiálu, zbylé stěny a dno jsou nevodivé, je vodivá kapalina. Když ke stěnám nádoby připojíme zdroj stálého proudu, bude se kapalina zahřívat a při určité teplotě začne vřít. Za dobu  $\tau_0 = 10$  minut od počátku varu se množství kapaliny v nádobě dvakrát zmenší. Za jakou dobu se kapalina zcela vypaří?

### Řešení

- d) Teplo, které dodává zdroj stálého proudu, slouží k vypařování vody. Označme  $a$  šířku,  $b$  délku a  $h$  počáteční výšku kapalinového tělesa.

Za krátkou dobu  $dt$  se výška  $x$  hladiny změní o  $dx$  ( $dx < 0$ ) odpařením kapaliny o hmotnosti  $dm = -\rho_k ab dx$ . Za stejnou dobu zdroj dodá energii

$$RI^2 dt = \rho \frac{b}{ax} I^2 dt = l_v dm = -l_v \rho_k ab dx \quad \Rightarrow \quad x dx = -\frac{\rho I^2}{l_v \rho_k a^2} d\tau = -k\tau.$$

Integrováním

$$\int_h^{\frac{h}{2}} x dx = -k \int_0^{\tau_0} d\tau \quad \Rightarrow \quad \left[ \frac{x^2}{2} \right]_h^{\frac{h}{2}} = \frac{h^2}{8} - \frac{h^2}{2} = -k\tau_0 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{8}{3} k\tau_0.$$

Všechna kapalina se vypaří za dobu  $\tau_1$ :

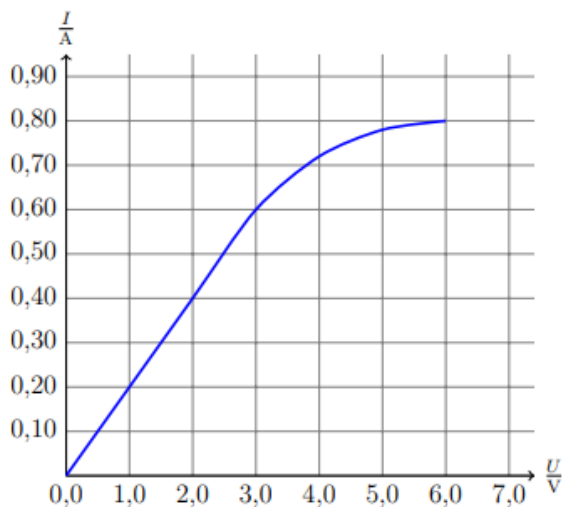
$$\int_h^0 x dx = -k \int_0^{\tau_1} d\tau \quad \Rightarrow \quad \left[ \frac{x^2}{2} \right]_h^0 = -\frac{h^2}{2} = -k\tau_1 \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{h^2}{2k} = \frac{4}{3} \tau_0 = 13 \text{ min}$$

Druhá polovina obsahu nádoby se odpaří za dobu

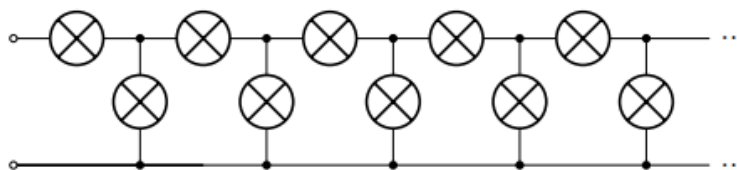
$$\tau_1 - \tau_0 = \frac{h^2}{2k} - \tau_0 = \frac{4}{3} \tau_0 - \tau_0 = \frac{1}{3} \tau_0 = 3,3 \text{ min.}$$

**3 body**

Na obrázku 1 je voltampérová charakteristika malé žárovky. Jaké největší napětí můžeme připojit ke zdírkám nekonečné sítě (obr. 2), vytvořené z takových žárovek, aniž by se některá žárovka přepálila?



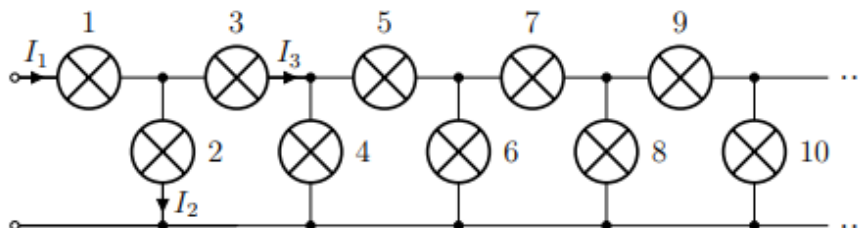
Obr. 1: Voltampérová charakteristika žárovky



Obr. 2: Nekonečná síť stejných žárovek

### Řešení

Ze zapojení žárovek je vidět, že přepálení vlákna hrozí nejvíce u žárovky 1. Proud  $I_1$ , který touto žárovkou prochází, se pak větví na proudy  $I_2$  a  $I_3$ , proud  $I_3$  se pak dále větví (viz obr. R1).



Obr. R1: Proud v síti

Z VA charakteristiky žárovky vidíme, že napětí na každé žárovce (tedy i na žárovce 1) může být nejvýše  $U_1 = 6,0 \text{ V}$  a žárovkou přitom protéká proud  $I_1 = 0,80 \text{ A}$ .

**1 bod**

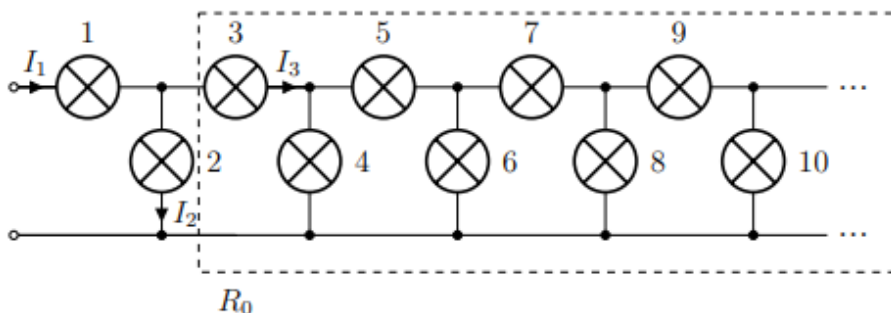
Ostatními žárovkami protéká menší proud a je na nich i menší napětí. Protože napětí na žárovce 2:  $U_2 = U_3 + U_4$ , musí být  $U_2 > U_3$ , a tedy  $I_2 > I_3$ . Proto proud  $I_3 < 0,4 \text{ A}$ .

**1 bod**

Proud procházející ostatními žárovkami je určitě ještě menší, proto můžeme z VA charakteristiky určit, že jejich odpor je stálý a je roven  $R = 5,0 \Omega$ .

**1 bod**

Označme  $R_0$  odpor sítě bez žárovek 1 a 2 (viz obr. R2):



Obr. R2: K odvození odporu

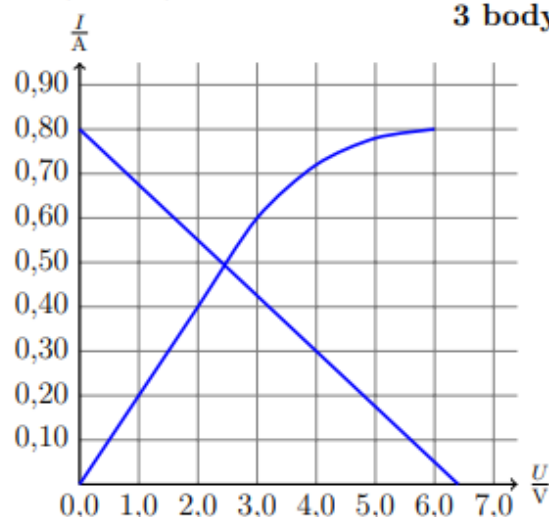
Musí platit:  $R_0 = R + \frac{RR_0}{R+R_0} \Rightarrow R_0 = 0,5(\sqrt{5} + 1)R \doteq 8,1 \Omega$ .

**3 body**

Napětí na žárovce 2:  $U_2 = (I_1 - I_2)R_0$ , takže pro proud platí  $I_2 = I_1 - \frac{U_2}{R_0}$ . Do rovnice dosadíme číselné hodnoty  $I_1$  a  $R_0$ . Hodnoty proudu a napětí na žárovce 2 splňují rovnici  $\{I\} = 0,80 - 0,124\{U\}$ , současně pro ně platí voltampérová charakteristika. Z grafického řešení na obrázku plyne, že hodnota napětí  $U_2 = 2,5 \text{ V}$ .

Síť tedy můžeme připojit na napětí  $U = U_1 + U_2 = 8,5 \text{ V}$ . Hodnotu napětí  $U_2$  lze určit i algebraicky.

**4 body**

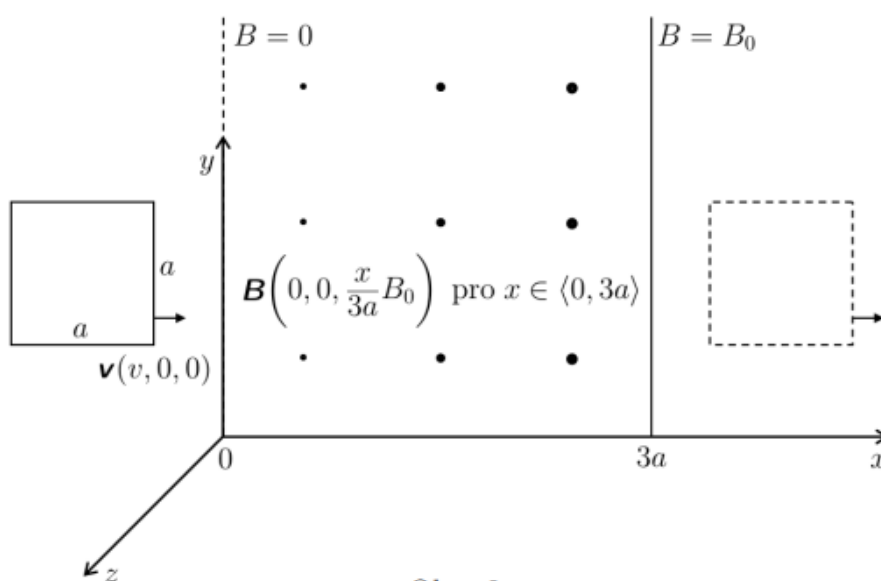


### 5.4.3 Nestacionární magnetické pole

#### 41.FO62A3-4: Rámeček tažený magnetickým polem

[42 %]

V rovinné vrstvě tloušťky  $3a$  orientované kolmo k ose  $x$  se nachází magnetické pole, jehož magnetická indukce má směr osy  $z$  a velikost přímo úměrnou souřadnici  $x$  s maximem  $B_0$  pro  $x = 3a$ . Všude vně této vrstvy je magnetická indukce nulová. Vodič o celkovém odporu  $R$  je vytvarován do čtvercového rámečku s délkou strany  $a$ . Čtvercový rámeček se nachází v rovině  $xy$  mimo magnetické pole vlevo od vrstvy a jeho strany jsou rovnoběžné s osami  $x$  a  $y$ . Rámeček rovnoměrně posouváme ve směru osy  $x$  magnetickým polem stálou rychlostí o velikosti  $v$ , dokud se celý neocetne opět mimo magnetické pole.



Obr. 3

- Sestrojte graf závislosti proudu v rámečku na poloze určené souřadnicí  $x$  pravé strany rámečku, tj. pro  $x \in \langle 0; 4a \rangle$ .
- Určete celkovou práci nutnou k rovnoměrnému posunutí rámečku skrz magnetické pole.
- Určete elektrický náboj, který během pohybu rámečku magnetickým polem projde s rozlišením směru daným průřezem vodiče.



## Řešení

a) Užijeme

$$\begin{aligned} dx &= v dt, \\ U_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -v \cdot \frac{d\Phi}{dx}, \\ I &= \frac{1}{R} U_i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{v}{R} \frac{d\Phi}{dx}. \end{aligned} \quad (1)$$

V první fázi pro  $x \in \langle 0; a \rangle$  je indukční tok procházející rámečkem

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2} B(x) S(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3a} B_0 \cdot ax = \frac{B_0}{6} x^2.$$

Faktor  $\frac{1}{2}$  vychází z toho, že díky linearitě použijeme průměrnou hodnotu indukce  $B$ .

V druhé fázi pro  $x \in \langle a; 3a \rangle$  je indukční tok procházející rámečkem

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x}{3a} B_0 + \frac{x-a}{3a} B_0 \right) \cdot a^2 = \frac{B_0}{6} a (2x - a).$$

V třetí fázi pro  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$  je indukční tok procházející rámečkem

$$\Phi_3(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( B_0 + \frac{x-a}{3a} B_0 \right) \cdot a (4a - x) = \frac{B_0}{6} (-x^2 + 2ax + 8a^2).$$

Podle vztahu (1) dostaneme v jednotlivých fázích proudy

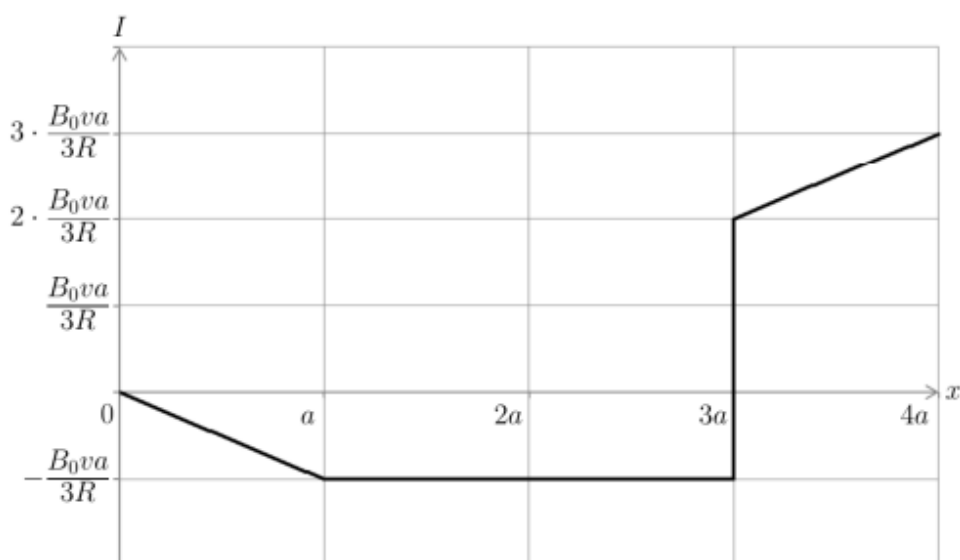
$$I_1 = -\frac{v}{R} \frac{d\Phi_1(x)}{dx} = -\frac{v}{R} \cdot \frac{B_0}{6} \frac{d}{dx} x^2 = -\frac{B_0 v}{3R} x,$$

$$I_2 = -\frac{v}{R} \frac{d\Phi_2(x)}{dx} = -\frac{v}{R} \cdot \frac{B_0}{6} a \frac{d}{dx} (2x - a) = -\frac{B_0 v}{3R} a = \text{konst.},$$

$$I_3 = -\frac{v}{R} \frac{d\Phi_3(x)}{dx} = -\frac{v}{R} \cdot \frac{B_0}{6} \frac{d}{dx} (-x^2 + 2ax + 8a^2) = \frac{B_0 v}{3R} (x - a).$$

V první a druhé fázi je proud záporný, protože indukční tok procházející rámečkem roste, ve třetí fázi je proud kladný, protože indukční tok klesá.

**4 body**



Obr. R5

*Alternativní řešení:* Při přechodu pravého vodiče magnetickým polem, tj. pro  $x \in \langle 0; 3a \rangle$  se mezi jeho konci indukuje napětí, které způsobuje proud

$$I'(x) = \frac{U'(x)}{R} = \frac{B(x)av}{R} = \frac{\frac{x}{3a}B_0av}{R} = \frac{B_0v}{3R}x.$$

Obdobně při přechodu levého vodiče, tj. pro  $x \in \langle a; 4a \rangle$ , se mezi jeho konci indukuje napětí, které způsobuje proud

$$I''(x) = \frac{U''(x)}{R} = \frac{B(x)av}{R} = \frac{\frac{x-a}{3a}B_0av}{R} = \frac{B_0v}{3R}(x-a).$$

V první fázi, kdy  $x \in \langle 0; a \rangle$ , vzniká napětí pouze na pravém vodiči, čímž rámečkem protéká proud

$$I_1(x) = I'(x) = \frac{B_0v}{3R}x.$$

V druhé fázi, kdy  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$ , se celý rámeček nachází v magnetickém poli, přitom se v levém a v pravém vodiči indukuje napětí s navzájem opačnou orientací. Rámečkem protéká proud

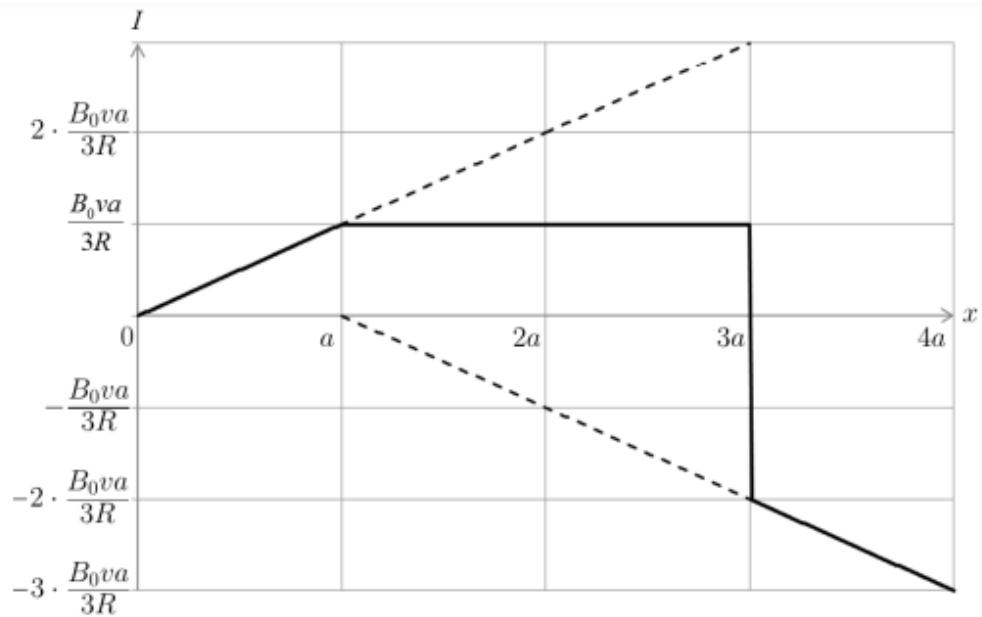
$$I_2 = I'(x) - I''(x) = \frac{B_0v}{3R}a = \text{konst.}$$

V třetí fázi, kdy  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$ , vzniká napětí pouze na levém vodiči, čímž protéká proud

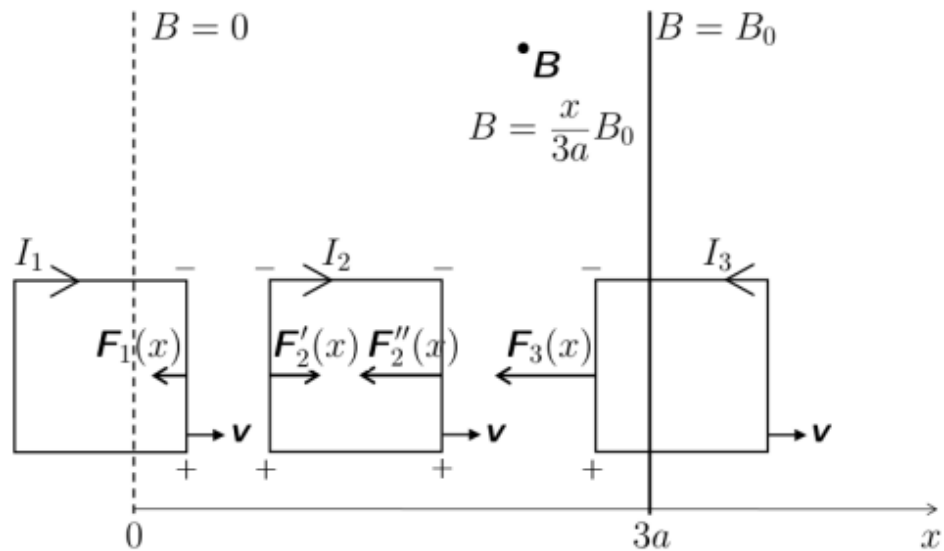
$$I_3(x) = -I''(x) = -\frac{B_0v}{3R}(x-a).$$

Proudy vyšly s navzájem opačným znaménkem než ve výše uvedeném řešení z důvodu volby prvního proudu jako proudu kladného (při této volbě vyjde graf převrácený kolem osy  $x$ ).

*Při hodnocení je pořadí kladného a záporného proudu osobní volbou řešitele, ale dva navzájem různé směry proudu je nutné v řešení odlišit.*



Obr. R6



Obr. R7

- b) V první fázi pro  $x \in \langle 0; a \rangle$  působí na pravý vodič, a tedy na rámeček, magnetická síla o velikosti

$$F_1(x) = B(x) I_1(x) a = \frac{x}{3a} B_0 \cdot \frac{B_0 v}{3R} x \cdot a = \frac{B_0^2 v}{9R} x^2.$$

Práce stejně velké vnější síly opačného směru je

$$W_1 = \int_0^a F_1(x) dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \int_0^a x^2 dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{B_0^2 v}{27R} a^3.$$

V druhé fázi pro  $x \in \langle a; 3a \rangle$  působí na rámeček výsledná magnetická síla o ve-

likosti

$$\begin{aligned} F_2(x) &= F_2'(x) - F_2''(x) = B'(x) I_2 a - B''(x) I_2 a = \\ &= \frac{x}{3a} B_0 \cdot \frac{B_0 v}{3R} a \cdot a - \frac{x-a}{3a} B_0 \cdot \frac{B_0 v}{3R} a \cdot a = \frac{B_0^2 v}{9R} a^2 = \text{konst.} \end{aligned}$$

Práce stejně velké vnější síly opačného směru je

$$W_2 = \int_a^{3a} F_2(x) dx = \frac{B_0^2 v}{9R} a^2 \int_a^{3a} dx = \frac{B_0^2 v}{9R} a^2 [x]_a^{3a} = \frac{2B_0^2 v}{9R} a^3$$

nebo vzhledem ke konstantní síle přímo

$$W_2 = F_2 \cdot 2a = \frac{6B_0^2 v}{27R} a^3.$$

Ve třetí fázi pro  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$  působí na levý vodič, a tedy na rámeček, magnetická síla o velikosti

$$F_3(x) = B(x) I_3(x) a = \frac{x-a}{3a} B_0 \cdot \frac{B_0 v}{3R} (x-a) \cdot a = \frac{B_0^2 v}{9R} (x-a)^2.$$

Práce stejně velké vnější síly opačného směru je

$$\begin{aligned} W_3 &= \int_{3a}^{4a} F_3(x) dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \int_{3a}^{4a} (x^2 - 2ax + a^2) dx = \\ &= \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2 x \right]_{3a}^{4a} = \frac{19B_0^2 v}{27R} a^3. \end{aligned}$$

Celková práce vykonaná vnější silou je  $W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{26B_0^2 v}{27R} a^3$ .

**4 body**

*Alternativní řešení:* Práce vykonaná vnější silou je rovna přírůstku vnitřní energie smyčky, která se průchodem proudu zahřívá. Využijeme integrál

$$W = \int P dt = \int R I^2 dt = \frac{R}{v} \int I^2 dx.$$

V jednotlivých fázích je práce

$$W_1 = \frac{R}{v} \int_0^a I_1^2 dx = \frac{R}{v} \cdot \frac{B_0^2 v^2}{9R^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{B_0^2 v}{27R} a^3,$$

$$W_2 = R I_2^2 t = R I_2^2 \cdot \frac{2a}{v} = R \cdot \frac{B_0^2 v^2 a^2}{9R^2} \cdot \frac{2a}{v} = \frac{6B_0^2 v}{27R} a^3,$$

$$W_3 = \frac{R}{v} \int_{3a}^{4a} I_3^2 dx = \frac{R}{v} \cdot \frac{B_0^2}{9R^2} \int_{3a}^{4a} (x-a)^2 dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{(x-a)^3}{3} \right]_{3a}^{4a} = \frac{19B_0^2 v}{27R} a^3.$$

Celková práce vykonaná vnější silou je  $W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{26B_0^2 v}{27R} a^3$ .

- c) Využijeme graf získaný v části a) a obsah plochy mezi tímto grafem a osou  $x$ . Během první a druhé fáze teče proud jedním směrem, během třetí fáze teče proud opačně. Uvažovaná plocha pro první a druhou fázi má stejnou velikost jako plocha pro třetí fázi.

Označme  $T = \frac{a}{v}$  dobu, za kterou se rámeček posune o délku  $a$ . Jednotkovému obsahu plochy  $I_2 a$  odpovídá náboj  $\Delta Q$ , pro který platí

$$I_2 a = \frac{\Delta Q}{T} a = \Delta Q \frac{a}{T} = \Delta Q v.$$

Celkový obsah plochy je  $\frac{5}{2} I_2 a$  a celkový náboj

$$Q = \frac{5}{2} \Delta Q = \frac{5 B_0 a^2}{6 R}.$$

Tento náboj projde v první a druhé fázi jedním směrem a ve třetí fázi opačným směrem. **2 body**

*Alternativní řešení:* Užijeme integrály

$$Q_1 = \int_0^a I_1(x) dt = \int_0^a \frac{B_0 v}{3R} x \cdot \frac{dx}{v} = \left[ \frac{B_0}{6R} x^2 \right]_0^a = \frac{B_0 a^2}{6R},$$

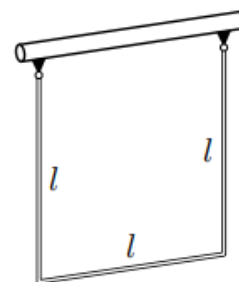
$$Q_2 = I_2 \cdot \frac{2a}{v} = \frac{B_0 v a}{3R} \cdot \frac{2a}{v} = \frac{2 B_0 a^2}{3R},$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{5 B_0 a^2}{6R},$$

$$Q = Q_3 = \int_{3a}^{4a} I_3(x) dt = \int_{3a}^{4a} \frac{B_0 v}{3R} (x - a) \cdot \frac{dx}{v} = \left[ \frac{B_0}{3R} \left( \frac{x^2}{2} - ax \right) \right]_{3a}^{4a} = \frac{5 B_0 a^2}{6R}.$$

#### 42.FO53A3-1: Elektromagnetická indukce v pravoúhlém rámečku [38 %]

Pravoúhlý rámeček složený ze tří stejných vodičů délky  $l$  je zavěšen na vodorovné nevodivé tyči (obr. 1) v prostoru homogenního magnetického pole s magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$ . Rámeček vychýlíme do vodorovné polohy a uvolníme.



Obr. 1

- Určete maximální úhlovou rychlost pohybu.
- Určete maximální velikost indukovaného napětí mezi závěsy, má-li magnetická indukce  $\mathbf{B}$  1) svislý směr, 2) směr osy otáčení, 3) vodorovný směr kolmý k ose otáčení.

Řešte obecně, všechny číselné koeficienty vyjádřete přesně. Odpor vzduchu považujte za zanedbatelný. Moment setrvačnosti tenké homogenní tyče o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  vzhledem k příčné ose otáčení procházející těžištěm je

$$J_0 = \frac{1}{12} m l^2.$$

## Řešení

- a) Označme  $m$  hmotnost celého rámečku,  $h$  hloubku těžiště, kterou budeme měřit od osy otáčení. Potom platí

$$mgh = 2 \cdot \frac{m}{3}g\frac{l}{2} + \frac{m}{3}gl,$$

z čehož

$$h = \frac{2}{3}l.$$

Dále určíme moment setrvačnosti celého rámečku vzhledem k ose otáčení jako součet momentů setrvačnosti jednotlivých částí. K výpočtu těchto dílčích momentů použijeme Steinerovu větu. Pro moment setrvačnosti jedné svislé části rámečku vzhledem k ose procházející závěsem platí

$$J_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{3}l^2 + \frac{m}{3} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{9}ml^2.$$

Pro moment setrvačnosti vodorovné části rámečku vzhledem k ose procházející závěsem platí

$$J_2 = \frac{m}{3}l^2.$$

Celkový moment setrvačnosti je pak

$$J = 2J_1 + J_2 = \frac{5}{9}ml^2.$$

Ze ZZME plyne

$$mgh = \frac{1}{2}J\omega^2,$$

z čehož

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{12g}{5l}}.$$

**2 body**

- b1) Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se mezi konci přímého vodiče délky  $l$ , který se pohybuje příčně rychlostí  $\mathbf{v}$  v magnetickém poli o indukci  $\mathbf{B}$ , indukuje napětí o velikosti

$$U_i = Blv \sin \alpha,$$

kde  $\alpha$  je odchylka vektorových přímků vektorů  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{v}$ . Bez ohledu na orientaci indukce nahoru či dolů bude na středním vodiči maximální velikost napětí při průchodu nejnižší polohou, kde je  $\sin \alpha = 1$  a současně i velikost rychlosti maximální:

$$v_{\max} = l\omega_{\max} = \sqrt{\frac{12}{5}}gl.$$

Po dosazení dostaneme

$$U_{i\max} = Blv_{\max} = B\sqrt{\frac{12}{5}gl^3}.$$

Závěsné vodiče se pohybují v rovinách rovnoběžných s vektorem magnetické indukce, napětí se na nich neindukuje.

**2 body**

- b2) Na závěsných vodičích má indukované napětí navzájem opačnou polaritu, na zbývajícím vodorovném vodiči je napětí nulové. Proto je  $U_i = 0$ .

**1 bod**

- b3) Označme  $\alpha$  opět okamžitou odchylku vektorových přímek vektorů  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{v}$ . Ve výchozí vodorovné poloze rámečku je velikost rychlosti nulová, ve svislé poloze rámečku je  $\sin \alpha = 0$ , tedy v těchto polohách je indukované napětí nulové. Maximální velikost napětí budeme hledat mezi těmito polohami. Rámeček má během pohybu těžiště v hloubce

$$h_\alpha = \frac{2}{3}l \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}l \cos \alpha.$$

V této poloze je velikost rychlosti středního vodiče

$$v = l\omega = \sqrt{\frac{12}{5}gl \cos \alpha}$$

a velikost indukovaného napětí mezi jeho konci

$$U_i = Blv \sin \alpha = B\sqrt{\frac{12}{5}gl^3} \cdot \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha}.$$

Závěsné vodiče indukční čáry neprotínají, napětí se na nich neindukuje.

Maximum funkce najdeme pomocí derivace podle proměnné  $\alpha$ :

$$\frac{d}{d\alpha}(\sin \alpha \sqrt{\cos \alpha}) = \cos \alpha \sqrt{\cos \alpha} + \sin \alpha \frac{-\sin \alpha}{2\sqrt{\cos \alpha}} = \frac{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2\sqrt{\cos \alpha}}.$$

Z podmínky nulové derivace dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \quad (\alpha = 54,7^\circ).$$

Ze vztahů mezi goniometrickými funkcemi dále odvodíme

$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}, \quad \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha} = \sqrt[4]{\frac{4}{27}} = 0,620.$$

Maximální velikost indukovaného napětí je

$$U_{i\max} = B\sqrt{\frac{12}{5}gl^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{27}} = \sqrt[4]{\frac{64}{75}} \cdot B\sqrt{gl^3}.$$

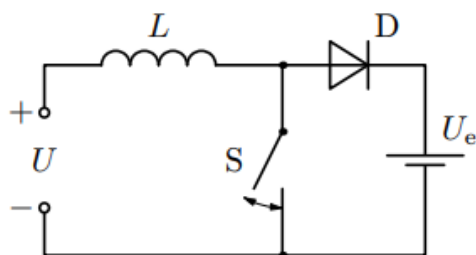
**5 bodů**

43.FO51A3-2: Nabíjení akumulátoru ze zdroje o menším napětí (!)[25 %]

K nabíjení akumulátoru o elektromotorickém napětí  $U_e = 12,0$  V ze zdroje o svorkovém napětí  $U = 5,0$  V a zanedbatelném vnitřním odporu použijeme obvod podle obr. 3 sestavený z cívky o indukčnosti  $L = 1,0$  H, diody D a přerušovače S, který se periodicky zapíná a vypíná ve stejných časových intervalech  $\tau_1 = \tau_2 = 0,010$  s.

- Určete a graficky znázorníte, jak se bude v závislosti na čase měnit proud procházející cívkou.
- Určete střední hodnotu proudu nabíjecího akumulátoru.

Cívku a diodu považujte za ideální, vnitřní odpor akumulátoru zanedbejte.



Obr. 3

Řešení

- Po sepnutí kontaktů přerušovače začne cívkou procházet proud  $i$ , který postupně roste a v cívce se indukuje elektromotorické napětí  $U_i$  stejně velké jako elektromotorické napětí zdroje a orientované opačným směrem. Platí

$$U_i = -L \frac{di}{dt} = -U \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{U}{L} = \text{konst.}$$

Proud cívkou se tedy zvětšuje rovnoměrně a za dobu  $\tau_1$  dosáhne hodnoty

$$I_0 = \frac{U}{L} \tau_1 = 50 \text{ mA.}$$

Po rozpojení kontaktů začne proud v cívce klesat a indukované napětí je orientované stejně jako elektromotorické napětí zdroje a opačně než elektromotorické napětí akumulátoru. Proud prochází přes diodu do akumulátoru. Platí

$$U_i = -L \frac{di}{dt} = U - U_e \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = -\frac{U_e - U}{L} = \text{konst.}$$

Proud se tedy bude zmenšovat lineárně podle vztahu

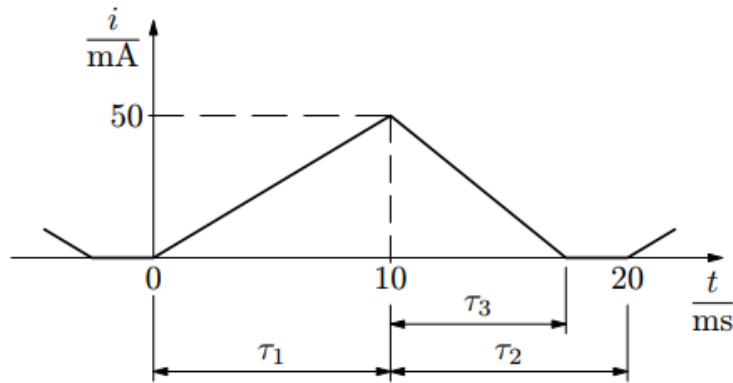
$$i = I_0 - \frac{U_e - U}{L} t.$$

Za dobu  $\tau_3 = \frac{I_0 L}{U_e - U} = \frac{U}{U_e - U} \tau_1 = 0,00714 \text{ s} < \tau_2$

klesne na nulu a dioda přejde do závěrného režimu. Po uplynutí doby  $\tau_2$  se celý děj opakuje (obr. R1).

**6 bodů**





Obr. R1

- b) Akumulátor se nabíjí po dobu  $\tau_3$  průměrným proudem  $I_0/2$  a získá přitom náboj

$$\Delta Q = \frac{I_0}{2} \tau_3 = \frac{U^2 \tau_1^2}{2L(U_e - U)}.$$

Střední hodnota proudu nabíjecího akumulátor je

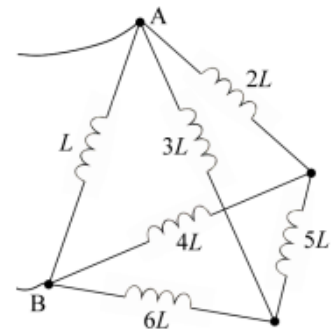
$$I_{\text{stř}} = \frac{\Delta Q}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\Delta Q}{2\tau_1} = \frac{U^2 \tau_1}{4L(U_e - U)} = 8,9 \text{ mA}.$$

**4 body**

#### 44.FO62A3-1: Čtyřstěn s cívkami

(!)[24 %]

Šest ideálních cívek je spojeno tak, že tvoří hrany čtyřstěnu (obr. 1). K cívce o vlastní indukčnosti  $L = 2 \text{ mH}$ , zapojené mezi body A a B, připojíme ideální zdroj s elektromotorickým napětím  $U_e = 4,5 \text{ V}$ ; v sérii se zdrojem pak rezistor o odporu  $R = 100 \Omega$ , miliampérmetr se zanedbatelným vnitřním odporem a klíč, který je rozepnutý. Vzájemná indukčnost cívek je zanedbatelná.



Obr. 1

- Připojíme-li sériově zapojený rezistor o odporu  $R$  a cívku o indukčnosti  $L$  k ideálnímu zdroji stejnosměrného napětí, platí pro závislost proudu na čase od sepnutí obvodu  $I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ . Odvoďte tento vztah.
- Jaký proud ukáže miliampérmetr 30 s po zapnutí klíče v našem schématu?
- Jaký proud protéká každou z cívek v okamžiku, kdy miliampérmetr ukazuje proud  $I_A = 34,5 \text{ mA}$ ?

## Řešení

- a) Při zapnutí proudu se na cívce indukuje napětí, takže pro procházející proud platí:

$$I = \frac{U_e - L \frac{dI}{dt}}{R}.$$

Označíme-li konečný proud  $I_0 = \frac{U_e}{R}$ , pak  $I_0 - I = \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}$ .

Napíšeme-li  $dI = -d(I_0 - I)$ , vychází

$$\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Integrací této diferenciální rovnice obdržíme

$$\ln(I_0 - I) = -\frac{R}{L}t + \ln C.$$

Integrační konstantu stanovíme z počátečních podmínek. Pro  $t = 0$  je  $I = 0$  a tedy  $\ln C = \ln I_0$ , takže platí

$$\ln \frac{I_0 - I}{I_0} = -\frac{R}{L}t \quad \text{neboli} \quad I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

**3 body**

- b) Bez ohledu na celkovou indukčnost zapojení cívek má podíl  $\frac{R}{L}$  hodnotu řádově  $10^4$  až  $10^5 \text{ s}^{-1}$ . V čase 30 s po zapojení klíče bude tedy hodnota proudu již stálá a rovna hodnotě

$$I_0 = \frac{U_e}{R} = 45 \text{ mA}.$$

**2 body**

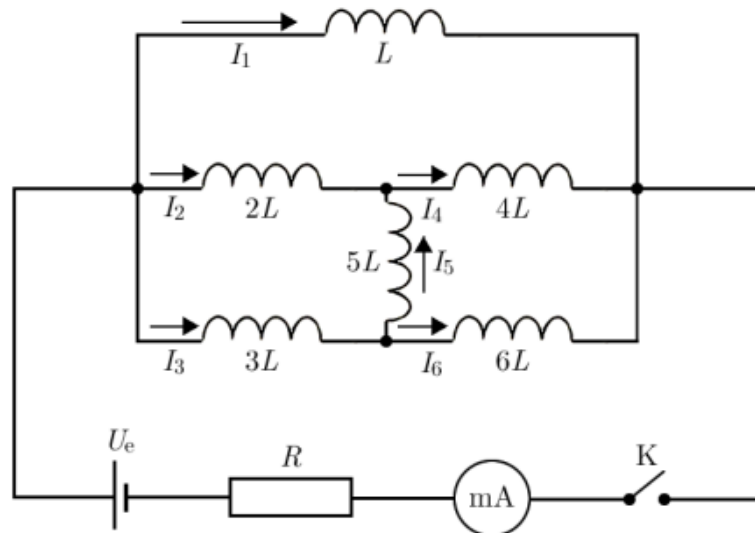
- c) Schéma překreslíme (viz obr. R1). Během přechodného děje do ustálení proudu část napětí připadá na rezistor a nenulový zbytek napětí bude mezi krajními body soustavy cívek. Toto napětí ( $U_e - RI_A$ ) je v každé větvi v daném okamžiku rovno součtu velikostí indukovaných napětí v této větvi. Mezi vnitřními uzly je vzhledem k symetrii obvodu napětí nulové, tedy velikost proudu  $I_5 = 0 \text{ A}$ . Časové přírůstky proudů a tím i proudy v každé větvi jsou nepřímo úměrné indukčnosti větve, proto

$$I_1 : I_2 : I_3 = 9 : \frac{3}{2} : 1; \quad I_2 = I_4; \quad I_3 = I_6.$$

Protože  $I_A = I_1 + I_2 + I_3 = 34,5 \text{ mA}$ , dostáváme po vyřešení soustavy rovnic

$$I_1 = 27 \text{ mA}, \quad I_2 = I_4 = 4,5 \text{ mA}, \quad I_3 = I_6 = 3 \text{ mA}, \quad I_5 = 0 \text{ mA}.$$

**5 bodů**



Obr. R1

*Alternativní řešení s využitím Kirchhoffových zákonů.*

Podle 1. Kirchhoffova zákona  $I_2 + I_5 = I_4$  a  $I_3 = I_5 + I_6$  a také  $I_A = I_1 + I_2 + I_3$ . Hodnotu 34,5 mA ukazuje miliampérmetr v době, kdy proud v obvodu není stálý a na cívkách se indukují napětí, které závisí na indukčnosti každé cívky.

Na každé cívce se při změně proudu indukují napětí  $U_i = -L \frac{dI}{dt}$ .

Zapíšeme Kirchhoffovy zákony pro smyčky, které neobsahují zdroj:

$$-2L \frac{dI_2}{dt} + 5L \frac{dI_5}{dt} + 3L \frac{dI_3}{dt} = 0,$$

nebo

$$-2L \Delta I_2 + 5L \Delta I_5 + 3L \Delta I_3 = 0.$$

Protože počáteční proud je roven nule, můžeme napsat

$$-2I_2 + 5I_5 + 3I_3 = 0.$$

Analogicky můžeme napsat

$$-I_1 + 4I_4 + 2I_2 = 0,$$

$$-4I_4 - 5I_5 + 6I_6 = 0.$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme:

$$I_1 = 27 \text{ mA}, \quad I_2 = I_4 = 4,5 \text{ mA}, \quad I_3 = I_6 = 3 \text{ mA}, \quad I_5 = 0 \text{ mA}.$$

## 5.4.4 Střídavý proud

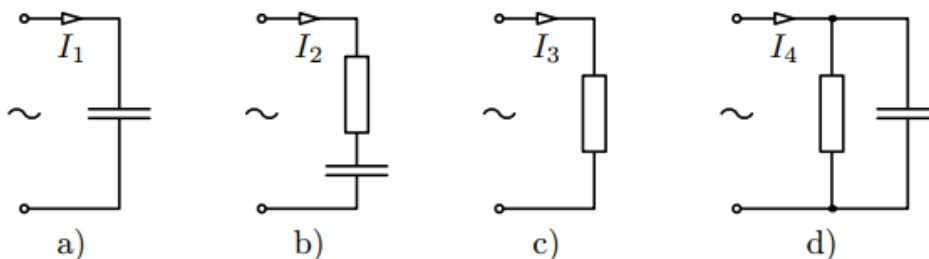
### 45.FO53A3-2: Kondenzátor a rezistor

[71 %]

Kondenzátorem připojeným ke zdroji střídavého harmonického napětí procházel proud  $I_1$  (obr. 2a). Jestliže byl tentýž kondenzátor připojen sériově s rezistorem, procházel obvodem proud  $I_2$  (obr. 2b).

- Porovnejte rezistanci  $R$  rezistoru s kapacitancí  $X_C$  kondenzátoru.
- Jaké bylo fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu  $I_2$ ?
- Jaký proud  $I_3$  by procházel obvodem, kdybychom ke zdroji připojili samotný rezistor (obr. 2c) ?
- Jaký celkový proud  $I_4$  by procházel obvodem, kdybychom kondenzátor a rezistor připojili paralelně (obr. 2d)?
- Jaké by bylo fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu  $I_4$ ?

Vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný, ve všech případech je tedy jeho svorkové napětí stejné. Řešte obecně, pak pro hodnoty  $I_1 = 50 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 40 \text{ mA}$ .



Obr. 2

### Řešení

- V obvodu se samotným kondenzátorem platí  $I_1 = U/X_C$ . Z fázorového diagramu sériového spojení kondenzátoru s rezistorem na obr. R1 plyne

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{(RI_2)^2 + (X_C I_2)^2} = I_2 \sqrt{R^2 + X_C^2}.$$

Platí tedy

$$\frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{R^2 + X_C^2}{X_C^2} \Rightarrow R^2 = X_C^2 \left( \frac{I_1^2}{I_2^2} - 1 \right),$$

$$R = X_C \sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1} = 0,75 X_C.$$

4 body

b) Fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu  $I_2$  určíme rovněž z obr. R1. Platí

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{X_C}{R} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}} = -\frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = -\frac{4}{3}, \quad \varphi_2 = -53^\circ.$$

Proud  $I_2$  tedy předbíhá před svorkovým napětím fázově o  $53^\circ$ .

**1 bod**

c) Samotným rezistorem bude procházet proud

$$I_3 = \frac{U}{R} = \frac{X_C I_1}{X_C \sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}} = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = 67 \text{ mA}.$$

**1 bod**

d) Z fázorového diagramu paralelního zapojení kondenzátoru s rezistorem na obr. R2 odvodíme

$$\begin{aligned} I_4 &= \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{\frac{U^2}{R^2} + \frac{U^2}{X_C^2}} = \frac{U \sqrt{X_C^2 + R^2}}{R X_C} = \\ &= \frac{X_C I_1 \cdot X_C \sqrt{1 + \frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}}{X_C^2 \sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}} = \frac{I_1^2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = 83 \text{ mA}. \end{aligned}$$

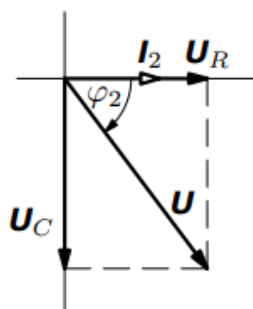
**3 body**

e) Fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu  $I_4$  určíme z obr. R2. Platí

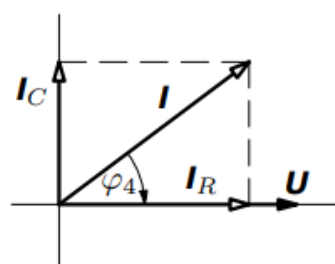
$$\operatorname{tg} \varphi_4 = -\frac{I_C}{I_R} = -\frac{I_1}{I_3} = -\frac{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}}{I_2} = -0,75, \quad \varphi_4 = -37^\circ.$$

Proud  $I_4$  tedy předbíhá před svorkovým napětím fázově o  $37^\circ$ .

**1 bod**



Obr. R1

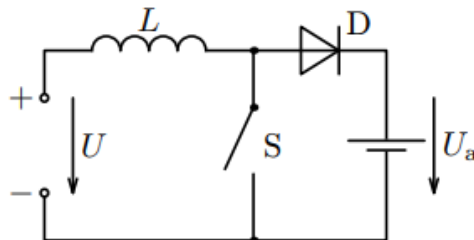


Obr. R2

K nabíjení akumulátoru o svorkovém napětí  $U_a = 12,0 \text{ V}$  z výkonového zdroje o svorkovém napětí  $U = 5,0 \text{ V}$  použijeme obvod podle obr. 1 skládající se z cívky o indukčnosti  $L = 1 \text{ H}$ , diody D a spínače S, který bude střídavě zapínán a vypínán ve stejných časových intervalech  $\tau_1 = \tau_2 = 0,010 \text{ s}$ .

- Určete a graficky znázorněte, jak se v závislosti na čase bude měnit okamžitý proud  $i$  procházející cívkou, okamžité napětí  $u_L$  na cívce a okamžité napětí  $u_D$  na diodě.
- Určete střední hodnotu proudu nabíjecího akumulátor.

Vnitřní odpory výkonového zdroje a akumulátoru jsou zanedbatelné a svorkové napětí akumulátoru se během nabíjení zvětšuje jen nepatrně. Cívku považujte za ideální. Také diodu považujte za ideální, tj. napětí na ní je v propustném směru zanedbatelné, odpor v závěrném směru je nekonečně velký.

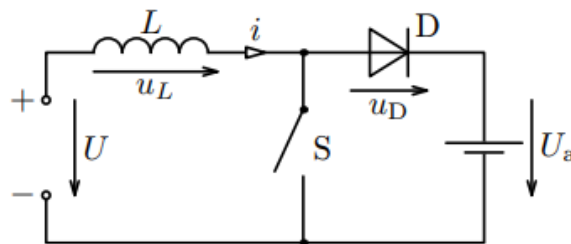


Obr. 1

### Řešení

- Ve schématu vyznačíme veličiny  $i$ ,  $u_L$  a  $u_D$ , které nás zajímají (obr. R1). Při zvolené orientaci platí

$$u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{u_L}{L}.$$



Obr. R1

Sepnutím spínače na začátku časového intervalu  $\tau_1$  rozdělíme celý obvod na dva samostatné okruhy. Součet napětí v každém z nich je nulový. V levém okruhu platí

$$u_L - U = 0 \Rightarrow u_L = U, \quad \frac{di}{dt} = \frac{U}{L} = \text{konst} > 0,$$

proud cívkou tedy z počáteční nulové hodnoty rovnoměrně poroste a v čase  $t = \tau_1$  dosáhne hodnoty  $I_{\max}$ , pro kterou platí

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{I_{\max}}{\tau_1} = \frac{U}{L} \Rightarrow I_{\max} = \frac{U\tau_1}{L} = 0,050 \text{ A}.$$

V pravém okruhu během časového intervalu  $\tau_1$  platí

$$u_D + U_a = 0 \Rightarrow u_D = -U_a < 0.$$

Dioda je tedy v intervalu  $\tau_1$  zapojena v závěrném směru a proud v pravém okruhu je nulový.

**3 body**

V okamžiku rozpojení spínače na začátku časového intervalu  $\tau_2$  se proud cívku nepřerušuje, ale pronikne do diody, která se dostane do propustného stavu, a napětí na ní bude nulové. Celé zapojení se změní na jediný okruh, ve kterém platí

$$u_L + u_D + U_a - U = u_L + U_a - U = 0 \Rightarrow u_L = U - U_a = \text{konst} < 0.$$

Napětí na cívce má opačný směr než procházející proud, který se bude z počáteční hodnoty  $I_{\max}$  zmenšovat podle vztahu

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{i - I_{\max}}{t} = \frac{U - U_a}{L} \Rightarrow i = I_{\max} - \frac{U_a - U}{L}t$$

( $t$  měříme od začátku intervalu  $\tau_2$ ). Proud klesne na nulu za dobu

$$\tau_3 = \frac{I_{\max}L}{U_a - U} = \frac{U}{U_a - U}\tau_1 = 0,00714 \text{ s} < \tau_2.$$

Ve zbývajícím čase do konce intervalu  $\tau_2$  přejde dioda do závěrného stavu, cívku přestane procházet proud a napětí na ní klesne na nulu. Napětí na diodě se naopak změní z nuly na  $U - U_a = -7 \text{ V}$ .

**5 bodů**

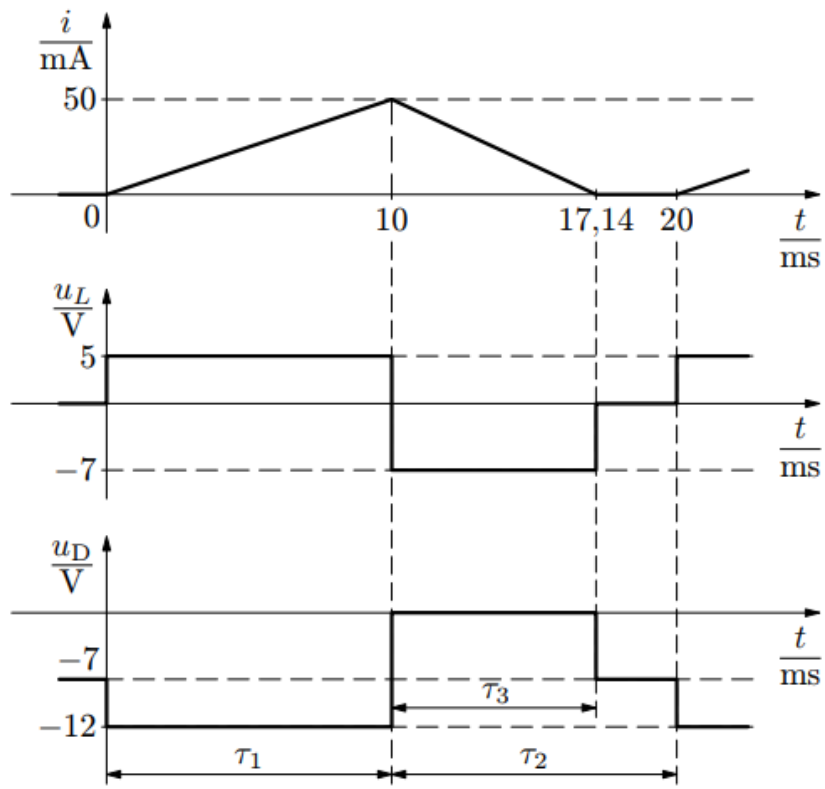
- b) Nabíjecí proud prochází do akumulátoru jen v časovém intervalu  $\tau_3$  a jeho velikost se lineárně zmenšuje z  $I_{\max}$  na nulu. Za tuto dobu projde do akumulátoru náboj

$$Q = \frac{I_{\max}\tau_3}{2} = \frac{U^2\tau_1^2}{2L(U_a - U)}.$$

Střední hodnota nabíjecího proudu je

$$I_{\text{stř}} = \frac{Q}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{U^2\tau_1^2}{2L(U_a - U)(\tau_1 + \tau_2)} = 8,9 \text{ mA}.$$

**2 body**



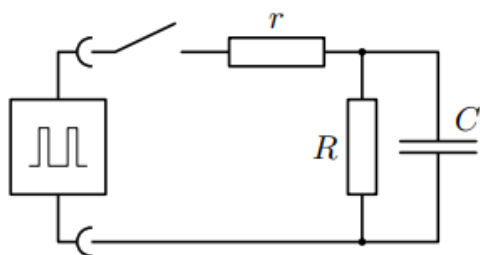
Obr. R2



Elektrický obvod je tvořen zdrojem obdélníkových impulzů, spínačem, dvěma rezistory o odporech  $r$  a  $R$  a kondenzátorem o kapacitě  $C$  (obr. 2). Obdélníkové impulzy mají amplitudu  $U_0$ , dobu trvání  $\tau$  a periodu  $T$  (obr. 3). Vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný. (To mj. znamená, že pokud je svorkové napětí zdroje nulové, chová se zdroj jako zkrat.)

Sepneme-li spínač, bude po delší době napětí na kondenzátoru kolísat okolo stálé průměrné hodnoty  $U_C$ , přičemž zvlnění  $\Delta U$ , tj. rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou okamžitého napětí kondenzátoru během jedné periody zdroje, bude mnohem menší než průměrná hodnota  $U_C$ .

- Za daných předpokladů stanovte  $U_C$  a  $\Delta U$ .
- Určete podmínku, kterou musí splňovat veličiny  $R$ ,  $r$ ,  $C$ ,  $\tau$  a  $T$ , aby byl zajištěn předpoklad úlohy že  $\Delta U \ll U_C$ .
- Ověřte, že je tato podmínka splněna, jestliže  $R = 1,00 \text{ M}\Omega$ ,  $r = 220 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1,00 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $\tau = 2,0 \text{ ms}$ ,  $T = 10,0 \text{ ms}$  a  $U_0 = 5,00 \text{ V}$ . Vypočítejte pak číselné hodnoty  $U_C$  a  $\Delta U$ .



Obr. 2



Obr. 3

### Řešení

- Okamžité napětí na kondenzátoru kolísá jen nepatrně okolo průměrné hodnoty  $U_C$ . Po dobu trvání impulzu se kondenzátor nabíjí a jeho náboj se zvětší o

$$Q_1 = \left( \frac{U_0 - U_C}{r} - \frac{U_C}{R} \right) \tau = \left( \frac{U_0}{r} - \frac{U_C(R+r)}{Rr} \right) \tau.$$

Ve zbývající části periody se vybíjí a jeho náboj se zmenší o

$$Q_2 = \left( \frac{U_C}{r} + \frac{U_C}{R} \right) (T - \tau) = \left( \frac{U_C(R+r)}{Rr} \right) (T - \tau).$$

Z rovnosti  $Q_1 = Q_2$  dostaneme

$$\frac{U_0}{r} \tau = \frac{U_C(R+r)}{Rr} T, \quad U_C = \frac{U_0 R}{r+R} \cdot \frac{\tau}{T}.$$

**3 body**

Změna napětí na kondenzátoru během trvání impulzu je

$$\Delta U = \frac{Q_1}{C} = \left( \frac{U_0}{r} - \frac{U_C(R+r)}{Rr} \right) \frac{\tau}{C} = \frac{U_0 \tau}{rC} \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right).$$

Stejně velký je pokles napětí ve zbývající části periody.

**3 body**

b) Dosazením do vztahu  $\Delta U \ll U_C$  dostaneme  $\frac{U_0 \tau}{rC} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \ll \frac{U_0 R}{r+R} \cdot \frac{\tau}{T}$ ,

$$T - \tau \ll C \cdot \frac{Rr}{R+r}.$$

**2 body**

c) Pro dané hodnoty platí

$$8 \cdot 10^{-3} \text{ s} = T - \tau \ll C \cdot \frac{Rr}{R+r} = 0,18 \text{ s}.$$

Předpoklady úlohy jsou tedy splněny.

Dále vychází  $U_C = 0,82 \text{ V}$ ,  $\Delta U = 36 \text{ mV}$ .

**2 body**

### 5.4.5 Elektromagnetické kmitání a vlnění

48.FO62A3-2: Měření rychlosti radarem

[40 %]

Na přímé silnici jede řidič stálou rychlostí  $v$  a za ním jede policejní auto stálou rychlostí  $u$ . Policejní auto je vybaveno radarem, který směrem k autu před ním vysílá elektromagnetické vlny o frekvenci  $f_0$  a současně registruje odražené vlny. Rychlosti obou aut jsou v porovnání s rychlostí  $c$  šíření elektromagnetických vln zanedbatelné.

- a) Určete frekvenci  $f_1$ , s jakou se vlny odrážejí od sledovaného auta, a frekvenci  $f_2$ , s níž jsou tyto vlny registrovány radarem v policejním autě. Ukažte, že relativní změna frekvence  $|f_0 - f_2|/f_0$  radarem vysílaných a přijímaných vln je v přiblížení do prvního řádu veličin  $v/c$  a  $u/c$  přímo úměrná rozdílu rychlostí  $|v - u|$ .
- b) Reálné měření rychlosti vychází z toho, že při skládání dvou vlnění o blízkých frekvencích vznikají rázy, z jejichž periody lze určit relativní rychlost aut  $|v - u|$ . Určete periodu rázů  $T_r$  jako funkci relativní rychlosti vozidel nejprve obecně, poté pro číselné hodnoty  $f_0 = 1,50 \text{ GHz}$  a  $|v - u| = 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

Úlohu řešte bez použití relativistických vztahů. Obdržené výrazy upravte tak, aby s přesností do prvního řádu byly lineární v proměnných  $v/c$  a  $u/c$ . Pro malé veličiny  $x$ ,  $|x| \ll 1$ , platí s přesností do prvního řádu v  $x$  vztah  $(1+x)^s \approx 1+sx$ , kde  $s$  je reálné číslo. Je možné využít vzorec  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$  nebo  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

## Řešení

- a) Výpočet provedeme v soustavě, spojené s policejním autem. Druhý automobil se v této soustavě pohybuje rychlostí  $w = v - u$ . Uvažujme dvě po sobě jdoucí maxima signálu, vyslaná policejním radarem v okamžicích  $t = 0$  a  $t = T_0$ . První maximum dostihne sledované auto v čase  $t_1$ , určenému rovnicí  $ct_1 = d + wt_1$ , kde  $d$  je vzdálenost mezi automobily v okamžiku 0. Druhé maximum dorazí v čase  $t_2$ , splňujícímu rovnici  $c(t_2 - T_0) = d + wt_2$ . Odečtením těchto rovnic dostáváme

$$c(t_2 - t_1) - cT_0 = w(t_2 - t_1).$$

Signál, dopadající na jedoucí auto, má periodu

$$T_1 = t_2 - t_1 = \frac{c}{c - w} T_0$$

a frekvenci

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \left(1 - \frac{w}{c}\right) f_0.$$

**3 body**

Při výpočtu frekvence  $f_2$  lze použít předchozí vztah s tím, že nyní je zdrojem signálu sledovaný automobil a policejní automobil je příjemcem:

$$f_2 = \left(1 - \frac{w}{c}\right) f_1 = \left(1 - \frac{w}{c}\right)^2 f_0 \approx \left(1 - 2\frac{w}{c}\right) f_0.$$

**3 body**

Relativní změna frekvence signálu, přijímaného policejním autem je tak

$$\frac{|f_0 - f_2|}{f_0} = 2 \frac{|v - u|}{c}.$$

**1 bod**

- b) Skládáme dvě kmitání o blízkých frekvencích a obecně různých amplitudách,

$$y_0(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t),$$

$$y_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi).$$

Vyjdeme z názorné představy skládání dvou fázorů  $\mathbf{A}_0$  a  $\mathbf{A}_2$ , rotujících s úhlovými rychlostmi  $\omega_0 = 2\pi f_0$  a  $\omega_2 = 2\pi f_2$ . Jelikož fázor  $\mathbf{A}_2$  rotuje vzhledem k fázoru  $\mathbf{A}_0$  úhlovou rychlostí  $\omega_r = |\omega_2 - \omega_0|$ , mění se výsledná amplituda  $A = |\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2|$  od maximální hodnoty  $A_0 + A_2$  do minimální hodnoty  $|A_0 - A_2|$  s frekvencí  $f_r = |f_0 - f_2|$ . Této frekvenci odpovídá perioda

$$T_r = \frac{1}{f_r} = \frac{c}{2|v - u|} \frac{1}{f_0}.$$

Číselně  $T_r = 3,6 \cdot 10^{-2}$  s.

**3 body**

*Poznámka:* Za předpokladu, že obě vlnění mají stejnou amplitudu  $A_0 = A_2$ , dostaneme ze součtového vzorce pro funkci kosinus výsledný signál ve tvaru

$$y(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) = \\ = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_2}{2}t - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Jde o harmonické kmity o frekvenci  $(\omega_0 + \omega_2)/2$ , modulované pomalu se měnící amplitudou

$$A = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_2}{2}t - \frac{\varphi}{2}\right) \right|,$$

Její perioda  $T_r$ , daná vztahem  $\left|\frac{\omega_0 - \omega_2}{2}\right| T_r = \pi$ , se shoduje s hodnotou, odvozenou z představy rotujících fázorů.

*Poznámky k hodnocení*

- a) Elektromagnetické záření ke svému šíření nepotřebuje žádné prostředí a ve všech soustavách se pohybuje toutéž rychlostí  $c$ . Nicméně při nerelativistickém odvození Dopplerova jevu budou řešitelé pravděpodobně vycházet z představy vlnění, šířícího se v nějakém prostředí. Získané vztahy pak budou záviset na volbě vztažené soustavy, spojené s daným „prostředím“. Avšak všechny takto vypočtené frekvence se musí v prvním řádu veličin  $u/c$  a  $v/c$  shodovat s relativistickým vzorcem pro Dopplerův jev, např.

$$f_1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{w}{c}}{1 + \frac{w}{c}}} f_0, \quad w = \frac{v - u}{1 - \frac{vu}{c^2}}.$$

- b) Opomine-li se při skládání vlnění o stejné amplitudě, že perioda rázů je periodou **absolutní** hodnoty funkce kosinus, vyjde její velikost dvojnásobná (frekvence rázů vyjde poloviční). Vztah pro frekvenci rázů nemusí být odvozován, řešitelé se mohou odvolat na obecně známý vzorec.

## 5.5 Optika

### 5.5.1 Paprsková optika

49.FO58A3-4: Kde byla čočka

[61 %]

V archivu byl nalezen obrázek, na němž byla na optické ose zakreslena poloha zdroje bodového světla A, jeho obrazu A' a jednoho z ohnisek F tenké čočky. Poloha čočky ale na obrázku chybí.

Kde byla umístěna čočka, která na obrázku chybí? Zvažte všechny možnosti. Řešte obecně, pak pro hodnoty:  $\overline{AA'} = l = 8$  cm,  $\overline{AF} = d = 6$  cm.



#### Řešení

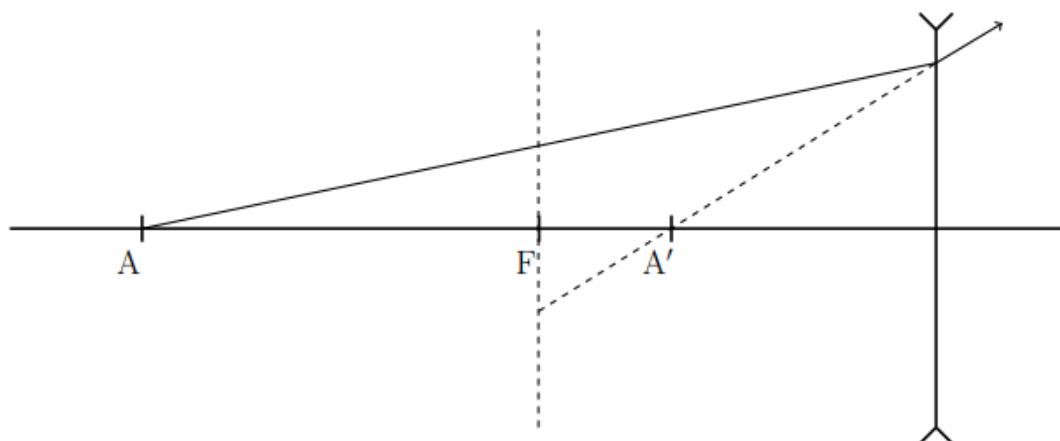
Jsou celkem 4 možnosti:

1. Čočka je rozptylka. V takovém případě leží čočka za bodem A' a dává ne-skutečný obraz.

Vzdálenost zdroje od čočky označme  $x$ . Podle zobrazovací rovnice  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-l} = -\frac{1}{x-d}$ . Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici  $x^2 - 2lx + ld = 0$ . Čočka se nachází ve vzdálenosti  $x = l + \sqrt{l(l-d)} = 12$  cm od zdroje.

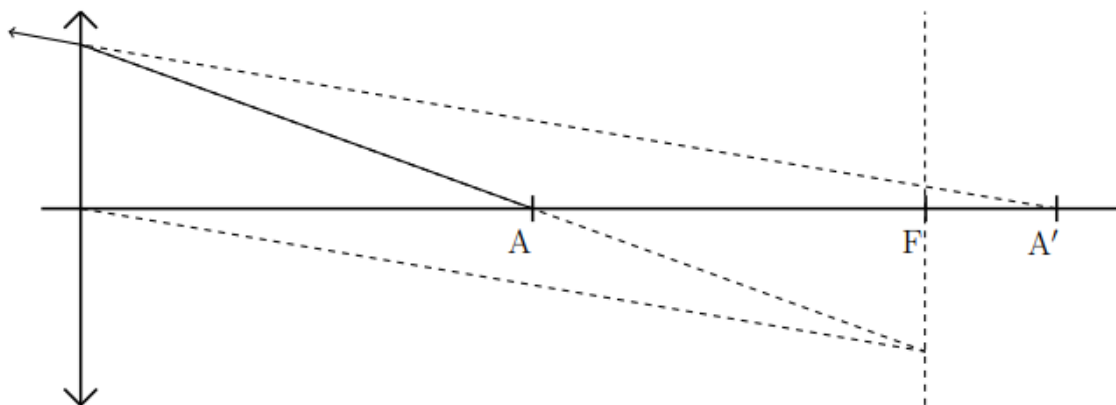
**2,5 bodu**

Úlohu lze řešit rovněž geometrickou konstrukcí:



2. Čočka je spojka, která leží před bodem A. Pak čočka dává neskutečný obraz.

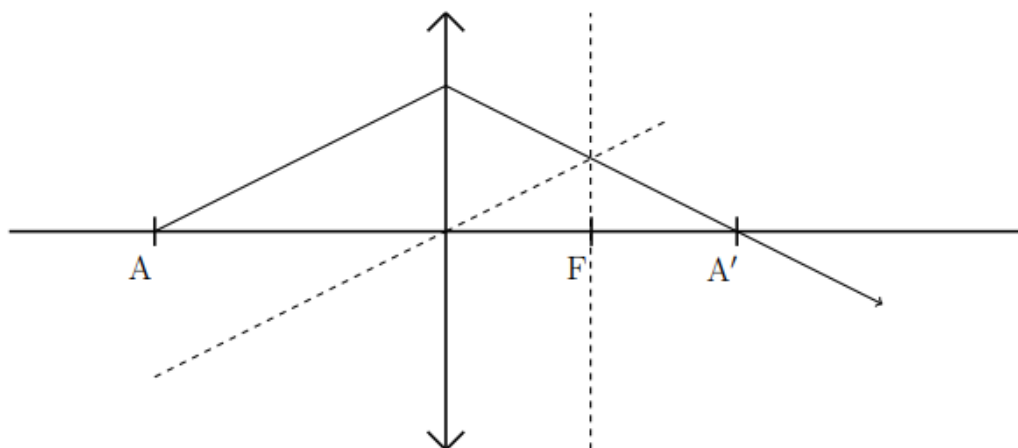
Podle zobrazovací rovnice  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+l} = \frac{1}{x+d}$ . Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici  $x^2 = ld$ . Čočka se nachází ve vzdálenosti  $x = \sqrt{ld} = 6,9$  cm před zdrojem.



2,5 bodu

3. Čočka je spojka, F je obrazové ohnisko. Obraz vytvořený čočkou je skutečný.

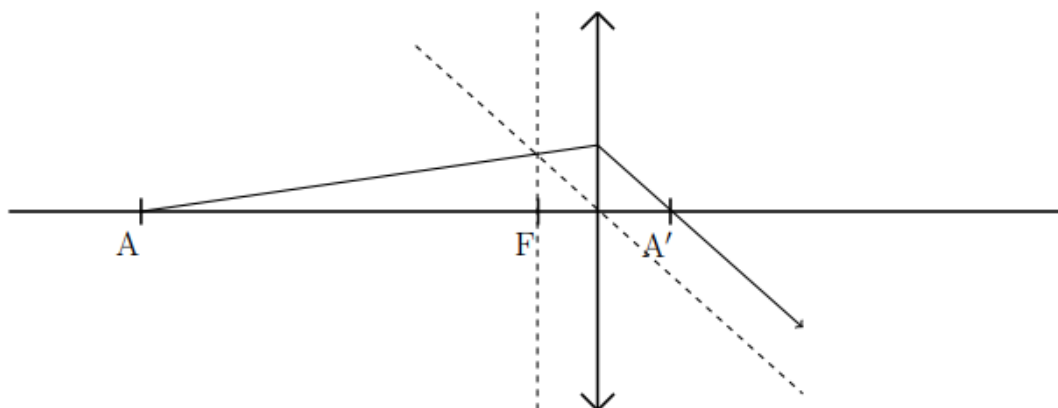
Podle zobrazovací rovnice  $\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{1}{d-x}$ . Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici  $x^2 - 2lx + ld = 0$ . Čočka se nachází ve vzdálenosti  $x = l - \sqrt{l(l-d)} = 4$  cm od zdroje.



2,5 bodu

4. Čočka je spojka, F je předmětové ohnisko. Obraz vytvořený spojkou je skutečný.

Podle zobrazovací rovnice  $\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{1}{x-d}$ . Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici  $x^2 = ld$ . Čočka se nachází ve vzdálenosti  $x = \sqrt{ld} = 6,9$  cm od zdroje.



**2,5 bodu**

50.FO61A3-1: Čočka a stínítko

[56 %]

Bodový zdroj světla se nachází ve vzdálenosti  $L$  od stínítka. Mezi zdroj a stínítko umístíme tenkou spojnou čočku o průměru  $D$ , s ohniskovou vzdáleností  $f$ , kterou můžeme volně posunovat po její ose. Osa je kolmá ke stínítku a na ose leží bodový zdroj světla.

- Jaký musí být vztah mezi ohniskovou vzdáleností  $f$  a vzdáleností  $L$  stínítka od zdroje, má-li na stínítku vzniknout ostrý obraz?
- Nyní posuneme stínítko blíže ke zdroji. V jaké vzdálenosti  $x$  od zdroje musíme při daném  $L$  a  $f$  umístit čočku, aby plocha osvětleného kruhu na stínítku byla minimální, a jaký bude průměr  $d$  tohoto kruhu?
- Jaký bude průměr tohoto kruhu při zadaném  $L$  a  $f$  v případě, že  $x = \frac{f}{2}$ ?

## Řešení

- a) Jednoduchou úvahou zjistíme, že oba kořeny  $a_{1,2}$  jsou v intervalu  $\langle 0, L \rangle$ , tj. čočka se opravdu bude nacházet mezi zdrojem a stínítkem. Je-li vzdálenost mezi zdrojem a obrazem  $L$  a vzdálenost mezi čočkou a zdrojem označíme  $x$ , pak podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{L-x}.$$

Rovnici upravíme na kvadratickou rovnici  $x^2 - xL + fL = 0$  s kořeny

$$x_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}.$$

Aby na stínítku vznikl ostrý obraz zdroje, musí být splněna podmínka

$$L^2 - 4Lf \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f \leq \frac{L}{4}.$$

**3 body**

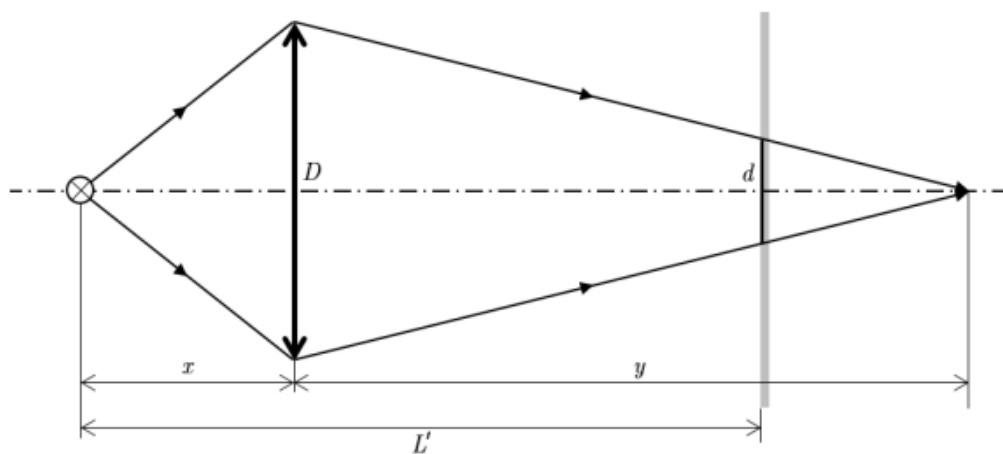
- b) Bude-li splněna podmínka  $L \geq 4f$ , mohou nastat tři případy:

- b1)  $4f \leq L' < \infty$ , pak při daném  $L'$  lze obraz zaostřit a při splnění podmínky

$$x_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}$$

vznikne na stínítku ostrý obraz zdroje ( $d = 0$ ).

- b2)  $f \leq L' < 4f$ . Na stínítku vznikne kruh o průměru  $d$  (obr. R1).



Obr. R1

Z podobnosti trojúhelníků průměr kruhu

$$d = D \frac{x+y-L'}{y} = D \left( \frac{x-L'}{y} + 1 \right). \quad (1)$$

Výraz bude minimální, když bude mít minimum funkce  $z = \frac{x-L'}{y}$ .

Ze zobrazovací rovnice  $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  vyjádříme  $y = \frac{fx}{x-f}$ . Po dosazení dostaneme

$$z = \frac{(x-L')(x-f)}{fx} = \frac{1}{f} \left( x + \frac{L'f}{x} - L' - f \right).$$



Najdeme derivaci této funkce a položíme ji rovnou nule:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{f} \left( 1 - \frac{L'f}{x^2} \right) = 0.$$

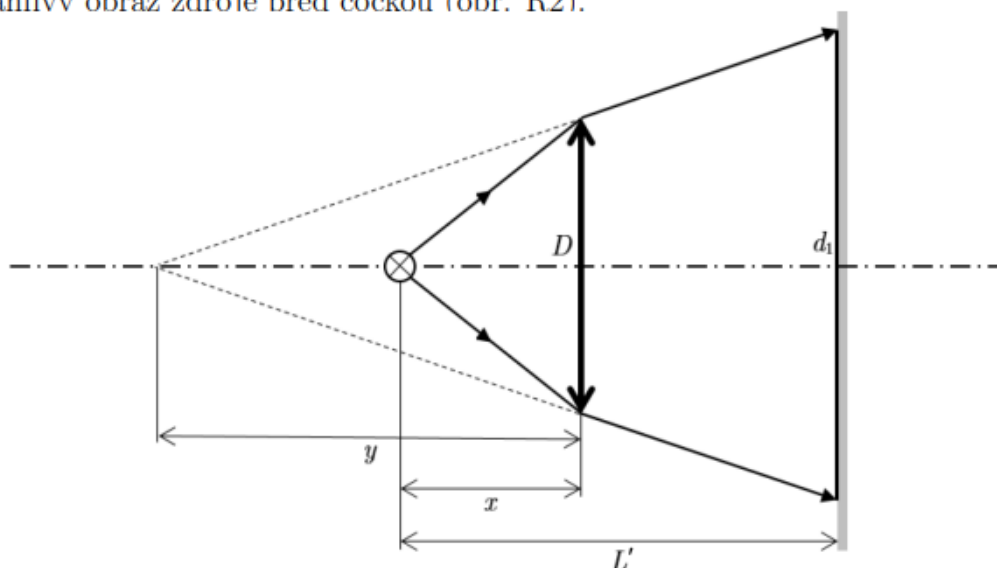
Odtud vidíme, že  $x = \sqrt{L'f}$ . Druhá derivace je zřejmě kladná, proto jde o minimum.

Dosazením do vztahu (1) dostaneme

$$d = D \left( \frac{x - L'}{y} + 1 \right) = D \left[ \frac{1}{f} \left( x + \frac{L'f}{x} - L' - f \right) + 1 \right] = \frac{D}{f} (2\sqrt{L'f} - L').$$

- b3) Pro  $0 < L' < f$  minimum nastane pro  $x = L'$ . Čočka se totiž musí nacházet mezi zdrojem a stínítkem, tj.  $x \in \langle 0, L' \rangle$ , minimum proto nastane na okraji intervalu nikoli v místě nulové derivace (které se nachází mimo interval). Potom  $d = D$ . **4 body**

- c) Pro  $x < f$  bude mít kruh na stínítku průměr  $d_1 > D$ . V tomto případě leží zdánlivý obraz zdroje před čočkou (obr. R2).



Obr. R2

Z podobnosti trojúhelníků

$$d_1 = D \frac{y + L' - x}{y} = D \left( \frac{L' - x}{y} + 1 \right), \quad (2)$$

ze zobrazovací rovnice  $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  vyjádříme

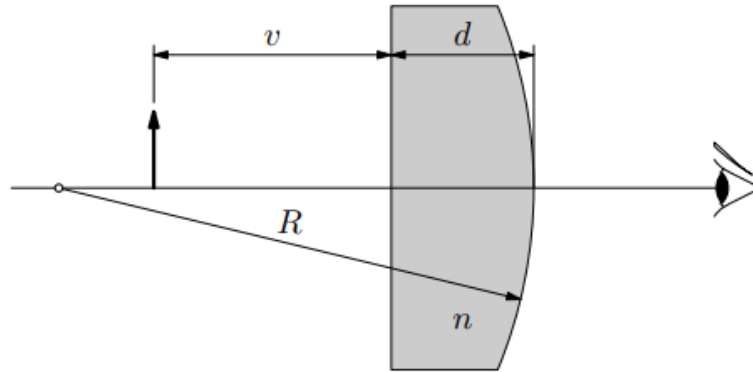
$$y = \frac{fx}{f - x}.$$

Dosazením do vztahu (2)

$$d_1 = D \left( \frac{\frac{L' - x}{fx} + 1}{\frac{f - x}{fx}} \right) = D \left[ \frac{(L' - x)(f - x)}{fx} + 1 \right] = \frac{D}{2} \left( L' + \frac{f}{2} \right).$$

**3 body**

Malý předmět pozorujeme ploškovypuklou lupou o tloušťce  $d = 30$  mm vyrobenou ze skla o indexu lomu  $n = 1,56$ . Poloměr kulového rozhraní lupy je  $R = -100$  mm, předmět je ve vzdálenosti  $v = 50$  mm od rovinného rozhraní lupy (obr. 4). Určete polohu obrazu vytvořeného lupou a jeho příčné zvětšení.



Obr. 4

## Řešení

Řešení postupným zobrazováním na prvním a druhém rozhraní čočky

Použijeme zobrazovací rovnici kulového rozhraní ve tvarech

$$n_1 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right) = n_2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a'} \right), \quad \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1,$$

kde  $f = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$ ,  $f' = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$  jsou ohniskové vzdálenosti,

a vztah pro výpočet příčného zvětšení  $\beta = -\frac{f}{a - f}$ .

1. *Rovinné rozhraní:*  $R \rightarrow \infty$ ,  $n_1 \doteq 1$ ,  $n_2 = n = 1,56$ ,  $a_1 = v$ .

Z toho  $f_1 \rightarrow \infty$ ,  $f'_1 \rightarrow \infty$ .

Použijeme první tvar zobrazovací rovnice. Z něj plyne

$$a'_1 = -\frac{n_2}{n_1} a_1 = -nv = -78 \text{ mm}.$$

Příčné zvětšení obrazu vytvořeného rovinným rozhraním je  $\beta_1 = 1$ .

5 bodů

2. *Kulové rozhraní:*  $R = -100$  mm,  $n_1 = n = 1,56$ ,  $a_2 = -a'_1 + d = 108$  mm,  $n_2 \doteq 1$

Použijeme druhý tvar zobrazovací rovnice.

$$f_2 = \frac{nR}{1-n} = 279 \text{ mm}, \quad f'_2 = \frac{R}{1-n} = 179 \text{ mm},$$

$$a'_2 = \frac{a_2 f'_2}{a_2 - f_2} = -113 \text{ mm}, \quad \beta_2 = -\frac{f_2}{a_2 - f_2} = 1,63.$$

Obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení  $\beta = \beta_1 \beta_2 = 1,63$ .

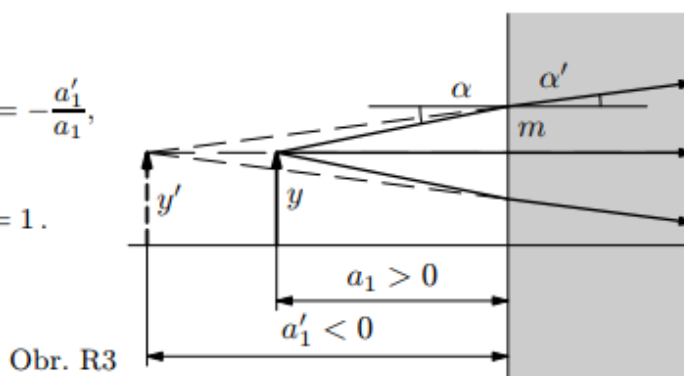
5 bodů

Jiné řešení zobrazení na rovinném rozhraní vychází z obr. R3:

Pro malé úhly platí

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{\frac{m}{a_1}}{\frac{m}{-a_1'}} = -\frac{a_1'}{a_1},$$

$$a_1' = -na_1, \quad \beta_1 = \frac{y'}{y} = 1.$$



Řešení pomocí hlavních rovin a ohniskové vzdálenosti tlusté čočky (obr. R4) – viz studijní text *Zobrazení čočkami*

Parametry čočky:  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 = -100$  mm,  $d = 30$  mm,  $n_1 \doteq 1$  (okolní vzduch),  $n_2 = n = 1,56$  (sklo)

Obecný vztah pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky

$$f = \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)[(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]} = \frac{n R_1 R_2}{(n - 1)[(n - 1)d + n(R_2 - R_1)]}$$

upravíme na tvar  $f = \frac{n R_2}{(n - 1) \left[ (n - 1) \frac{d}{R_1} + n \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right]}$ .

Podobně musíme upravit vztah pro výpočet polohy hlavního bodu  $H$ :

$$a_1(H) = \frac{n_1 R_1 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = \frac{R_1 d}{(n - 1)d + n(R_2 - R_1)} = \frac{d}{(n - 1) \frac{d}{R_1} + n \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right)}.$$

Protože  $R_1 \rightarrow \infty$  dostáváme

$$f = -\frac{R_2}{n - 1} = 179 \text{ mm}, \quad a_1(H) = -\frac{d}{n} = -19,2 \text{ mm},$$

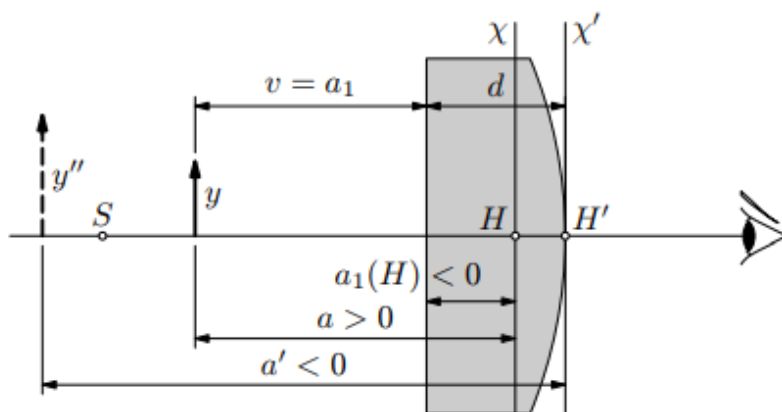
$$a_2'(H') = -\frac{n_1 d R_2}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = 0.$$

**6 bodů**

Pozorovaný předmět má předmětovou vzdálenost  $a = a_1 - a_1(H) = 69,2$  mm.

Obrazová vzdálenost je  $a' = \frac{af}{a - f} = -113$  mm =  $a_2'$ , obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení  $\beta = -\frac{f}{a - f} = 1,63$ .

**4 body**



Obr. R4

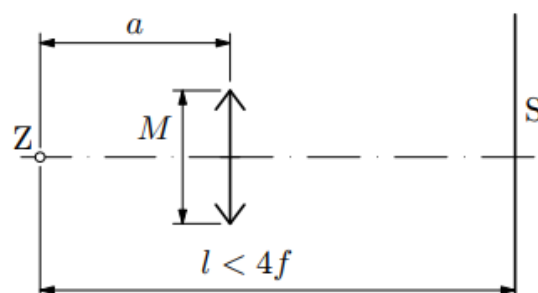
52.FO51A3-3: Skvrna

[54 %]

Bodový zdroj světla  $Z$  se nachází ve vzdálenosti  $l$  od stínítka  $S$ . Mezi zdroj a stínítko umístíme podle obr. 4 tenkou spojkou o ohniskové vzdálenosti  $f > l/4$  a průměru  $M$ .

- Zdůvodněte, proč na stínítku nemůže vzniknout ostrý obraz zdroje.
- Jaká musí být vzdálenost  $a$  čočky od zdroje, aby průměr  $m$  světelné skvrny na stínítku byl co nejmenší? Určete jeho velikost.

Sférickou vadu čočky zanedbáváme.



Obr. 4

Řešení

- Vznikne-li zobrazením reálného předmětu reálný obraz, platí  $a > 0$ ,  $a' > 0$ . Jejich vzdálenost je  $a + a'$ . Ze zobrazovací rovnice tenké spojky plyne

$$a' = \frac{af}{a-f} > 0 \Rightarrow a > f, \quad a + a' = a + \frac{af}{a-f} = \frac{a^2}{a-f}. \quad (1)$$

Minimum tohoto součtu nalezneme užitím první derivace:

$$\frac{d(a+a')}{da} = \frac{2a(a-f) - a^2}{(a-f)^2} = \frac{a(a-2f)}{(a-f)^2} = 0 \quad \text{pro } a = 2f.$$

Minimum tohoto součtu nalezneme užitím první derivace:

$$\frac{d(a + a')}{da} = \frac{2a(a - f) - a^2}{(a - f)^2} = \frac{a(a - 2f)}{(a - f)^2} = 0 \quad \text{pro } a = 2f.$$

Pro  $a > 2f$  je derivace kladná, pro  $a < 2f$  je záporná. Jedná se tedy o minimum. Minimální vzdálenost reálného obrazu od reálného předmětu je tedy

$$(a + a')_{\min} = \frac{4f^2}{2f - f} = 4f > l.$$

Bodový reálný obraz zdroje tedy vznikne vždy až za stínítkem a na stínítku při každé poloze čočky vznikne světelná skvrna.

**4 body**

- b) Položíme-li čočku přímo na stínítko, je  $m = M$ . Má-li se po oddálení čočky od stínítka průměr skvrny zmenšit, musí se svazek paprsků za čočkou sbíhat do reálného obrazu  $Z'$  za stínítkem (obr. R2). Ze vztahů (1) a z obrázku plyne

$$l > a > f, \quad \frac{m}{M} = \frac{a' + a - l}{a'} = \frac{\frac{af + (a - l)(a - f)}{a - f}}{\frac{af}{a - f}} = \frac{a^2 - al + lf}{af},$$

$$m = \frac{M}{f} \cdot \frac{a^2 - al + lf}{a}.$$

Minimum opět nalezneme užitím první derivace:

$$\frac{dm}{da} = \frac{M}{f} \cdot \frac{(2a - l)a - a^2 + al - lf}{a^2} = \frac{M}{f} \cdot \frac{a^2 - lf}{a^2} = 0 \quad \text{pro } a = \sqrt{lf}.$$

Pro  $a > \sqrt{lf}$  je derivace kladná, pro  $a < \sqrt{lf}$  je záporná. Jedná se tedy o minimum.

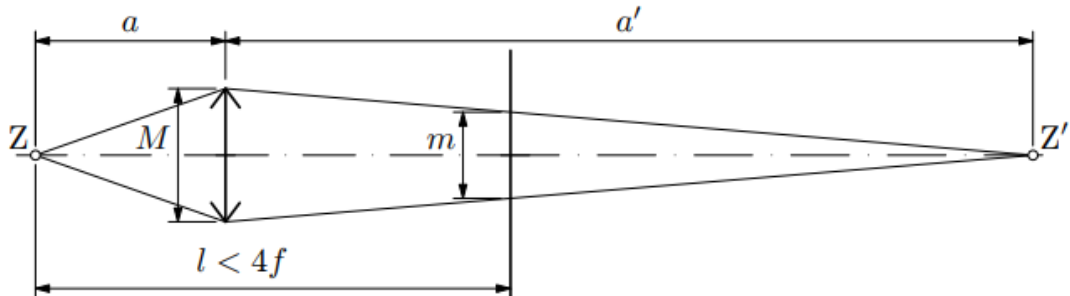
*Poznámka:* Z podmínky  $f > l/4$  plyne  $a > \sqrt{\frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2}$ .

Minimální průměr skvrny za výše uvedeného předpokladu  $l > f$  je

$$m_{\min} = \frac{M}{f} \cdot \frac{lf - l\sqrt{lf} + lf}{\sqrt{lf}} = \frac{M}{f}(2\sqrt{lf} - l).$$

Jestliže  $l \leq f$ , pak po oddálení čočky od stínítka platí  $a < f$ , paprsky se za čočkou rozbíhají a skvrna se zvětšuje. Nejmenší průměr  $m = M$  má, když je čočka položena na stínítku.

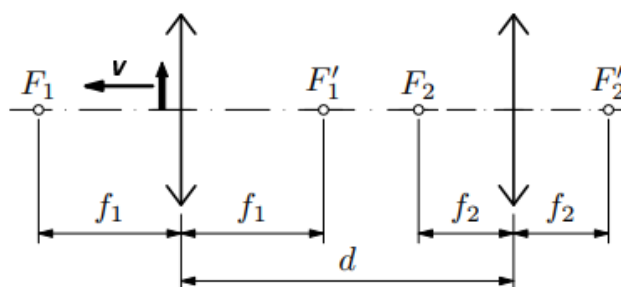
**6 bodů**



Obr. R2

Použijeme centrovanou soustavu dvou tenkých spojek o ohniskových vzdálenostech  $f_1$  a  $f_2$ . Těsně před první spojkou umístíme předmět a začneme jej vzdalovat stálou rychlostí  $\mathbf{v}$  ve směru optické osy (obr. 3).

- Jaká musí být vzdálenost  $d$  středů čoček, aby příčné zvětšení výsledného obrazu bylo stále stejné?
- Určete, jaká je v takovém případě funkční závislost vzdálenosti  $a'_2$  výsledného obrazu od druhé čočky na vzdálenosti  $a_1$  předmětu od první čočky, a sestrojte její graf. Kdy bude výsledný obraz reálný? Určete rychlost  $\mathbf{v}'$  pohybu výsledného obrazu.



Obr. 3

### Řešení

- Obecný případ zobrazení předmětu centrovanou soustavou dvou tenkých spojek znázorňuje obr. R3. Nechť je dána vzdálenost  $a_1$  předmětu od první spojky. Ze zobrazovací rovnice tenké čočky a z obrázku plyne

$$a'_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}, \quad a'_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2}, \quad (1)$$

$$a_2 = d - a'_1 = \frac{da_1 - df_1 - a_1 f_1}{a_1 - f_1}. \quad (2)$$

Příčné zvětšení výsledného obrazu je

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 \cdot Z_2 = \left(-\frac{f_1}{a_1 - f_1}\right) \cdot \left(-\frac{f_2}{a_2 - f_2}\right) = \\ &= \frac{f_1}{a_1 - f_1} \cdot \frac{f_2}{\frac{da_1 - df_1 - a_1 f_1 - f_2 a_1 + f_1 f_2}{a_1 - f_1}} = \frac{f_1 f_2}{a_1(d - f_1 - f_2) - df_1 + f_1 f_2}. \end{aligned}$$

Nemá-li příčné zvětšení výsledného obrazu záviset na vzdálenosti  $a_1$  předmětu od první čočky, nesmí výraz proměnnou  $a_1$  obsahovat, musí platit

$$d = f_1 + f_2,$$

to znamená, že obrazové ohnisko první spojky musí splývat s předmětovým ohniskem druhé spojky. Tuto situaci znázorňuje obr. R4. Příčné zvětšení výsledného obrazu pak je

$$Z = -\frac{f_2}{f_1}.$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít jednoduchou úvahou: Paprsek, který přichází z vrcholu předmětu na první spojku rovnoběžně s optickou osou je společný pro všechny polohy předmětu (body  $A, B, C$ ). Po lomu na první a druhé spojce musí jít opět rovnoběžně s optickou osou, neboť prochází ve všech případech vrcholem obrazu, jehož velikost se podle předpokladu úlohy nemění (body  $A'', B'', C''$ ). Toho lze dosáhnout jedině tak, že ohniska  $F'_1$  a  $F_2$  splynou.

**5 bodů**

b) Jestliže  $d = f_1 + f_2$ , pak ze vztahů (1) a (2) pro polohu výsledného obrazu plyne

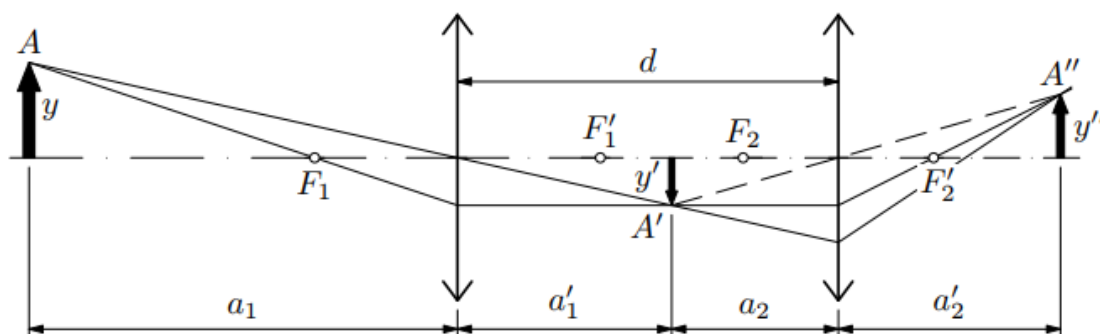
$$\begin{aligned} a'_2 &= \frac{(d - a'_1)f_2}{d - a'_1 - f_2} = \frac{\left(f_1 + f_2 - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right) f_2}{f_1 - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}} = \\ &= \frac{a_1 f_1 f_2 + a_1 f_2^2 - f_1^2 f_2 - f_1 f_2^2 - a_1 f_1 f_2}{-f_1^2} = \frac{(f_1 + f_2)f_2}{f_1} - a_1 \frac{f_2^2}{f_1^2}. \end{aligned}$$

Dostali jsme klesající lineární funkci, jejíž graf je na obr. R5. Výsledný obraz se pohybuje rovnoměrně stejným směrem jako předmět. Z počáteční polohy ve vzdálenosti  $\frac{(f_1 + f_2)f_2}{f_1}$  od druhé spojky se přibližuje k čočce rychlostí o velikosti

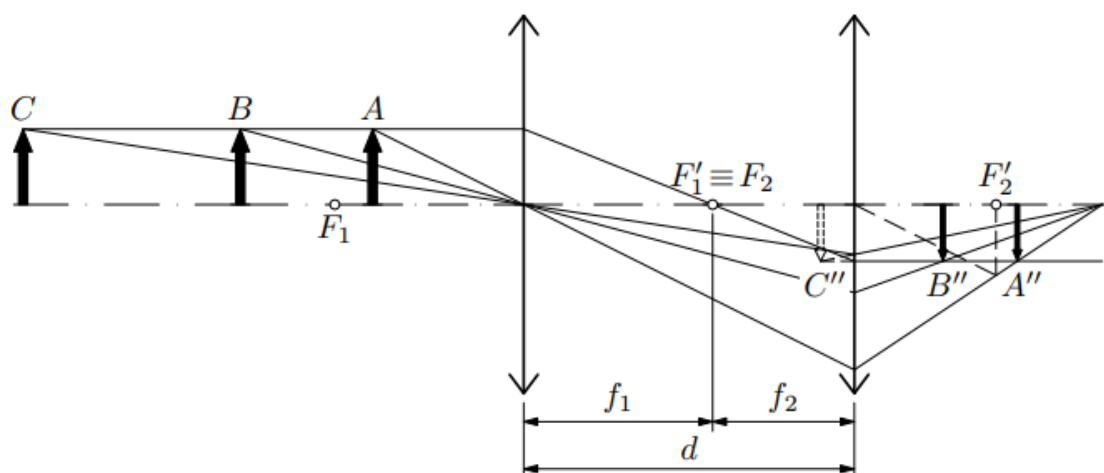
$$v' = \left| \frac{da'_2}{dt} \right| = \left| -\frac{da_1}{dt} \cdot \frac{f_2^2}{f_1^2} \right| = v \frac{f_2^2}{f_1^2}.$$

V okamžiku, kdy předmět dosáhne vzdálenosti  $\frac{(f_1 + f_2)f_1}{f_2}$  od první spojky, se reálný obraz změní na zdánlivý.

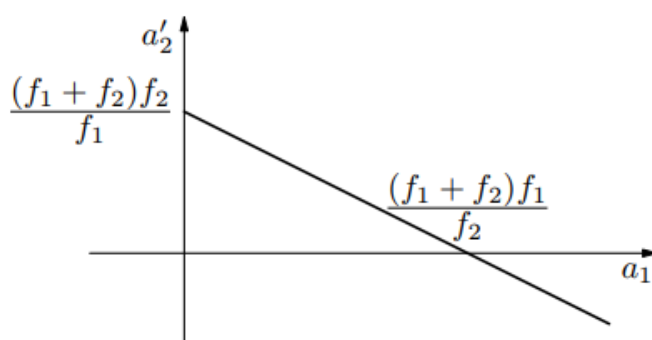
**5 bodů**



Obr. R3



Obr. R4



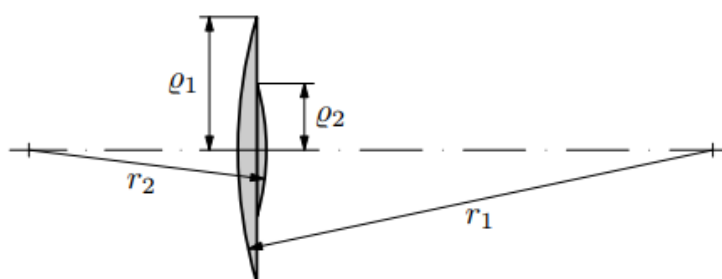
Obr. R5

54.FO49A3-2: Dvojčočka

[49 %]

Dvě ploskovypuklé čočky položené rovnými plochami na sebe tvoří centrovanou optickou soustavu (obr. 2). Kulové plochy čoček mají poloměry  $r_1 = 50$  mm a  $r_2 = 25$  mm, obvodové kružnice mají poloměry  $\varrho_1 = 14$  mm a  $\varrho_2 = 7$  mm. Index lomu skla je  $n = 1,55$ . Na optickou osu soustavy umístíme do vzdálenosti  $a = 200$  mm před první čočkou bodový zdroj světla a za druhou čočku umístíme stínítko kolmé k optické ose. Jaká musí být vzdálenost  $x$  stínítka od rovinných ploch obou čoček, aby poloměr  $\varrho$  osvětlené plochy stínítka byl co nejmenší? Určete tento nejmenší poloměr.

Řešte jako úlohu o tenkých čočkách.



Obr. 2



## Řešení

Jednotlivé čočky mají optické mohutnosti

$$\varphi_1 = (n - 1) \frac{1}{r_1} = 11 \text{ D}, \quad \varphi_2 = (n - 1) \frac{1}{r_2} = 22 \text{ D}$$

a ohniskové vzdálenosti  $f_1 = \frac{r_1}{n - 1} = \frac{1}{11} \text{ m}$ ,  $f_2 = \frac{r_2}{n - 1} = \frac{1}{22} \text{ m}$ .

Výsledná optická mohutnost a ohnisková vzdálenost spojených čoček je

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 33 \text{ D}, \quad f = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{33} \text{ m}.$$

Paprsky, které procházejí ve větší vzdálenosti od optické osy (okrajem optické soustavy), se budou lámat pouze na větší ploskovypuklé čočce a vytvoří obraz ve vzdálenosti

$$a'_1 = \frac{af_1}{a - f_1} = \frac{1}{6} \text{ m}.$$

Střední část optické soustavy vytvoří obraz ve vzdálenosti

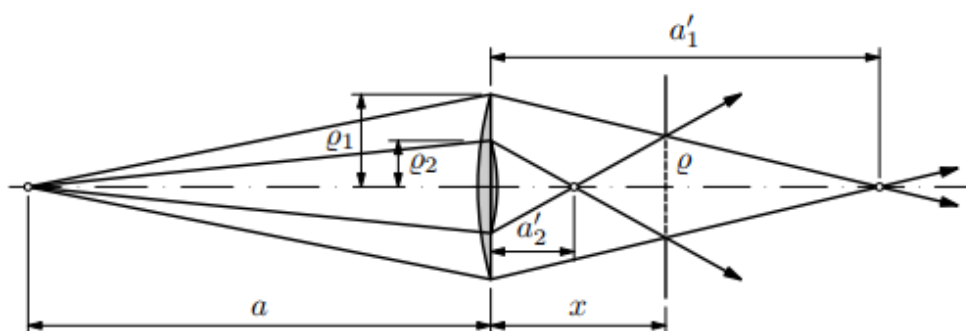
$$a'_2 = \frac{af}{a - f} = \frac{1}{28} \text{ m}.$$

**3 body**

Z obrázku R2 (ve kterém nejsou dodrženy proporce) je zřejmé, že krajní paprsky, které se lámou jen na větší čočce a krajní paprsky, které se lámou na obou čočkách vytvoří rotační kuželové plochy. Nejmenší osvětlená plocha je ohraničena kružnicí, která je průnikem těchto kuželových ploch. Její vzdálenost  $x$  od spojených čoček a poloměr  $\varrho$  určíme z podobnosti trojúhelníků. Platí

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{a'_1 - x}{a'_1}, \quad \frac{\varrho}{\varrho_2} = \frac{x - a'_2}{a'_2}.$$

**4 body**



Obr. R2

Z toho

$$\varrho = \frac{(a'_1 - x)\varrho_1}{a'_1} = \frac{(x - a'_2)\varrho_2}{a'_2} \Rightarrow (a'_1 - x)\varrho_1 a'_2 = (x - a'_2)\varrho_2 a'_1,$$

$$x = \frac{a'_1 a'_2 (\varrho_1 + \varrho_2)}{\varrho_1 a'_2 + \varrho_2 a'_1} = 0,075 \text{ m},$$

$$x = a'_1 - \frac{\varrho a'_1}{\varrho_1} = \frac{\varrho a'_2}{\varrho_2} + a'_2 \Rightarrow \varrho = \frac{a'_1 - a'_2}{\frac{a'_1}{\varrho_1} + \frac{a'_2}{\varrho_2}} = 0,0077 \text{ m}.$$

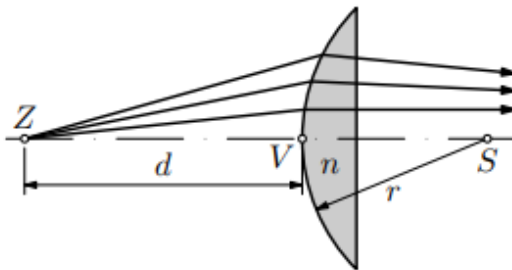
3 body

55.FO46A3-4: Kondenzátor

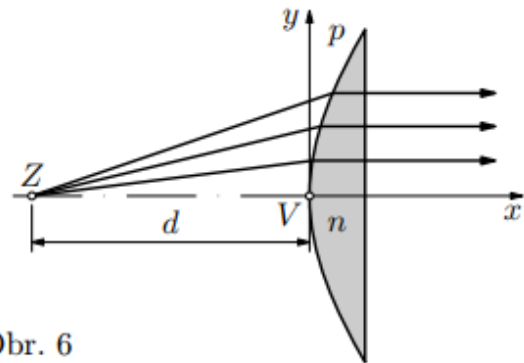
[48 %]

Ploskovypuklá čočka vyrobená ze skla o indexu lomu  $n$  je ohraničena rovinou a kulovou plochou. Bodový zdroj světla  $Z$  umístíme na její optickou osu do vzdálenosti  $d$  od jejího vrcholu (obr. 5).

- a) Jaký poloměr musí mít kulová plocha čočky, aby paprsky vycházející ze zdroje a dopadající na čočku v blízkosti optické osy se lámaly rovnoběžně s optickou osou?



Obr. 5

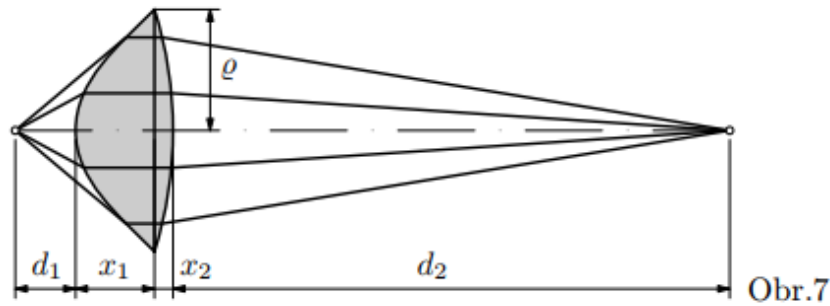


Obr. 6

- b) V důsledku kulové vady se nebudou paprsky dopadající na čočku ve větší vzdálenosti od optické osy lámat rovnoběžně s optickou osou, ale o něco více. Abychom tuto závadu odstranili, musíme kulovou plochu čočky nahradit rotační plochou, kterou vytvoříme rotací křivky  $p$  (meridiánu plochy) okolo optické osy (obr. 6). Nalezněte rovnici křivky  $p$  a vyšetřete její geometrické vlastnosti. Souřadnicovou soustavu volte podle obr. 6.

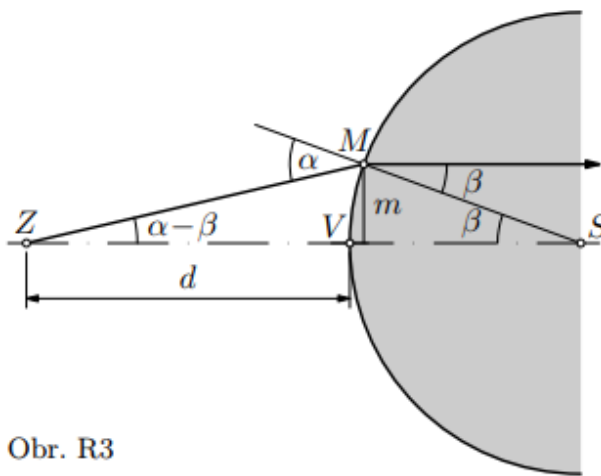
*Návod:* Uvědomte si, že působením čočky se původně kulová vlnoplocha světla změnila na rovinnou vlnoplochu kolmou k optické ose a mezi jednotlivými rovnoběžnými paprsky není dráhový rozdíl.

- c) Jednočočkový kondenzor pro promítací přístroj podle obr. 7 je vyroben ze skla o indexu lomu  $n = 1,52$ . Vlákno žárovky je ve vzdálenosti  $d_1 = 12 \text{ mm}$  od kondenzoru, paprsky vystupující z kondenzoru se sbíhají ve vzdálenosti  $d_2 = 120 \text{ mm}$ , kde se nachází střed objektivu. Uvnitř kondenzoru jdou paprsky světla rovnoběžně s optickou osou. Objímka kondenzoru má poloměr  $\varrho = 25 \text{ mm}$ . Určete rozměry  $x_1$  a  $x_2$ .



### Řešení

- a) Vydeme ze zákona lomu a z obr. R3. Pro paprsek, který se láme v malé vzdálenosti  $m \ll r$  od optické osy můžeme psát



$$\alpha - \beta \approx \frac{m}{d}, \quad \beta \approx \frac{m}{r},$$

$$\alpha = \frac{m}{d} + \frac{m}{r} \approx n\beta = n\frac{m}{r},$$

Z toho

$$\frac{1}{d} = (n-1)\frac{1}{r}, \quad r = (n-1)d.$$

**3 body**

Obr. R3

- b) Vydeme z obr. R4. Světlo, které se láme v bodě  $M = [x, y]$  má v tomto místě stejnou fázi jako světlo, které současně dorazilo do bodu  $M_1 = [x, 0]$  na optické ose. Z rovnosti optických drah  $ZM$  a  $ZVM_1$  plyne

$$\sqrt{(x+d)^2 + y^2} = d + nx.$$

Úpravami dostaneme

$$(n^2 - 1)x^2 + 2d(n-1)x - y^2 = 0, \quad (1)$$

$$x^2 + \frac{2d}{n+1}x + \frac{d^2}{(n+1)^2} - \frac{y^2}{n^2-1} = \frac{d^2}{(n+1)^2},$$

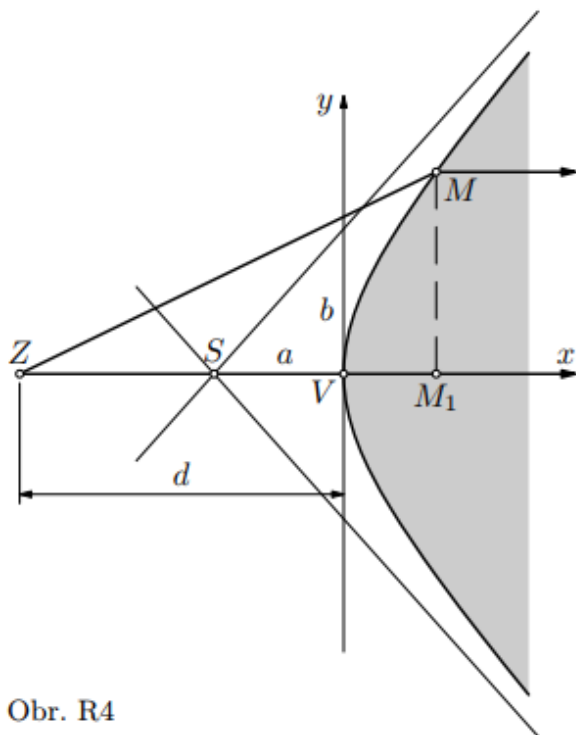
$$\frac{\left(x + \frac{d}{n+1}\right)^2}{\left(\frac{d}{n+1}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{d^2(n-1)}{n+1}} = 1. \quad (2)$$

Jedná se o rovnici hyperboly se středem  $S = \left[-\frac{d}{n+1}, 0\right]$ , délkou hlavní poloosy

$a = \frac{d}{n+1}$  a délkou vedlejší poloosy  $b = d\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ . Poloměr křivosti v hlavním

vrcholu  $r = \frac{b^2}{a} = d(n-1)$  je stejný jako poloměr kulové plochy v úloze a).

**4 body**



Obr. R4

- c) Dosazením  $y = \varrho$  do (1) dostaneme kvadratickou rovnici

$$(n^2 - 1)x^2 + 2d(n - 1)x - \varrho^2 = 0,$$

ze které můžeme vypočítat výšky vrchlíků ohraničujících kondenzor. Vyhovuje kořen

$$x = \frac{-d(n - 1) + \sqrt{d^2(n - 1)^2 + (n^2 - 1)\varrho^2}}{n^2 - 1}.$$

Pro  $d_1 = 12$  mm vychází  $x_1 = 17,6$  mm,  
pro  $d_2 = 120$  mm vychází  $x_2 = 4,8$  mm.

**3 body**

## 5.5.2 Vlnová optika

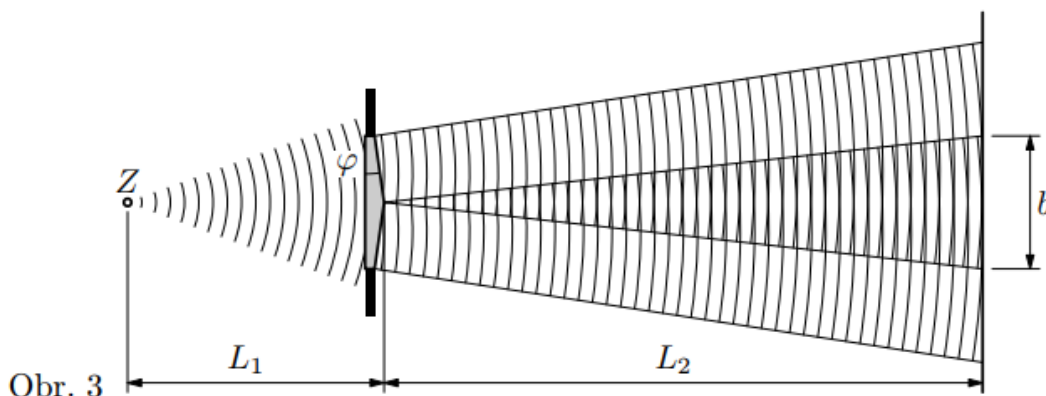
56.FO54A3-3: Fresnelův dvojhranol

[31 %]

Štěrbinový zdroj monochromatického světla o vlnové délce  $\lambda$  osvětluje ze vzdálenosti  $L_1$  souměrný tenký skleněný dvojhranol vyrobený ze skla o indexu lomu  $n$  (obr. 3). Obě poloviny dvojhranolu mají stejný lámavý úhel  $\varphi$ . Lomem světla v hranolu vznikají dvě koherentní světelná vlnění, která spolu interferují na stínítku ve vzdálenosti  $L_2$  od hranolu v pruhu vymezeném paprsky procházejícími středem hranolu.

- Určete šířku  $b$  pruhu, kde dochází k interferenci.
- Určete šířku interferenčních proužků, které vzniknou na stínítku.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $\lambda = 546 \text{ nm}$ ,  $n = 1,57$ ,  $\varphi = 1,0^\circ$ ,  $L_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $L_2 = 3,0 \text{ m}$ . Návod: Pro malé úhly můžete využít aproximaci  $\sin x \approx \text{tg } x \approx x$ .



Obr. 3

Řešení

- Průchod paprsku hranolem s lámavým úhlem  $\varphi$  je znázorněn na obr. R3. Procházející paprsek se odchýlí od původního směru o úhel

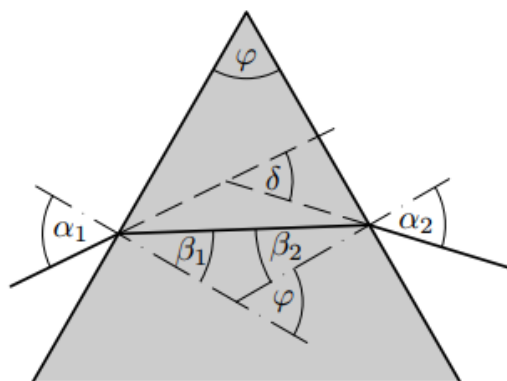
$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi,$$

přičemž

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = n.$$

Je-li lámavý úhel  $\varphi$  malý a paprsek prochází hranolem přibližně kolmo, můžeme psát

$$\alpha_1 \approx n\beta_1, \quad \alpha_2 \approx n\beta_2, \quad \delta \approx (n - 1)\varphi.$$

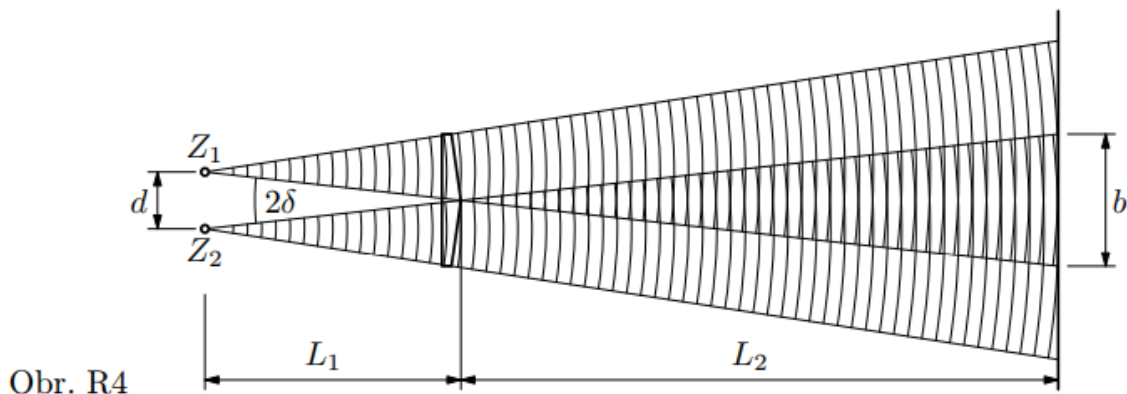


Obr. R3

Paprsky procházející těsně nad středem hranolu se odchýlí o úhel  $\delta$  dolů a paprsky procházející těsně pod středem se odchýlí o stejný úhel nahoru (obr. R4). Na stínítku obě světelná vlnění interferují v pruhu šířky

$$b = 2L_2 \operatorname{tg} \delta \approx 2L_2 \delta \approx 2L_2 \operatorname{tg}[(n-1)\varphi] = 6,0 \text{ cm.}$$

**5 bodů**



- b) Světelná vlnění vycházející z dvojhnanolu se chovají, jako by vycházela ze dvou samostatných štěrbinových zdrojů  $Z_1, Z_2$  nacházejících se ve vzdálenosti  $l = L_1 + L_2$  od stínítka a ve vzájemné vzdálenosti

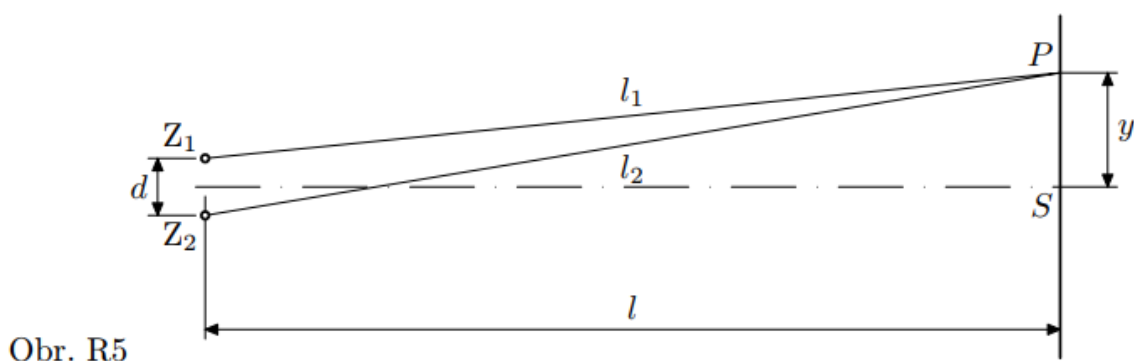
$$d = 2L_1 \operatorname{tg} \delta \approx 2L_1 \operatorname{tg}[(n-1)\varphi].$$

Ve středu  $S$  stínítka se setkávají s nulovým dráhovým rozdílem (obr. R5). V bodě  $P$  ve vzdálenosti  $y$  od středu stínítka je dráhový rozdíl  $\Delta l = l_2 - l_1$ . Platí

$$l_2^2 - l_1^2 = l^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 - \left[l^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2\right] = 2yd.$$

Protože  $y \ll l$ , můžeme psát

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) \approx \Delta l \cdot 2l, \quad \Delta l \approx \frac{yd}{l}.$$



Interferenční maxima vzniknou v bodech stínítka, kde

$$\Delta l = \frac{dy}{l} = k\lambda \quad \Rightarrow \quad y = k \frac{\lambda l}{d}.$$

Šířka interferenčních proužků je rovna vzdálenosti sousedních maxim, tedy

$$\frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(L_1 + L_2)}{2L_1 \operatorname{tg}[(n-1)\varphi]} = 0,44 \text{ mm}.$$

**5 bodů**

## 5.6 Speciální teorie relativity

57.FO48A3-1: Potenciál

[57 %]

Dva hmotné body nacházející se ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti  $r$  nesou záporné elektrické náboje  $Q$  a  $nQ$ , kde  $n > 1$ .

- Určete na úsečce spojující oba hmotné body místo maximálního elektrického potenciálu a jeho hodnotu.
- Do uvedeného místa umístíme elektron a nepatrně jej vychýlíme mimo spojnicí obou hmotných bodů. Určete limitní velikost rychlosti elektronu ve velmi velké vzdálenosti. Řešení proveďte klasicky i relativisticky.

Úlohy řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $Q = -1,00 \mu\text{C}$ ,  $n = 5$ ,  $r = 0,200 \text{ m}$ . Klidová hmotnost elektronu  $m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , elementární náboj  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , rychlost světla ve vakuu  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $k = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{m}^2$ .

Řešení

- Zvolme souřadnicovou osu  $x$  procházející oběma hmotnými body a s počátkem v bodě s nábojem  $Q$ . Pak elektrický potenciál na spojnicí obou nábojů v bodě o souřadnici  $x$  je

$$\varphi = k \frac{Q}{x} + k \frac{nQ}{r-x}. \quad (1)$$

Hledáme maximum této funkce splňující podmínku  $0 < x < r$ . Provedeme derivaci podle  $x$ :

$$\frac{d\varphi}{dx} = kQ \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{n}{(r-x)^2} \right).$$

Z podmínky nulové hodnoty derivace plyne  $x_1 = \frac{r}{\sqrt{n+1}}$ .

(Nulová hodnota derivace je ekvivalentní podmínce nulové intenzity elektrického pole, kterou je možné při řešení použít jako podmínku výchozí místo derivování potenciálu, známe-li vztah  $E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$ ).

Dosazením  $x = x_1$  do rovnice (1) dostaneme  $\varphi_{\max} = \frac{kQ}{r}(1 + \sqrt{n})^2$ .

(Že se jedná o maximum, je zřejmé z toho, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi = \lim_{x \rightarrow r} \varphi = -\infty$ .)

Číselně vychází  $x_1 = 0,309r = 0,0618 \text{ m}$ ,  $\varphi_{\max} = -471 \text{ kV}$ .

**4 body**



- b) Ze zákona zachování energie plyne pro limitní kinetickou energii urychleného elektronu  $E_k = -e\varphi_{\max}$ . Klasicky platí  $\frac{1}{2}m_0v^2 = e \cdot \frac{k|Q|}{r}(1 + \sqrt{n})^2$ ,

$$v = \sqrt{2}(1 + \sqrt{n})\sqrt{\frac{e}{m_0}}\sqrt{\frac{k|Q|}{r}} = (1 + \sqrt{n})\sqrt{\frac{2ke|Q|}{m_0r}}.$$

Podle teorie relativity je splněna rovnice

$$m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = e \cdot \frac{k|Q|}{r}(1 + \sqrt{n})^2.$$

Z rovnice plyne 
$$v = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{\left(m_0c^2 + e \cdot \frac{k|Q|}{r}(1 + \sqrt{n})^2\right)^2}}.$$

Číselně vychází podle klasické fyziky  $v = 4,07 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , podle teorie relativity  $v = 0,854c = 2,56 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Skutečnosti pro dané číselné hodnoty odpovídá pouze relativistický výsledek.

**6 bodů**

## 5.7 Kvantová fyzika

### 58.FO56A3-2: Kvantový plyn

[77 %]

V souborech mnoha částic lze kvantové jevy očekávat tehdy, jestliže je de Broglieova vlnová délka  $\lambda$  srovnatelná nebo větší než střední vzdálenost  $d$  mezi částicemi, neboť tehdy se začnou výrazně projevovat vlnové vlastnosti částic.

- Určete de Broglieovu vlnovou délku  $\lambda$  pro elektronový plyn ve vzorku kovu, tj. pro soubor volných částic (každá hmotnosti  $m_0$  a se třemi stupni volnosti) nacházející se ve stavu termodynamické rovnováhy při teplotě  $T$  a splňující Maxwellovo rozdělení rychlostí jako běžný plyn.  
Vyčíslete pro pokojovou teplotu  $T = 293 \text{ K}$ .
- Je-li v objemu  $V$  uzavřeno  $N$  částic, určete jejich střední vzdálenost  $d$ . Vyčíslete pro elektronový plyn.
- Podmínku  $\lambda \geq d$  lze zapsat ve tvaru  $T \leq T_Q$ , kde  $T_Q$  je mezní teplota, kdy jsou kvantové jevy podstatné. Určete pro elektronový plyn tuto teplotu.
- Posuďte, zda lze za běžných teplot považovat volné elektrony v kovu za klasický, nekvantový soubor.

Řešte nejprve obecně, poté číselně pro měď. Hustota mědi  $\rho = 8960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , molární hmotnost  $M_m = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , Boltzmannova konstanta  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , Avogadrova konstanta  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , Planckova konstanta  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , hmotnost elektronu  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

Každý atom mědi přispívá do elektronového plynu jedním valenčním elektronem.

#### Řešení

- Střední energie tepelného pohybu částice se třemi stupni volnosti činí  $3 \cdot \frac{1}{2}kT$ , kde  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  termodynamická teplota souboru. Střední kvadratická rychlost částice je tedy rovna  $\sqrt{3kT/m_0}$  a odpovídající hybnost je  $p = \sqrt{3m_0kT}$ .

**2 body**

Pak de Broglieova vlnová délka  $\lambda = h/p$ , tedy

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3m_0kT}}, \quad (1)$$

při pokojové teplotě  $T = 293 \text{ K}$  a pro  $m_0 = m_e$  vychází  $\lambda = 6,3 \text{ nm}$ .

**1 bod**

b) Na jednu částici připadá střední objem  $V/N$ , odkud pro střední vzdálenost vychází

$$d = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}.$$

1 bod

Pro elektronový plyn platí

$$d = \left(\frac{M_m}{\rho N_A}\right)^{1/3} = 0,23 \text{ nm}.$$

2 body

c) Z podmínky  $\lambda \geq d$  vychází užitím (1)

$$T \leq \frac{h^2}{3m_0k} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} = T_Q.$$

1 bod

Po úpravě a s uvážením, že atomy mědi přispívají elektronovému plynu jedním valenčním elektronem, pak dostáváme

$$T_Q = \frac{h^2}{3m_0k} \left(\frac{\rho N_A}{M_m}\right)^{2/3}.$$

Číselně pro  $m_0 = m_e$  vychází teplota degenerace  $T_Q = 2,3 \cdot 10^5 \text{ K}$ .

2 body

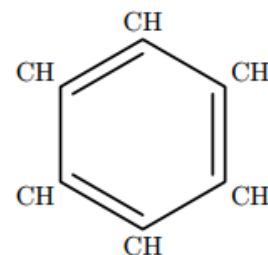
d) Elektronový plyn tedy představuje kvantový soubor, a to v celém teplotním oboru existence jakéhokoli kovu.

1 bod

#### 59.FO54A3-4: Molekula benzenu

[39 %]

Molekula benzenu má tvar šestiúhelníku, jehož vrcholy tvoří atomy uhlíku. Ke každému z nich se váže jeden atom vodíku. Dříve se vědci domnívali, že struktura benzenu odpovídá kruhové molekule s pravidelným střídáním jednoduchých a dvojných vazeb (obr. 4). Dnes víme, že díky dokonalé delokalizaci  $\pi$ -elektronů charakter jednoduchých a dvojných vazeb zaniká a všem šesti  $\pi$ -elektronům dovoluje poměrně volný pohyb v jedno-rozměrném koridoru vymezeném skeletem jednoduchých uhlíkových vazeb. Na tyto  $\pi$ -elektrony lze pak pohlížet jako na volné částice v přibližně kruhové potenciálové jámě délky  $6a$ , kde  $a$  je vzdálenost jader sousedních atomů uhlíku.



Obr. 4

- a) Užitím Bohrovy kvantové podmínky pro kruhový pohyb elektronu určete možné hodnoty  $E_n$  energie  $\pi$ -elektronu v molekule benzenu.
- b)  $\pi$ -elektrony obsadí jednotlivé energetické hladiny podle Pauliho principu a podle principu minima energie. Určete energii nejvyšší obsazené hladiny (HOMO), energii nejnižší neobsazené hladiny (LUMO) a energii  $E_{\min}$  základního, tj. nevzbuzeného stavu soustavy  $\pi$ -elektronů. Vyčíslete v elektronvoltech.
- c) Předpovězte vlnovou délku  $\lambda$  světla, jež bude molekulou benzenu intenzívně pohlcováno. Usuďte zhruba, jakou barvu náš jednoduchý FEMO model pro benzen předpovídá.

Řešte obecně, pak pro hodnoty: střední délka vazby C=C je  $a = 139$  pm,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s,  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>,  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg,  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C. Vzájemnou interakci mezi  $\pi$ -elektrony zanedbejte.

### Řešení

- a) Označíme-li  $r$  poloměr kruhové jámy, pak z Bohrovy podmínky

$$r \cdot p_n = \frac{nh}{2\pi}$$

vyjde

$$p_n = \frac{nh}{2\pi r} = \frac{nh}{6a} \quad \text{odkud} \quad E_n = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{72m_e a^2} \cdot n^2.$$

Číselně  $E_n = n^2 \cdot 3,46 \cdot 10^{-19}$  J =  $n^2 \cdot 2,16$  eV.

**3 body**

- b) Dle principu minima energie obsadí  $\pi$ -elektrony nejnižší hladiny, přičemž dle Pauliho principu budou na každé hladině dva  $\pi$ -elektrony. Pak

$$E(\text{HOMO}) = E_3 = \frac{h^2}{8m_e a^2} = 19,5 \text{ eV}, \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$E(\text{LUMO}) = E_4 = \frac{2h^2}{9m_e a^2} = 34,6 \text{ eV}, \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$E_{\min} = 2(E_1 + E_2 + E_3) = \frac{7h^2}{18m_e a^2} = 60,6 \text{ eV}, \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Energetickému rozdílu  $E_4 - E_3$  odpovídá záření o vlnové délce

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_4 - E_3},$$

což po úpravě dá

$$\lambda = \frac{72m_e c a^2}{7h}.$$

Číselně:  $\lambda = 82$  nm. Model tedy předpokládá, že viditelné světlo nepostačuje k excitaci  $\pi$ -elektronů, neboť její molekuly absorbují teprve světlo z ultrafialové oblasti. Benzen by tedy měl být bezbarvý.

**3 body**

*Poznámka:* Odhad v modelu FEMO je správný jen kvalitativně. Ve skutečnosti najdeme v absorpčním spektru benzenu maximum již okolo 250 nm.

## 5.8 Jaderná fyzika

### 5.8.1 Radioaktivita

#### 60.FO61A3-2: Supertěžká voda

[89 %]

V tepelně izolované nádobě se pod lehkým, volně pohyblivým, pístem při atmosférickém tlaku  $p = 10^5$  Pa nachází  $m = 11,0$  g supertěžké vody  $T_2O$  v kapalném stavu o teplotě  $t_1 = 0$  °C. Molární hmotnost těžké vody je  $M_m = 22 \cdot 10^{-3}$  kg  $\cdot$  mol $^{-1}$ . Jádra tritia ( $T$ ,  $A_r = 3$ ) jsou radioaktivní. Při rozpadu jednoho molu jader tritia se uvolní energie  $E = 1,79$  GJ. Poločas přeměny tritia je 12,32 let. Při výpočtech předpokládejte, že se každou sekundu rozpadne  $N_1 = 1,07 \cdot 10^{15}$  jeho jader. Předpokládejte, že se 95 % uvolněné energie využije k zahřátí supertěžké vody.

Molární tepelná kapacita supertěžké vody  $C = 75,6$  J  $\cdot$  mol $^{-1}$   $\cdot$  K $^{-1}$ , molární tepelná kapacita její páry za stálého tlaku je  $C_p = 33,2$  J  $\cdot$  mol $^{-1}$   $\cdot$  K $^{-1}$ , molární skupenské teplo vypařování  $L_{mv} = 40$  kJ  $\cdot$  mol $^{-1}$ , teplota varu je blízká teplotě varu vody  $t_2 = 100$  °C.

- Jakou dobu  $\tau_1$  bude trvat ohřátí vody k bodu varu?
- Jakou dobu  $\tau_2$  od začátku pokusu bude trvat, než se všechna voda vypaří?
- Jaká teplota bude v nádobě za dobu  $\tau_3 = 2,5$  h po začátku pokusu a jaký bude objem páry v nádobě?
- Dokažte, že můžeme předpokládat stálou aktivitu tritia během našeho pokusu.

Avogadrova konstanta  $N_A = 6,0 \cdot 10^{23}$  mol $^{-1}$ , molární plynová konstanta  $R = 8,3$  J  $\cdot$  mol $^{-1}$   $\cdot$  K $^{-1}$ .

#### Řešení

- a) V nádobě je přítomno  $n = \frac{m}{M_m} = 0,5$  molu supertěžké vody; počet jader tritia je  $6,0 \cdot 10^{23}$ .

Při rozpadu jednoho atomu se uvolní energie  $E_1 = \frac{E}{N_A}$ , za 1 sekundu se uvolní energie  $N_1 E_1$ . Označíme-li  $\tau_1$  dobu potřebnou k ohřátí vody na teplotu varu, můžeme napsat

$$\eta N_1 E_1 \tau_1 = \eta N_1 \frac{E}{N_A} \tau_1 = n C \Delta t \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{m C \Delta t N_A}{\eta M_m N_1 E} = 20,8 \text{ min.}$$

**3 body**

- b) Označme potřebnou dobu  $\tau_2$ . Energie dodaná rozpadem tritia se využije na ohřátí vody na bod varu a k jejímu odpaření:

$$\eta N_1 \frac{E}{N_A} \tau_2 = n C \Delta t + n L_{mv} \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{m N_A (C \Delta t + L_{mv})}{\eta M_m N_1 E} = 7\,840 \text{ s} = 131 \text{ min.}$$

**3 body**

- c) Zahřívání páry v uzavřené nádobě bude trvat po dobu  $(\tau_3 - \tau_2)$ , za tu dobu se uvolní energie  $\eta N_1 \frac{E}{N_A} (\tau_3 - \tau_2)$ , která se spotřebuje na její zahřátí při stálém tlaku. Platí

$$\eta N_1 \frac{E}{N_A} (\tau_3 - \tau_2) = n C_p \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\eta M_m N_1 E (\tau_3 - \tau_2)}{m C_p N_A} = 312 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Výsledná teplota vodní páry tedy bude  $T = 585 \text{ K}$ . Objem páry určíme ze stavové rovnice:

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{mRT}{M_m p} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- d) Náš pokus trval po dobu  $\tau_3$ . Počet jader, které se rozpadnou za sekundu, tedy aktivita preparátu, bude po této době

$$A = A_1 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{\tau_3}{T}} = A_1 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{2,5}{12,32 \cdot 365 \cdot 24}} = 0,999 \, 984 A_1.$$

Aktivita preparátu se téměř nezmění. **1 bod**

### 61.FO57A3-4: Pozitronová emisní tomografie (PET)

[71 %]

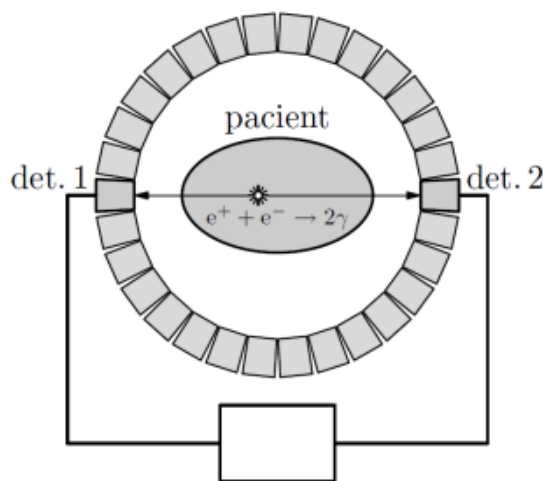
Při této metodě je pacientovi podáno radiofarmakum obsahující nuklid  $^{18}\text{F}$  vázaný na glukózu ve formě 2-deoxy-2-fluoro-D-glukózy (FDG). Radionuklid  $^{18}\text{F}$  má poločas rozpadu  $T = 109,8 \text{ min}$ . Pozitron  $e^+$ , který vzniká při jeho přeměně, se v tkáni pacienta na krátké dráze (několik mm) prakticky zastaví a anihiluje s elektronem  $e^-$ . Obě částice přitom zaniknou a z místa anihilace vylétnou současně a protisměrně dva fotony  $\gamma$ , každý s energií 511 keV. V nejjednodušších přístrojích pro PET jsou fotony zachycovány dvojicí proti sobě umístěných detektorů (obr. 3), které jsou propojeny obvodem, zaznamenávajícím fotony, které dopadly téměř současně. Obvod vyhodnocuje časový rozdíl  $\Delta t$  okamžiků dopadu fotonů a určí polohu místa, kde k anihilaci došlo. Z několika tisíc takových záchytů lze pak pomocí počítače vytvořit tomografický obraz vyšetřovaného.

Nuklid  $^{18}\text{F}$  se připravuje ostřelováním klidných atomů kyslíku  $^{18}\text{O}$  protony urychlenými v cyklotronu na energii 4,00 MeV. V urychlovači je magnetické pole o indukci  $B = 1,0 \text{ T}$ .

- Napište rovnici reakce přípravy nuklidu  $^{18}\text{F}$ , určete energii reakce  $E_{r1}$  v MeV a rozhodněte, zda při uvedené energii protonu může reakce proběhnout.
- Jakou rychlost získají protony v urychlovači a jaký je maximální poloměr jejich trajektorie před opuštěním cyklotronu? Při řešení můžete použít vztahy klasické fyziky.
- Napište rovnici  $\beta^+$  rozpadu nuklidu  $^{18}\text{F}$ , určete energii reakce  $E_{r2}$  v MeV a ověřte, že reakce může samovolně proběhnout.
- Vysvětlete, proč fotony vzniklé anihilací elektronu a pozitronu vyletí navzájem opačným směrem a proč má každý energii 511 keV. Určete vlnovou délku  $\lambda$  těchto fotonů.
- Měřič časového rozdílu mezi signály z detektorů zaznamenal u druhého detektoru časové zpoždění  $\Delta t = 0,70$  ns. Kde se nacházelo místo vzniku fotonů?
- V informacích pro pacienty se uvádí, že radioaktivita do druhého dne zmizí. Na kolik % původní aktivity klesne aktivita preparátu za 24 hodin?

Při řešení využijte některé z klidových hmotností částic a neutrálních atomů:

$m_e = 0,000\,549m_u$ ,  $m_p = 1,007\,276m_u$ ,  $m_n = 1,008\,665m_u$ ,  $m(^1_1\text{H}) = 1,007\,825m_u$ ,  
 $m(^2_1\text{H}) = 2,014\,102m_u$ ,  $m(^{16}_8\text{O}) = 15,994\,915m_u$ ,  $m(^{17}_8\text{O}) = 16,999\,132m_u$ ,  $m(^{18}_8\text{O}) =$   
 $= 17,999\,161m_u$ ,  $m(^{17}_9\text{F}) = 17,002\,095m_u$ ,  $m(^{18}_9\text{F}) = 18,000\,938m_u$ ,  $m(^{19}_9\text{F}) =$   
 $= 18,998\,403m_u$ ,  $m(^{18}_{10}\text{Ne}) = 18,005\,708m_u$ ,  $m(^{19}_{10}\text{Ne}) = 19,001\,880m_u$ ,  $m(^{20}_{10}\text{Ne}_{10}) =$   
 $= 19,992\,440m_u$ ,  $m(^{21}_{10}\text{Ne}) = 20,993\,847m_u$ . Atomová hmotnostní konstanta  $m_u =$   
 $= 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg, rychlost světla ve vakuu  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ , elementární náboj  
 $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C.



Obr. 3 Měřič časového rozdílu



## Řešení

- a) Reakce probíhá podle rovnice  ${}^1_1\text{p} + {}^{18}_8\text{O} \rightarrow {}^{18}_9\text{F} + {}^1_0\text{n}$ .

Energie reakce

$$E_{r1} = [m({}^1_1\text{H}) + m({}^{18}_8\text{O}) - m({}^{18}_9\text{F}) - m_{\text{n}}] c^2 = -3,91 \cdot 10^{-13} \text{ J} = -2,44 \text{ MeV}.$$

Aby reakce proběhla, je tedy třeba energii dodat. Urychlené protony mají energii  $4,00 \text{ MeV} > |E_{r1}|$ ; reakce tedy může proběhnout.

**2 body**

- b) Rychlost protonů  $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_p}} = 2,77 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Na obíhající protony působí magnetická síla, která je silou dostředivou. Platí:

$$\frac{m_p v^2}{r} = Bev, \quad \text{pak} \quad r = \frac{m_p v}{Be} = \frac{\sqrt{2E_k m_p}}{Be} = 0,289 \text{ m}.$$

**2 body**

- c) Reakce probíhá podle rovnice  ${}^{18}_9\text{F} \rightarrow {}^{18}_8\text{O} + e^+ + \nu$ .

Energie reakce (ubude také jeden elektron z atomového obalu):

$$\begin{aligned} E_{r2} &= [m({}^{18}_9\text{F}) - m({}^{18}_8\text{O}) - 2m_e] c^2 = \\ &= [18,000\,938 - 17,999\,161 - 2 \cdot 0,000\,549] \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ J} = \\ &= 1,01 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 0,634 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

$E_{r2} > 0$ , reakce tedy bude probíhat spontánně.

**2 body**

- d) Částice byly před anihilací v klidu, proto podle zákona zachování hybnosti musí být vektorový součet jejich hybností roven nule.

Energie fotonu  $m_e c^2 = 8,20 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 513 \text{ keV}$ , což v rámci chyby způsobené zaokrouhlením odpovídá uvedené informaci. Podle vztahu mezi hmotností a energií platí:

$$m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{m_e c} = 2,42 \text{ pm},$$

jde o foton rentgenového záření.

**2 body**

- e) Za dobu  $\Delta t$  urazí foton vzdálenost  $\Delta x = c\Delta t = 0,21 \text{ m}$ . Místo vzniku fotonů bylo tedy  $10,5 \text{ cm}$  od středu úsečky spojující detektory blíže k detektoru, který zaznamenal signál jako první.

**1 bod**

- f) Podle zákona radioaktivní přeměny  $A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ , odtud

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24 \cdot 60}{109,8}} = 1,13 \cdot 10^{-4} = 0,011 \text{ \%}.$$

Aktivita radionuklidu  ${}^{18}\text{F}$  je po 24 hodinách vůči jeho původní aktivitě skutečně zanedbatelná.

**1 bod**

V uzavřených prostorách domů se ve vzduchu nachází radioaktivní radon a jeho produkty rozpadu.  $^{222}_{86}\text{Rn}$  je součástí uran-radiové rozpadové řady, jejímž prvním členem je  $^{238}_{92}\text{U}$ , a rozpadá se s poločasem rozpadu 3,8 dne na  $^{218}_{84}\text{Po}$ . Jádro zůstává po emisi částice  $\alpha$  v základním stavu.  $^{218}_{84}\text{Po}$  se dále rozpadá s poločasem rozpadu 180 s. Při tomto rozpadu vzniká částice  $\alpha$  s kinetickou energií 6,0 MeV.

- a) Kolik přeměn  $\alpha$  a kolik přeměn  $\beta$  musí nastat, aby vznikl  $^{222}_{86}\text{Rn}$  z  $^{238}_{92}\text{U}$ ? Zapište rovnici rozpadu  $^{222}_{86}\text{Rn}$  a  $^{218}_{84}\text{Po}$ .
- b) Určete v elektronvoltech energii  $E_r$ , která se při rozpadu  $^{222}_{86}\text{Rn}$  uvolní.
- Klidové hmotnosti částic:  $m(^4_2\text{He}) = 4,002\,603m_u$ ,  $m(^{222}_{86}\text{Rn}) = 222,017\,578m_u$ ,  $m(^{218}_{84}\text{Po}) = 218,008\,973m_u$ . Atomová hmotnostní konst.  $m_u = 1,660\,54 \cdot 10^{-27}$  kg.
- c) Určete rychlost  $v_\alpha$  částice  $\alpha$  a rychlost  $v_{\text{Po}}$  jádra polonia po rozpadu jádra  $^{222}_{86}\text{Rn}$  za předpokladu, že jádro radonu je před rozpadem v klidu.
- d) V nevětraném sklepě domu o rozměrech 4,0 m  $\times$  3,0 m  $\times$  2,2 m byla naměřena aktivita radonu 358 Bq v krychlovém metru vzduchu. Kolik atomů radonu se nachází ve sklepním prostoru?

### Řešení

- a) Při  $\alpha$ -rozpadu se nukleonové číslo zmenší o 4, při  $\beta$ -rozpadu se nukleonové číslo nezmění, proto nastaly 4 přeměny alfa. Tím se protonové číslo zmenšilo o osm, tedy úbytek 8 protonů musí být kompenzován dvěma přeměnami beta. Proto platí  $^{238}_{92}\text{U} \xrightarrow{4\alpha + 2\beta} ^{222}_{86}\text{Rn}$ .
- Rovnice rozpadu jsou:  $^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow ^{218}_{84}\text{Po} + ^4_2\text{He}$ ,  $^{218}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{214}_{82}\text{Pb} + ^4_2\text{He}$ . **2 body**
- b)  $E_r = [m(^{222}_{86}\text{Rn}) - m(^{218}_{84}\text{Po}) - m(^4_2\text{He})] c^2 = 8,950\,5 \cdot 10^{-13}$  J = 5,59 MeV. **2 body**
- c) Můžeme předpokládat, že energie reakce je rovna kinetické energii vzniklých částic:

$$E_r = \frac{1}{2}m(^4_2\text{He})v_\alpha^2 + \frac{1}{2}m(^{218}_{84}\text{Po})v_{\text{Po}}^2. \quad (1)$$

Podle zákona zachování hybnosti musí platit

$$m(^4_2\text{He})v_\alpha = m(^{218}_{84}\text{Po})v_{\text{Po}}. \quad (2)$$

Dosazením za  $v_{\text{Po}}$  z rovnice (2) do rovnice (1)

$$E_r = \frac{1}{2}v_\alpha^2 \left\{ m({}^4_2\text{He}) + \frac{[m({}^4_2\text{He})]^2}{m({}^{218}_{84}\text{Po})} \right\} = \frac{1}{2}m({}^4_2\text{He})v_\alpha^2 \left[ 1 + \frac{m({}^4_2\text{He})}{m({}^{218}_{84}\text{Po})} \right] \Rightarrow$$

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_r}{m({}^4_2\text{He}) \left[ 1 + \frac{m({}^4_2\text{He})}{m({}^{218}_{84}\text{Po})} \right]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2E_r m({}^{218}_{84}\text{Po})}{m({}^4_2\text{He}) [m({}^4_2\text{He}) + m({}^{218}_{84}\text{Po})]}} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dosazením do rovnice (2)

$$v_{\text{Po}} = \frac{m({}^4_2\text{He})}{m({}^{218}_{84}\text{Po})} v_\alpha = \frac{m({}^4_2\text{He})}{m({}^{218}_{84}\text{Po})} \sqrt{\frac{2E_r m({}^{218}_{84}\text{Po})}{m({}^4_2\text{He}) [m({}^4_2\text{He}) + m({}^{218}_{84}\text{Po})]}} = 3,0 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**4 body**

- d) V krychlovém metru vzduchu je  $N_1 = \frac{A}{\lambda} = \frac{A \cdot T}{\ln 2}$  atomů radonu, v celém objemu sklepa pak

$$N = \frac{A}{\lambda} \cdot V = \frac{AT}{\ln 2} abc = 4,5 \cdot 10^9 \text{ atomů } {}^{222}_{86}\text{Rn}.$$

**2 body**

### 63.FO59A3-1: Sonda Curiosity

[63 %]

V srpnu 2012 přistála na Marsu sonda se samostatně se pohybujícím vozítkem Curiosity, sloužícím k průzkumu povrchu Marsu. K pohonu vozítka slouží radioizotopový generátor, založený na radioaktivním  $\alpha$ -rozpadu  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ . Teplo uvolněné při rozpadu je pomocí termočlánků s účinností 6,0 % převáděno na elektrickou energii.

- Zapište rovnici  $\alpha$ -rozpadu  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$  a určete teplo  $Q$  uvolněné při jednom rozpadu. Předpokládejme, že se veškerá energie uvolní ve formě tepla.
- Jaká musí být počáteční hmotnost  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ , je-li počáteční tepelný výkon  $P_0$  plánován na 2,00 kW?
- Na kolik % původní aktivity klesla aktivita generátoru za dobu oběhu Marsu kolem Slunce (687 dní)?
- Pro práci vozítka je potřeba elektrický výkon okolo 0,10 kW. Vypočítejte, jak dlouho po přistání bude vozítko ještě moci pracovat.
- Součástí vybavení vozítka jsou i pulzní laser a spektrometr. Laser vysílá impulsy o délce trvání  $\tau = 5,0 \text{ ns}$  o vlnové délce  $\lambda = 1067 \text{ nm}$ . Každý impuls přenáší energii  $E_1 = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ J}$ . V místě dopadu záření se materiál odpaří a jeho složení je zjišťováno spektrometrem. Určete výkon jednoho světelného pulsu a počet fotonů v něm obsažených.

Řešte nejdříve obecně a pak pro zadané číselné hodnoty.

Poločas rozpadu  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$   $T = 87,7 \text{ let}$ , klidové hmotnosti částic jsou:  $m({}^{238}_{94}\text{Pu}) = 238,049\,553 \text{ } m_u$ ,  $m({}^4_2\text{He}) = 4,002\,602 \text{ } m_u$ ,  $m({}^{234}_{92}\text{U}) = 234,040\,952 \text{ } m_u$ ; atomová hmotnostní konstanta  $m_u = 1,660\,54 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

## Řešení

- a) Rovnice rozpadu je  ${}^{238}_{94}\text{Pu} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^{234}_{92}\text{U}$ ;

$$Q = E_r = [m({}^{238}_{94}\text{Pu}) - m({}^4_2\text{He}) - m({}^{234}_{92}\text{U})] c^2 = 9,17 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 5,71 \text{ MeV.}$$

**2 body**

- b) K dosažení výkonu  $P_0 = 2,00 \text{ kW}$  musí být počáteční aktivita radioizotopu

$$A_0 = \frac{P_0}{Q}.$$

$$\text{Protože } A_0 = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} \frac{m}{{}^{238}_{94}\text{Pu}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{A_0 T m({}^{238}_{94}\text{Pu})}{\ln 2} = \frac{P_0 T m({}^{238}_{94}\text{Pu})}{Q \ln 2} = 3,46 \text{ kg.}$$

**2 body**

- c) Aktivita vzorku klesne za dobu  $t$  z  $A_0$  na  $A$ . Ze zákona radioaktivní přeměny:

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{687}{87,7 \cdot 365,25}} = 0,985 = 98,5 \text{ \%}.$$

Aktivita vzorku se tedy zmenší jen o 1,5 %.

**2 body**

- d) Počáteční elektrický výkon je  $P_1 = 0,06 P_0 = 120 \text{ W}$  klesne na  $P_2 = 100 \text{ W}$ . Protože aktivita vzorku a získaný výkon jsou veličiny přímo úměrné, můžeme psát

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{87,7}} \Rightarrow t = T \frac{\log \frac{P_2}{P_1}}{\log \frac{1}{2}} = 87,7 \text{ roku} \frac{\log \frac{5}{6}}{\log \frac{1}{2}} = 23 \text{ let.}$$

**2 body**

- e) Výkon jednoho pulzu je

$$P = \frac{E_1}{\tau} = \frac{0,030 \text{ J}}{5,0 \cdot 10^{-9} \text{ s}} = 6,0 \text{ MW.}$$

$$\text{Počet fotonů v jednom pulzu pak je } N = \frac{E_1}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{\lambda E_1}{hc} = 1,6 \cdot 10^{17}.$$

**2 body**

Při produkci jader hassia lze využít svazek jader železa  ${}^{58}_{26}\text{Fe}$  (relativní atomová hmotnost atomů  $A_r = 57,933\,274$ ) a terč z olova  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  ( $A_r = 207,976\,652$ ). Sloučením vznikne jádro hassia  ${}^{266}_{108}\text{Hs}$  ( $A_r = 266,130\,045$ ). Optimální kinetická energie svazku s největším účinným průřezem okolo 60 pb je pro energii jader železa 280,0 MeV.

- Vypočtěte na čtyři platné číslice relativní rychlost (vzhledem k  $c$ ) dopadajícího jádra železa (nerelativisticky i relativisticky).
- Výpočtem coulombovské bariéry interagujících jader ukažte, že energie dopadajících jader železa je větší.
- Vypočtěte na tři platné číslice excitační energii jádra hassia. Při práci s hybností využijte poznatek, že klidové energie jádra hassia v základním a v excitovaném stavu si jsou téměř rovny.
- Vypočtěte na tři platné číslice relativní rychlost (vzhledem k  $c$ ) jádra hassia.

Klidová hmotnost odpovídající atomové hmotnostní jednotce je  $931,494\,095\text{ MeV}/c^2$ , klidová hmotnost elektronu je  $0,510\,999\text{ MeV}/c^2$ ,  $\hbar c = 197,3\text{ MeV} \cdot \text{fm}$ , konstanta jemné struktury  $\alpha = \frac{1}{137}$ ,  $R_0 = 1,3\text{ fm}$ ,  $1\text{ barn} = 10^{-28}\text{ m}^2$ .

### Řešení

- Z kinetické energie jádra železa určíme s využitím nerelativistických vztahů jeho rychlost

$$E_{ki} = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 c^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2}{2} = \frac{E_0 \left(\frac{v}{c}\right)^2}{2},$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E_{ki}}{E_0}}.$$

Po dosazení

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot 280,0\text{ MeV}}{(57,933\,274 \cdot 931,494\,095 - 26 \cdot 0,510\,999)\text{ MeV}}} = 0,101\,9.$$

Rychlost dopadajících jader železa určená nerelativisticky je  $0,101\,9c$ . **1 bod**  
Při využití relativistických vztahů dostaneme

$$\frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_0 + E_{ki},$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{E_{ki}}{E_0}\right)^2}}.$$

Po dosazení:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{280 \text{ MeV}}{(57,933\,274 \cdot 931,494\,095 - 26 \cdot 0,510\,999) \text{ MeV}}\right)^2}} = 0,101\,5.$$

Rychlost dopadajících jader železa určená relativisticky je  $0,101\,5c$ .

**2 body**

b) Výšku coulombovské bariéry  $E_C$  získáme ze vztahu (viz studijní text př. 8):

$$E_C = \alpha \frac{Z_{\text{Fe}} Z_{\text{Pb}} \hbar c}{R_0 (\sqrt[3]{A_{\text{Fe}}} + \sqrt[3]{A_{\text{Pb}}})}.$$

Po dosazení:

$$E_C = \frac{1}{137} \frac{26 \cdot 82 \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1,3 \text{ fm} (\sqrt[3]{58} + \sqrt[3]{208})} = 241 \text{ MeV}.$$

Kinetická energie atomů železa je  $280,0 \text{ MeV}$  a je tedy vyšší než coulombovská bariéra.

**2 body**

c) Vypočteme klidové energie:

$$E_0 \left( {}_{26}^{58}\text{Fe} \right) = 57,933\,274 \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} - 26 \cdot 0,510\,999 \text{ MeV} = 53\,951,217 \text{ MeV},$$

$$E_0 \left( {}_{82}^{208}\text{Pb} \right) = 207,976\,652 \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} - 82 \cdot 0,510\,999 \text{ MeV} = 193\,687,121 \text{ MeV},$$

$$E_0 \left( {}_{108}^{266}\text{Hs} \right) = 266,130\,045 \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} - 108 \cdot 0,510\,999 \text{ MeV} = 247\,843,378 \text{ MeV}.$$

Energie reakce je pak

$$Q = \left[ (A_r \left( {}_{26}^{58}\text{Fe} \right) + A_r \left( {}_{82}^{208}\text{Pb} \right)) - A_r \left( {}_{108}^{266}\text{Hs} \right) \right] \cdot m_u c^2$$

Po dosazení:

$$Q = [(57,933\,274 + 207,976\,652) - 266,130\,045] \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} = -205,040 \text{ MeV}.$$

Pro sloučení jader platí zákon zachování energie

$$E_{ki} + Q = E_{kf} + E_x,$$

kde  $E_x$  je excitační energie složeného jádra.

Vzhledem k tomu, že na pravé straně rovnice jsou dvě neznámé veličiny, použijeme ještě zákon zachování hybnosti. Protože klidová energie jádra železa je řádu  $10^4 \text{ MeV}$  a jeho kinetická energie řádu  $10^2 \text{ MeV}$ , použijeme nerelativistický vztah mezi hybností a kinetickou energií.

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} \Rightarrow p = \sqrt{2m_0 E_k} = \frac{\sqrt{2E_0 E_k}}{c}.$$

Zákon zachování hybnosti pro naši reakci bude mít tvar:

$$p_i = p_f \Rightarrow p_i \left( {}^{58}_{26}\text{Fe} \right) = p_f \left( {}^{266}_{108}\text{Hs}^* \right),$$

$$\frac{\sqrt{2E_0 \left( {}^{58}_{26}\text{Fe} \right) E_{ki}}}{c} = \frac{\sqrt{2E_0^* \left( {}^{266}_{108}\text{Hs} \right) E_{kf}}}{c},$$

$$E_0 \left( {}^{58}_{26}\text{Fe} \right) E_{ki} = E_0^* \left( {}^{266}_{108}\text{Hs} \right) E_{kf} \doteq E_0 \left( {}^{266}_{108}\text{Hs} \right) E_{kf}.$$

V rovnici jsme využili poznatek, že klidové energie jádra hassia v základním a v excitovaném stavu si jsou téměř rovny.

Z rovnice vyjádříme  $E_{kf}$

$$E_{kf} = \frac{E_0 \left( {}^{58}_{26}\text{Fe} \right) E_{ki}}{E_0 \left( {}^{266}_{108}\text{Hs} \right)}$$

a dosadíme do zákona zachování energie

$$E_x = E_{ki} + Q - \frac{E_0 \left( {}^{58}_{26}\text{Fe} \right) E_{ki}}{E_0 \left( {}^{266}_{108}\text{Hs} \right)} = E_{ki} \left( 1 - \frac{E_0 \left( {}^{58}_{26}\text{Fe} \right)}{E_0 \left( {}^{266}_{108}\text{Hs} \right)} \right) + Q.$$

Po dosazení

$$E_x = 280,0 \text{ MeV} \left( 1 - \frac{53\,951,217 \text{ MeV}}{247\,843,378 \text{ MeV}} \right) + (-205,040 \text{ MeV}) = 14,0 \text{ MeV}$$

Excitační energie jádra hassia je 14,0 MeV.

**4 body**

d) Rychlost jádra hassia určíme z jeho kinetické energie.

$$E_{kf} = \frac{53\,951,217 \text{ MeV} \cdot 280,0 \text{ MeV}}{247\,843,378 \text{ MeV}} = 61,0 \text{ MeV},$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E_{kf}}{E_0 \left( {}^{266}_{108}\text{Hs} \right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 61,0 \text{ MeV}}{247\,843,378 \text{ MeV}}} = 0,022 \text{ 2.}$$

Rychlost jádra hassia je 0,022 2c.

**1 bod**

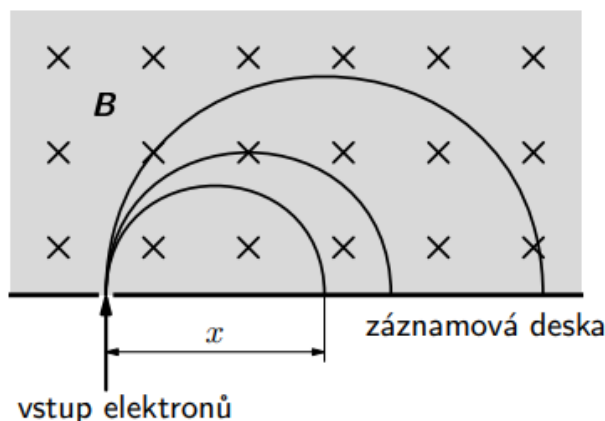
## 5.8.2 Fyzika částic

### 65.FO46A3-3: Měření rychlosti a energie relativistických elektronů [69 %]

K měření energie elektronů můžeme využít zakřivení jejich trajektorie v magnetickém poli (obr. 4). Urychlené elektrony vstupují štěrbinou do homogenního magnetického pole analyzátoru kolmo k indukčním čarám a kolmo k záznamové desce s filmem, na kterém vznikají při dopadu jejich stopy. Při testování analyzátoru dopadají elektrony urychlené napětím  $U_1 = 500$  kV do vzdálenosti  $x_1 = 50$  mm od štěrbiny.

- Určete velikost  $B$  magnetické indukce v analyzátoru.
- Určete největší kinetickou energii  $E_{k\max}$  elektronu měřitelnou analyzáto-rem, jestliže maximální vzdálenost stopy od štěrbiny je  $x_{\max} = 400$  mm.
- Určete velikost  $v_{\max}$  rychlosti elektronu s kinetickou energií  $E_{k\max}$ .

Klidová hmotnost elektronu je  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, elementární náboj  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C, rychlost světla ve vakuu  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ .



Obr. 4

### Řešení

- Na elektron působí v magnetickém poli dostředivá magnetická síla. Platí

$$\frac{mv^2}{r} = Bev, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Z toho vyjádříme velikost hybnosti elektronu

$$p = mv = Ber = \frac{Bex}{2}.$$

Ze vztahu mezi celkovou energií elektronu, klidovou energií elektronu a jeho hybností

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2 = m_0^2c^4 + \left(\frac{Becx}{2}\right)^2$$

plyne pro kinetickou energii elektronu vztah

$$E_k = E - E_0 = \sqrt{m_0^2c^4 + \left(\frac{Becx}{2}\right)^2} - m_0c^2.$$



Z toho

$$\frac{Becx}{2} = \sqrt{E_k^2 + 2m_0c^2E_k}. \quad (1)$$

Při testování platí  $E_k = U_1e$ ,  $x = x_1$ . Pak

$$B = \frac{2\sqrt{U_1^2e^2 + 2m_0c^2U_1e}}{ecx_1} = 0,116 \text{ T.}$$

**4 body**

b) Ze vztahu (1) plyne

$$\left(\frac{x_{\max}}{x_1}\right)^2 = \frac{E_{k \max}^2 + 2m_0c^2E_{k \max}}{E_{k1}^2 + 2m_0c^2E_{k1}},$$

$$E_{k \max}^2 + 2m_0c^2E_{k \max} - \left(\frac{x_{\max}}{x_1}\right)^2 (E_{k1}^2 + 2m_0c^2E_{k1}) = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen této kvadratické rovnice

$$\begin{aligned} E_{k \max} &= -m_0c^2 + \sqrt{m_0^2c^4 + \left(\frac{x_{\max}}{x_1}\right)^2 (E_{k1}^2 + 2m_0c^2E_{k1})} = \\ &= -m_0c^2 + \sqrt{m_0^2c^4 + \left(\frac{x_{\max}}{x_1}\right)^2 (U_1^2e^2 + 2m_0c^2U_1e)}. \end{aligned}$$

Po dosazení  $E_{k \max} = 1,04 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 6,5 \text{ MeV}$ .

**4 body**

c) Ze vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

odvodíme

$$\begin{aligned} v &= c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{\left(m_0 + \frac{E_k}{c^2}\right)^2}} = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{(m_0c^2 + E_k)^2}}, \\ v_{\max} &= c\sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{(m_0c^2 + E_{k \max})^2}} = 0,9973c = c - 8,0 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

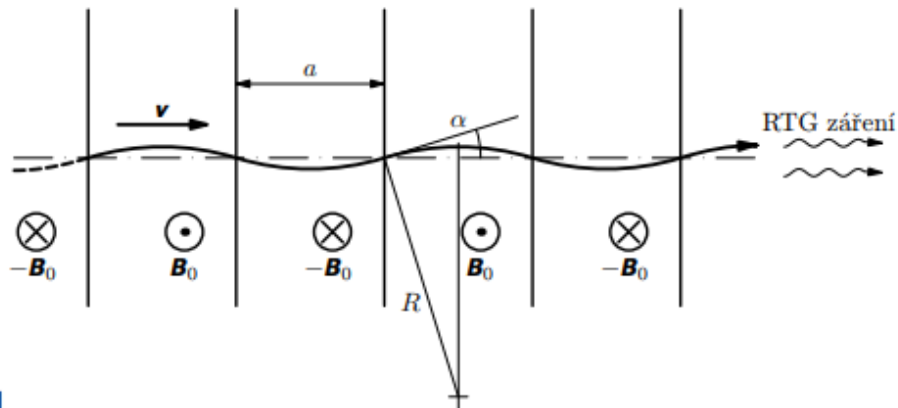
**2 body**

Ve výzkumném centru SLAC ve Stanfordu se při přípravě laserového rentgenového záření používá tzv. *undulátor*, ve kterém se elektrony urychlené lineárním urychlovačem na celkovou energii až  $E = 14$  GeV nechají prolétnout 112 m dlouhou soustavou opačně orientovaných homogenních magnetických polí s indukcí o velikosti  $B_0 = 1,25$  T, každé o šířce  $a = 1,5$  cm. Tím se jejich trajektorie nepatrně zvlí (obr. 1). Po výstupu z undulátoru jsou elektrony odchýleny magnetickým polem do absorbérů. Elektrony, které se pohybují velkou rychlostí po zakřivené trajektorii, vyzařují ve směru svého pohybu rentgenové záření o vlnové délce

$$\lambda = \frac{a}{\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} \right),$$

kde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  je Lorentzův faktor a  $K = \frac{eB_0a}{\pi m_e c}$  je undulátorový parametr.

Elektrony se při průchodu undulátorem sdružují do „mikroobláček“ a díky tomu je vystupující rentgenové záření silně koherentní.



Obr. 1

- Porovnejte celkovou energii  $E$  elektronu, který vstupuje do undulátoru, s jeho klidovou energií  $E_0$ . O kolik % se liší rychlost  $v$  elektronu od rychlosti  $c$  světla ve vakuu?
- Jaký je poloměr  $R$  oblouků kružnic, po kterých se elektron pohybuje v každé části undulátoru? Určete vstupní úhel  $\alpha$  a maximální vzdálenost  $d$  elektronu od osy undulátoru.
- Určete vlnovou délku  $\lambda$  vznikajícího rentgenového záření a porovnejte energii  $E_f$  fotonu tohoto záření s celkovou energií elektronu při vstupu do undulátoru.

Klidová hmotnost elektronu  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg,  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>, elementární náboj  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C, Planckova konstanta  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  J·s.

Při řešení podle potřeby využijte aproximaci  $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$  pro  $x \ll 1$ .

## Řešení

- a) Celková energie elektronu a jeho energie klidová jsou v poměru

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{14 \text{ GeV}}{0,511 \text{ MeV}} \doteq 27\,000.$$

Z toho

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{E_0}{E}\right)^2 \doteq 1 - 6,7 \cdot 10^{-10}.$$

Rychlost elektronu je jen o  $6,7 \cdot 10^{-8} \%$  menší než rychlost světla ve vakuu.

**3 body**

- b) Dostředivou silou je síla magnetická:

$$\frac{m_e v^2}{R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\gamma m_e v^2}{R} = B_0 e v \Rightarrow R = \frac{\gamma m_e v^2}{B_0 e v} \approx \frac{\gamma m_e c^2}{B_0 e c} = \frac{E}{B_0 e c} \doteq 37 \text{ m}.$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R} \doteq 0,000\,201, \quad \alpha \doteq 0,0115^\circ = 41''.$$

Maximální vzdálenost elektronů od osy undulátoru je

$$d = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}\right) \approx \\ \approx R \left(1 - 1 + \frac{a^2}{8R^2}\right) = \frac{a^2}{8R} \doteq 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm} = 0,75 \text{ } \mu\text{m}.$$

**3 body**

- c) Undulátorový parametr má hodnotu  $K = \frac{e B_0 a}{\pi m_e c} \doteq 3,5$ . Po dosazení do vztahu pro vlnovou délku dostaneme

$$\lambda = \frac{a}{\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) = \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{27\,000^2} \cdot 7,125 \doteq 1,4 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,14 \text{ nm}.$$

Fotony rentgenového záření mají v porovnání s celkovou energií elektronu vstupujícího do undulátoru nepatrnou energii

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} \doteq 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ J} \doteq 8,7 \text{ keV} \doteq 6,2 \cdot 10^{-7} E.$$

**4 body**

Článek o undulátoru, ze kterého jsme čerpali, je dosažitelný na adrese

[http://www.cscasfyz.fzu.cz/Burian\\_Chalupsky\\_Hajkova\\_Bohacek\\_Juha\\_LCLS.pdf](http://www.cscasfyz.fzu.cz/Burian_Chalupsky_Hajkova_Bohacek_Juha_LCLS.pdf)

Mikrotron je urychlovač elektronů pracující na podobném principu jako cyklotron. V poli silného elektromagnetu o indukci  $\mathbf{B}$  je umístěna plochá válcová komora, ale místo duantů je u okraje komory dutinový rezonátor, který opakovaně urychluje elektrony vysokofrekvenčním střídavým napětím. Při prvním vstupu do rezonátoru je kinetická energie elektronu zanedbatelná. Při každém průchodu rezonátorem se jeho kinetická energie zvětší o hodnotu rovnou klidové energii  $E_0 = m_0c^2$  a elektron přechází na kruhovou trajektorii o větším poloměru (obr. 5). Aby elektron přišel mezi elektrody rezonátoru ve správné fázi periody vysokofrekvenčního napětí a mohl být znovu urychlen, pracuje generátor napětí s frekvencí

$$f_0 = \frac{eB}{2\pi m_0}, \quad (2)$$

kde  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg je klidová hmotnost elektronu,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C elementární náboj a  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup> rychlost světla ve vakuu.

- Vypočítejte frekvenci generátoru, jestliže velikost vektoru magnetické indukce ve vakuové komoře je  $B = 0,40$  T.
- Ověřte, že při splnění podmínky (2) je na každé trajektorii elektronu doba oběhu  $T$  celočíselným násobkem periody  $T_0$  generátoru.
- Určete celkovou energii elektronu, poloměr trajektorie a dobu oběhu po  $n$ -tém průchodu elektronu rezonátorem. Můžete využít vztah mezi celkovou energií, klidovou energií a hybností částice  $E^2 = E_0^2 + p^2c^2$ .

### Řešení

a)  $f_0 = 1,1 \cdot 10^{10}$  Hz.

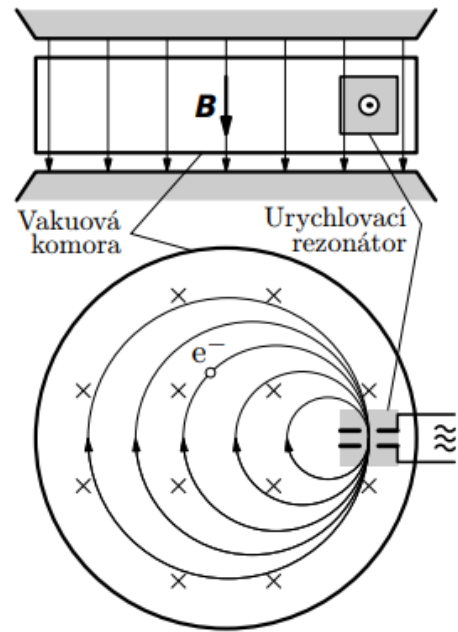
1 bod

- b) Při  $n$ -tém průchodu rezonátorem se kinetická energie elektronu zvětší na

$$E_k = nE_0 = n \cdot m_0c^2$$

a hmotnost elektronu se zvětší na

$$m = m_0 + \frac{E_k}{c^2} = (n + 1)m_0.$$



Obr. 5

Dostředivou silou při pohybu elektronu je síla magnetická. Platí

$$Bev = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \frac{Ber}{m} = \frac{Ber}{(n+1)m_0} = 2\pi r f. \quad (1)$$

$$f = \frac{Be}{2\pi(n+1)m_0} = \frac{f_0}{n+1} \Rightarrow T = (n+1)T_0.$$

**3 body**

c) Po  $n$ -tém průchodu rezonátorem je celková energie elektronu

$$E = (n+1)m_0c^2.$$

Pro  $n = 40$  dostaneme  $E = 3,4 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 21 \text{ MeV}$ .

Doba  $n$ -tého oběhu je  $T = \frac{n+1}{f_0} = \frac{2\pi(n+1)m_0}{Be}$ .

Pro dané hodnoty  $T = 3,7 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ .

**2 body**

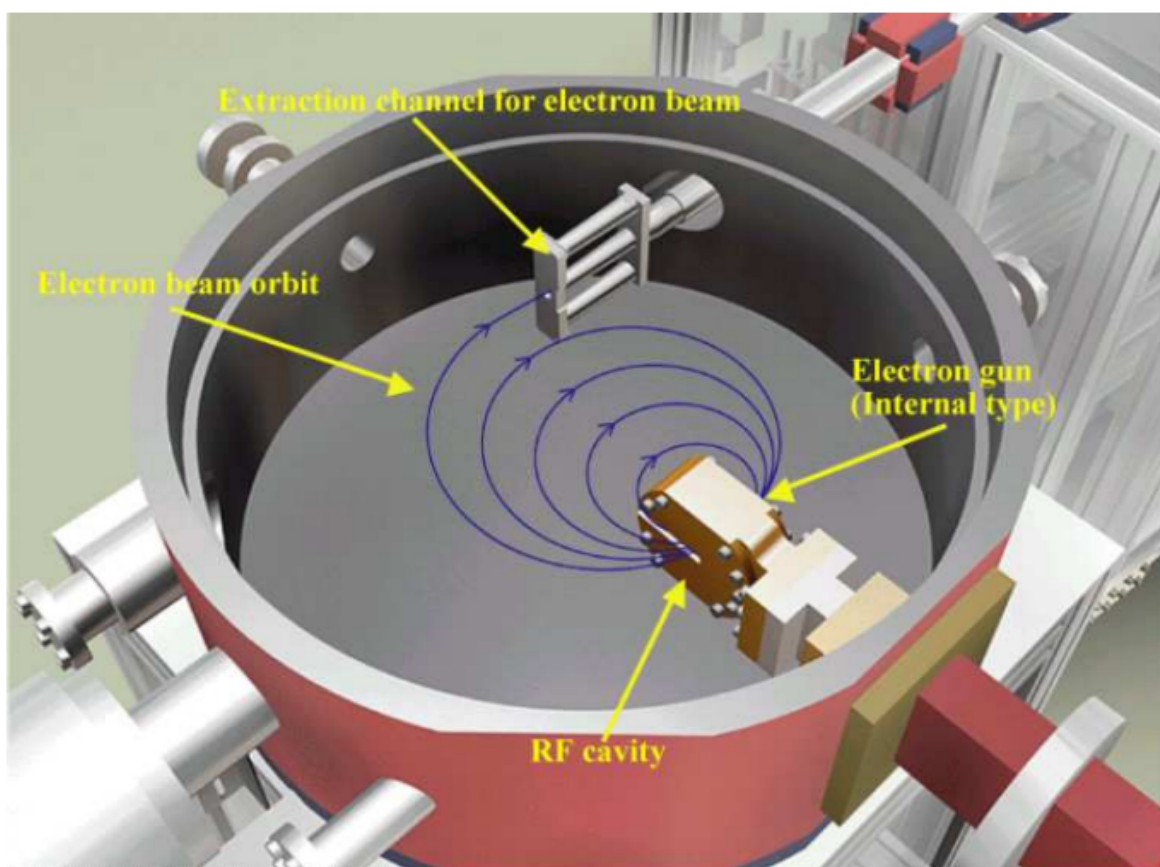
Z (1) vyjádříme hybnost elektronu  $p = mv = Ber$ . Ze vztahu mezi celkovou energií, klidovou energií a hybností částice po  $n$ -tém oběhu platí:

$$E^2 = [(n+1)E_0]^2 = E_0^2 + p^2c^2 = E_0^2 + (Ber)^2,$$

$$r = \frac{E_0}{Bec} \sqrt{(n+1)^2 - 1} = \frac{m_0c}{Be} \sqrt{n^2 + 2n}.$$

Pro dané hodnoty  $r = 17 \text{ cm}$ .

**4 body**

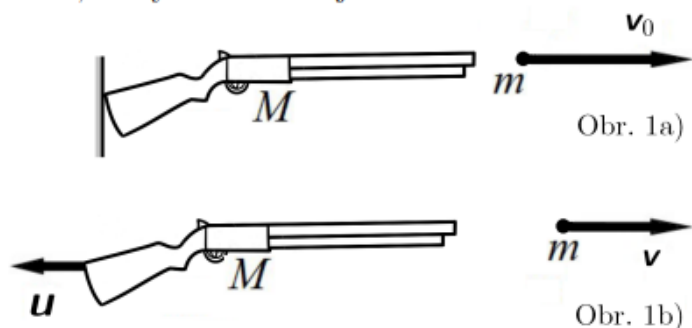


Obrázek převzat z publikace *Urychlovače nabitých částic* od doc. Z. Doležala z MFF.

### 68.FO61A3-3: Mössbauerův jev

[33 %]

Za normálních podmínek dojde při emisi gama kvanta k zpětnému rázu atomového jádra. Podle velikosti zpětného rázu se mění energie (frekvence) emitovaného záření. Při nízkých teplotách se jádro stává natolik pevnou součástí krystalové mřížky, že ta absorbuje energii zpětného rázu. energii emitovaného gama kvanta lze pak určit jako rozdíl energií excitovaného a základního stavu jádra a je tedy dobře definována. Tento jev objevil německý fyzik Rudolf Ludwig Mössbauer, narozený v roce 1929, který za tento objev získal v roce 1961 Nobelovu cenu.



- a) Puška o hmotnosti  $M$  je opřena o pevnou stěnu. Při výstřelu opouští náboj hlaveň pušky rychlostí o velikosti  $v_0$  (obr. 1a). Poměr hmotností náboje a pušky je  $\mu = \frac{m}{M}$ . Energie  $E_0$  dodaná spálenými plyny, která se uvolní při každém výstřelu, je nezávislá na pohybu pušky a je rovna kinetické energii střely vzhledem k pušce.

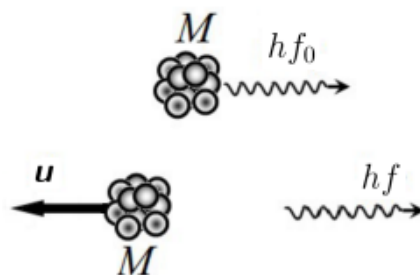
Jaká by byla velikost rychlosti náboje  $v$ , kdyby puška nebyla opřena o stěnu, ale mohla se volně pohybovat (obr. 1b)?

Najděte relativní změnu velikosti rychlosti náboje  $\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v - v_0}{v_0}$  za předpokladu, že hmotnost náboje je v porovnání s hmotností pušky zanedbatelná ( $\mu \rightarrow 0$ ).

Najděte relativní změnu energie náboje  $\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E - E_0}{E_0}$  za předpokladu, že hmotnost náboje je v porovnání s hmotností pušky zanedbatelná ( $\mu \rightarrow 0$ ).

Můžete použít vztahy  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ ,  $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$ .

- b) Excitované atomové jádro hmotnosti  $M$  za velmi nízké teploty (jádro je téměř nehybnou součástí krystalové mřížky) vyzáří foton  $\gamma$  záření o energii  $hf_0$ . Excitované jádro za běžné teploty (lze považovat za volné, schopné odskoku) vyzáří foton o energii  $hf$ .



Obr. 2

Určete poměr

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}, \text{ kde } \varepsilon = \frac{hf}{Mc^2} \text{ a } \varepsilon_0 = \frac{hf_0}{Mc^2}.$$

Úlohu řešte klasicky (bez uvažování klidové energie) i relativisticky (s uvažováním klidové energie), vztahy porovnejte pro zanedbatelně malé  $\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ ). V relativistické fyzice platí mezi energií a hmotností vztah  $E^2 = M^2c^4 + p^2c^2$ .

- c) Mössbauer použil jádra iridia  $^{191}_{77}\text{Ir}$  vyzářující v upevněném stavu kvanta o energii  $E_0 = 129$  keV. Určete přibližnou klidovou energii jádra iridia (neuvažujte hmotnostní úbytek), parametr  $\varepsilon_0$  a velikost rychlosti  $u$  volného jádra iridia po vyzáření kvanta. Hmotnost protonu a neutronu  $m_p \cong m_n = 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg, rychlost světla  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ , elementární náboj  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

Jaký je poměr  $\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_0}$  fotonů  $\gamma$  opouštějících jádro v tomto případě? Úlohu řešte užitím klasického výsledku části b).

- d) Foton gama emitovaný volným jádrem iridia může zasáhnout jiné volné jádro iridia v základním stavu a možná by se v něm mohl absorbovat. Energie fotonu je však snížena zpětným rázem a při absorpci volným jádrem by se další část energie přeměnila na pohyb jádra a teprve zbývající energie fotonu by mohla způsobit excitaci jádra. Mezi dvěma jádry by pak vznikla tzv. rezonance. Pro vznik rezonance je však již energie (frekvence) fotonu malá. Aby dosáhl rezonance, rozhodl se Mössbauer pro zvýšení frekvence fotonů využít Dopplerův jev.

Jakou relativní rychlostí se musel pohybovat zdroj  $\gamma$  kvant směrem k přijímači, který obsahoval rovněž volná jádra  $^{191}_{77}\text{Ir}$ , aby došlo k rezonanci? Pro změnu frekvence při pohybu zdroje k přijímači platí

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{v_0}{c}.$$

### Řešení

- a) Ze zákona zachování hybnosti a zákona zachování energie

$$\begin{aligned} mv &= Mu, \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} &= \frac{mv_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Člen  $\frac{mv_0^2}{2}$  je energie dodaná spálenými plyny, která je stejná při výstřelu z upevněné i neupevněné pušky. Zavedením parametru  $\mu$  dostaneme

$$\begin{aligned} \mu v &= u, \\ \mu v^2 + u^2 &= \mu v_0^2. \end{aligned}$$

Po úpravě, a protože  $\mu \rightarrow 0$ ,

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1+\mu}} \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{2}\mu\right). \text{ Pak } \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v - v_0}{v_0} = -\frac{1}{2}\mu.$$

Úbytek energie náboje je roven kinetické energii, kterou získala puška

$$\Delta E = -\frac{Mu^2}{2}.$$

Relativní změna energie pak

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E - E_0}{E_0} = -\frac{Mu^2}{mv_0^2} = -\frac{\mu v^2}{v_0^2} = -\frac{\mu}{1+\mu}.$$

Při  $\mu \rightarrow 0$  pak bude  $\frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{1-\mu}{1-\mu} \approx -\mu.$

**2 body**



b) V klasické fyzice mají zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie tvar

$$Mu = \frac{hf}{c},$$

$$hf_0 = hf + \frac{Mu^2}{2},$$

po úpravě

$$hf_0 = hf + \frac{M}{2} \left( \frac{hf}{Mc} \right)^2.$$

K určení relativního poměru energií  $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}$  vydělíme  $Mc^2$ :

$$\frac{hf_0}{Mc^2} = \frac{hf}{Mc^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{hf}{Mc^2} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon_0 = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (1)$$

Odtud  $\varepsilon = \sqrt{1 + 2\varepsilon_0} - 1$ .

Při návratu k obvyklým veličinám  $hf = Mc^2 \left( \sqrt{1 + 2\frac{hf_0}{Mc^2}} - 1 \right)$ .

Relativisticky budou mít zákony zachování tvar

$$p = \frac{hf}{c},$$

$$hf_0 + Mc^2 = hf + E_j$$

kde  $E_j$  a  $p$  jsou velikosti energie a hybnosti získané jádrem. Ty jsou navzájem vázány vztahem  $E_j^2 = M^2c^4 + p^2c^2$ .

Dosazením ze zákonů zachování  $(hf_0 - hf + Mc^2)^2 = (Mc^2)^2 + (hf)^2$

Po vydělení  $(Mc^2)^2$  dostaneme

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon + 1)^2 = 1 + \varepsilon^2 \quad (2)$$

Odtud vyplývá  $\varepsilon = \frac{(\varepsilon_0 + 1)^2 - 1}{2(\varepsilon_0 + 1)}$ . Srovnáme klasický a relativistický vztah pro  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ . Pro  $\varepsilon_0 \ll 1$  z klasického vztahu (1) plyne

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon^2}{2} \approx -\frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = -\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Pro  $\varepsilon_0 \ll 1$  z relativistického vztahu (2) plyne

$$(1 - \Delta\varepsilon)^2 = 1 + \varepsilon^2 \Rightarrow 1 - 2\Delta\varepsilon + (\Delta\varepsilon)^2 = 1 + \varepsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\Delta\varepsilon \approx \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

V prvním přiblížení dostáváme klasicky i relativisticky stejné výsledky. **4 body**

c) Klidová energie jádra iridia

$$E = Mc^2 = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ eV.}$$

Pak parametr  $\varepsilon_0 = \frac{129 \cdot 10^3}{1,83 \cdot 10^{11}} = 7,1 \cdot 10^{-7}$ . To je číslo mnohem menší než 1, proto můžeme použít klasické přiblížení:

$$\Delta\varepsilon \approx -\frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow \frac{Mu^2}{2} = \frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow u = c\varepsilon_0 = 2,1 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Relativní úbytek energie vyletujících fotonů, které opouští pevné jádro a jádro volné je

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{\varepsilon_0}{2} = -3,5 \cdot 10^{-7}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

d) Přibližuje-li se zdroj záření k přijímači rychlostí  $v_0$ , je relativní změna frekvence dopadajícího záření  $\frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{v_0}{c}$ . Při rezonanci je třeba, aby posuv při zpětném rázu byl kompenzován Dopplerovským posunem. Protože ke změně frekvence dochází při vyzáření i při absorpci fotonu, musí být splněna podmínka

$$\frac{v_0}{c} = 2\frac{\varepsilon_0}{2} \Rightarrow v_0 = c\varepsilon_0 = 2,1 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Touto rychlostí se pohybuje i jádro při zpětném rázu.

**2 body**

## 5.9 Astrofyzika

69.FO50A3-1: Pohyby v planetární soustavě

[56 %]



O planetě Marsu zjistili astronomové na základě měření provedených z povrchu Země, že doba oběhu (siderická) je  $T_M = 1,881$  roku. Trajektorii Země je možno považovat za kružnici (vzdálenost Země od Slunce je  $r_Z = 1,000$  AU), ale trajektorie Marsu je eliptická s číselnou výstředností 0,0934. Obě trajektorie leží přibližně ve stejné rovině.

- Z uvedených údajů určete délku hlavní poloosy  $a$  a vedlejší poloosy  $b$  trajektorie Marsu, vzdálenost  $r_a$  Marsu od Slunce v aféliu a vzdálenost  $r_p$  v periheliu.
- Určete plošnou rychlost  $w$  Marsu (tj. plochu opsanou jeho průvodičem za jednotku času), velikost  $v_a$  jeho rychlosti v aféliu a velikost  $v_p$  jeho rychlosti v periheliu. Jak závisí poměr hodnot  $v_p$ ,  $v_a$  na číselné výstřednosti trajektorie Marsu?
- Určete hodnoty  $k_{sa}$ ,  $k_{sp}$  solární konstanty v okolí Marsu při jeho průchodech aféliem a periheliem, je-li solární konstanta v okolí Země  $k_{sZ} = 1\,360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Jak závisí poměr hodnot  $k_{sp}$ ,  $k_{sa}$  na číselné výstřednosti trajektorie Marsu?
- Pro cestu z okolí Země do okolí Marsu je energeticky optimální pohyb po trajektorii tvaru elipsy, která se vně dotýká trajektorie Země a uvnitř trajektorie Marsu. Situaci načrtněte. Jaká by byla doba pohybu kosmické lodě z okolí Země do okolí Marsu, kdyby se v okamžiku přiblížení nacházel 1) v periheliu, 2) v aféliu?

Při řešení počítejte, že  $1 \text{ AU} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ,  $1 \text{ rok} = T_Z = 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$ . Ve výsledku volte „rozumný“ počet platných míst.

Řešení

- a) Vydeme z 3. Keplerova zákona  $\frac{r_Z^3}{a^3} = \frac{T_Z^2}{T_M^2}$ , z čehož

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2 r_Z^3} = 1,524 \text{ AU} = 2,280 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Dále platí

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0,9956a = 1,517 \text{ AU} = 2,270 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

$$r_p = a(1 - \varepsilon) = 0,9066a = 1,381 \text{ AU} = 2,067 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

$$r_a = a(1 + \varepsilon) = 1,0934a = 1,666 \text{ AU} = 2,493 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

**3 body**

- b) Za dobu  $T_M$  opíše průvodič Marsu plochu  $S = \pi ab = 1,625 \cdot 10^{23} \text{ m}^2$ . Plošná rychlost Marsu je tedy

$$w = \frac{S}{T_M} = \frac{\pi ab}{T_M} = 2,738 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Platí  $w = \frac{v_p r_p}{2} = \frac{v_a r_a}{2}$ . Z toho

$$v_p = \frac{2w}{r_p} = 26,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_a = \frac{2w}{r_a} = 22,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1,21.$$

**2 body**

- c) Pro zářivý tok  $\Phi_e$ , dopadající ze Slunce o zářivém výkonu  $L$  kolmo na plochu o obsahu  $S$  ve vzdálenosti  $r$  od Slunce, platí  $\Phi_e = \frac{L}{4\pi r^2} S$ .

Pro Zemi platí  $k_{sZ} = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{L}{4\pi r_Z^2}$ , analogicky pro Mars v aféliu můžeme psát  $k_{sa} = \frac{L}{4\pi r_a^2}$ , a v periheliu  $k_{sp} = \frac{L}{4\pi r_p^2}$ . Z toho

$$\frac{k_{sa}}{k_{sZ}} = \left(\frac{r_Z}{r_a}\right)^2, \quad k_{sa} = \left(\frac{r_Z}{r_a}\right)^2 k_{sZ} = 490 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2},$$

$$\frac{k_{sp}}{k_{sZ}} = \left(\frac{r_Z}{r_p}\right)^2, \quad k_{sp} = \left(\frac{r_Z}{r_p}\right)^2 k_{sZ} = 713 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

$$\frac{k_{sp}}{k_{sa}} = \left(\frac{r_a}{r_p}\right)^2 = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 = 1,45.$$

**2 body**

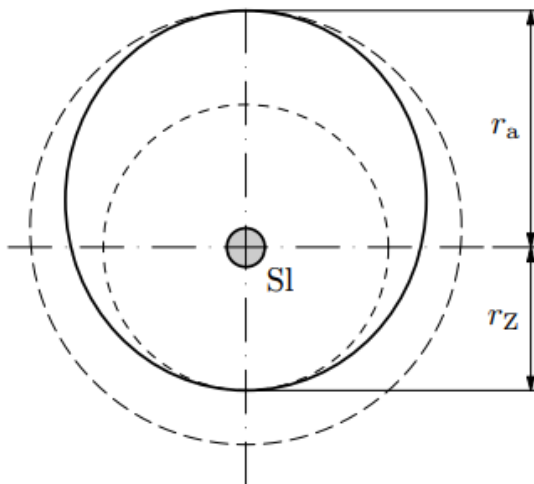
- d) Situace v případě, že k přiblížení stanice k Marsu dojde, když je Mars v aféliu, je zobrazena na obr. R1. Hlavní poloosa trajektorie kosmické stanice má délku  $a_1 = (r_Z + r_a)/2$ . Podle 3. Keplerova zákona je doba oběhu stanice na této trajektorii

$$T_1 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{r_Z}\right)^3} T_Z = 1,54 \text{ roku} = 562 \text{ dní}.$$

Jestliže k přiblížení stanice k Marsu dojde, když je v periheliu, má hlavní poloosa trajektorie kosmické stanice délku  $a_2 = (r_Z + r_p)/2$  a doba oběhu stanice na této trajektorii je

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{a_2}{r_Z}\right)^3} T_Z = 1,30 \text{ roku} = 475 \text{ dní}.$$

Doba letu kosmické lodi v prvním případě je  $\frac{t_1}{2} = 281$  dní, v druhém případě  $\frac{T_2}{2} = 237$  dní.



Obr. R1

**3 body**

**70.FO49A3-3: Sluneční fotonové záření**

[54 %]

Sluneční záření, které dopadá kolmo na  $1 \text{ m}^2$  rovinné plochy ve volném prostoru ve vzdálenosti 1 AU od středu Slunce, má výkon 1365 W. Slunce můžeme považovat ze dokonale černé těleso, které pohlcuje veškeré elektromagnetické záření, které na ně dopadá, a vydává pouze záření vlastní. Podle *Stefanova-Boltzmannova zákona* je intenziva vyzařování (tj. energie záření vystupujícího za 1 s z plochy  $1 \text{ m}^2$  povrchu tělesa) takového tělesa, jehož povrchová teplota je  $T$ ,

$$H = \sigma T^4, \quad \text{kde } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

Průměr sluneční fotosféry vidí pozorovatel na povrchu Země pod úhlem  $32'$ , poloměr Země je 6371 km,  $1 \text{ AU} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

- Stanovte celkový zářivý výkon  $L$  Slunce.
- Určete teplotu  $T_s$  sluneční fotosféry.
- Určete energetický příjem slunečního záření dopadajícího na Zemi za jeden den a za jeden rok (365,25 dne).
- V současné době se hovoří o projektu, kdy by na Sahaře měla být instalována elektrárna ze solárních článků: předpokládejme, že na povrch Země dopadne po průchodu atmosférou 40 % záření, které se dostalo na hranici atmosféry. Dále budeme uvažovat, že existující solární články mají účinnost 12 %. Jak velký maximální výkon  $P_{\max}$  by měly solární články s plošným obsahem  $1 \text{ km}^2$ ?
- Na oběžnou dráhu okolo Země vyšleme družici kulového tvaru tak, aby byla nepřetržitě ozářena Sluncem. Družice bude mít dobrou tepelnou vodivost a její nátěr bude mít vlastnosti blízké se vlastnostem povrchu dokonale černého tělesa. Určete její teplotu  $T_z$ . Záření Země dopadající na družici zanedbejte.
- Určete teplotu  $T_m$  stejné družice obíhající okolo Marsu, je-li jeho střední vzdálenost od Slunce 1,52 AU.
- V jakých mezích se mění teplota družic Země a Marsu z úloh e) a f), je-li číselná výstřednost trajektorií obou planet po řadě  $\varepsilon_z = 0,017$ ;  $\varepsilon_m = 0,093$ ?

### Řešení

- Celkový zářivý výkon Slunce je dán vztahem  $L = 4\pi a^2 P_1$ , kde  $a$  je vzdálenost rovinné plochy od Slunce,  $P_1$  je výkon slunečního záření dopadajícího kolmo na plochu  $1 \text{ m}^2$  ve vzdálenosti  $a$ . Po dosazení  $P_1 = 1,365 \text{ kW}$ ,  $a = 1 \text{ AU}$  dostaneme  $L = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$ .

**1 bod**

- Platí

$$L = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4 = \pi D^2 \sigma T_s^4 = 4\pi a^2 P_1,$$

kde  $R_s$  je poloměr Slunce,  $D$  jeho průměr a  $T_s$  teplota fotosféry. Z toho

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{4P_1}{\sigma \left(\frac{D}{a}\right)^2}},$$

přičemž  $\frac{D}{a} = 32' = 0,0093084 \text{ rad}$ . Číselně vychází  $T_s = 5770 \text{ K}$ .

**1 bod**

- Zářivý výkon dopadající na Zemi za 1 sekundu je dán vztahem

$$P = P_1 \cdot S = P_1 \cdot \pi R_z^2.$$

Potom  $W_{\text{den}} = P \cdot t_1 = P_1 \cdot \pi R_z^2 \cdot t_1$ , kde  $t_1 = 86400 \text{ s}$ .

Pro dané hodnoty je  $W_{\text{den}} = 1,5 \cdot 10^{22} \text{ J}$ ,  $W_{\text{roc}} = 365,25 \cdot W_{\text{den}} = 5,5 \cdot 10^{24} \text{ J}$ .

**1 bod**

- Maximální výkon solárních článků je

$$P_{\max} = 1365 \cdot 0,4 \cdot 0,12 \cdot 1 \cdot 10^6 \text{ W} = 65,5 \text{ MW}.$$

**1 bod**

- e) Celkový výkon slunečního záření dopadajícího na družici Země je roven celkovému výkonu záření, které družice vyzařuje. Teplota  $T_z$  družice se určí ze vztahu

$$\pi R^2 P_1 = \sigma T_z^4 \cdot 4\pi R^2,$$

z čehož

$$T_z = \sqrt[4]{\frac{P_1}{4\sigma}} = 278,5 \text{ K, tj. } t_z \approx 5 \text{ }^\circ\text{C.}$$

**2 body**

- f) Pro Mars můžeme psát  $\frac{P_{1m}}{P_1} = \frac{a^2}{a_m^2}$ . Analogicky jako v případě Země platí

$$T_m = \sqrt[4]{\frac{P_{1m}}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\left(\frac{a}{a_m}\right)^2 \frac{P_1}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{a}{a_m}} T_z.$$

Pro dané hodnoty je  $T_m = \sqrt{\frac{1}{1,52}} \cdot 279 \text{ K} = 226 \text{ K, tj. } t_m = -47 \text{ }^\circ\text{C.}$

**2 body**

- g) Pro Zemi v periheliu platí  $r_p = a(1 - \varepsilon_z)$ ,  $P_{1p} = \frac{P_1}{(1 - \varepsilon_z)^2}$ . Analogicky jako

v úloze e) můžeme psát  $T_{1p} = \sqrt[4]{\frac{P_{1p}}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon_z}} T_z = 281 \text{ K.}$

Obdobně v aféliu platí  $r_a = a(1 + \varepsilon_z)$ ,  $P_{1a} = \frac{P_1}{(1 + \varepsilon_z)^2}$ . Analogicky jako v úloze

e) můžeme psát  $T_{1a} = \sqrt[4]{\frac{P_{1a}}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_z}} T_z = 276 \text{ K.}$

Teplota povrchu družice Země se mění s ohledem na vzdálenost od Slunce v rozmezí od  $3 \text{ }^\circ\text{C}$  do  $8 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Pro Mars v periheliu platí  $r_{pm} = a_m(1 - \varepsilon_m)$ ,  $P_{1pm} = \frac{P_{1m}}{(1 - \varepsilon_m)^2}$ . Analogicky jako

v případě Země můžeme psát  $T_{1pm} = \sqrt[4]{\frac{P_{1pm}}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon_m}} T_m = 237 \text{ K.}$

Obdobně v aféliu platí  $r_{am} = a_m(1 + \varepsilon_m)$ ,  $P_{1am} = \frac{P_{1m}}{(1 + \varepsilon_m)^2}$ . Analogicky jako

v případě Země můžeme psát  $T_{1am} = \sqrt[4]{\frac{P_{1am}}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_m}} T_m = 216 \text{ K.}$

Teplota družice Marsu se tedy mění v rozmezí od  $-57 \text{ }^\circ\text{C}$  do  $-36 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**2 body**

14. ledna 2005 přistál na Saturnově měsíci Titan modul Huygens, přepravovaný sondou Cassini. Měsíc Titan má poloměr  $R_T = 2576$  km a hmotnost  $M_T = 1,345 \cdot 10^{23}$  kg. Zanedbejte eliptičnost trajektorie Titanu a předpokládejte, že se Titan pohybuje po kruhové oběžné dráze s poloměrem  $r_T = 1,22 \cdot 10^6$  km s dobou oběhu  $T_T = 15,9$  dne.

- Mezi dvěma po sobě následujícími opozicemi Saturnu uběhne doba  $T_{\text{syn}} = 378,1$  dne. Určete siderickou dobu oběhu Saturnu  $T_{\text{sid}}$  a velikost  $a_{\text{Sat}}$  velké poloosy jeho eliptické trajektorie. Určete vzdálenosti Saturnu od Slunce  $r_p$  v perihéliu a  $r_a$  v aféliu jeho trajektorie, je-li numerická excentricita jeho trajektorie  $\varepsilon = 0,056$ .
- Jaká byla rychlost  $v_a$  sondy při přiletu k Saturnu, víte-li, že se Saturn nacházel v aféliu? Hohmannova trajektorie má tvar poloviny elipsy, která se ve výchozím bodě dotýká trajektorie Země a v koncovém bodě trajektorie Saturnu, přičemž tato místa leží na opačných stranách od Slunce.
- Během přistání modulu Huygens na povrchu Titanu se modul v jistém okamžiku od sondy Cassini vzdaloval rychlostí  $v = 6,0$  km  $\cdot$  s $^{-1}$  a vysílal k ní informace na nosné frekvenci  $f = 2098$  MHz. Jaká byla změna frekvence kmitů  $\Delta f$  vysílaných modulem a kmitů přijímaných sondou Cassini, způsobená Dopplerovým jevem?
- Z uvedených dat určete hmotnost planety Saturn  $M_{\text{Sat}}$  a gravitační zrychlení  $a_g$  na povrchu Titanu.

Gravitační konstanta  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N  $\cdot$  m $^2$   $\cdot$  kg $^{-2}$ , astronomická jednotka 1 au =  $1,50 \cdot 10^{11}$  m, hmotnost Slunce  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg. Gravitační potenciální energii soustavy dvou těles určíme ze vztahu  $E_p = -\frac{GmM}{r}$ ; celkovou energii tělesa pohybujícího se na eliptické dráze s velkou poloosou  $a$  ze vztahu  $E = -\frac{GmM}{2a}$ .

*Poznámka:* Ve skutečnosti se sonda Cassini–Huygens nepohybovala po Hohmannově trajektorii, ale po trajektorii mnohem složitější s využitím několikanásobné metody gravitačního praku.

### Řešení

- Vztah mezi siderickou a synodickou oběžnou dobou vyplývá ze vztahu mezi úhlovými rychlostmi:

$$\frac{1}{T_{\text{sid}}} = \frac{1}{T_Z} - \frac{1}{T_{\text{syn}}} \Rightarrow T_{\text{sid}} = \frac{T_{\text{syn}} T_Z}{T_{\text{syn}} - T_Z} \doteq 10\,800 \text{ dní} = 29,4 \text{ roku.}$$

Ze 3. Keplerova zákona:

$$a_{\text{Sat}}^3 = a_Z^3 \cdot \frac{T_{\text{sid}}^2}{T_Z^2} \Rightarrow a_{\text{Sat}} = a_Z \cdot \sqrt[3]{\frac{T_{\text{sid}}^2}{T_Z^2}} = a_Z \sqrt[3]{\frac{T_{\text{syn}}^2}{(T_{\text{syn}} - T_Z)^2}} = 9,55 \text{ au.}$$

Vzdálenost Saturnu od Slunce v perihéliu je  $r_p = a_{\text{Sat}} (1 - \varepsilon) = 9,00$  au, v aféliu  $r_a = a_{\text{Sat}} (1 + \varepsilon) = 10,1$  au.

**3 body**



b) Velká poloosa Hohmannovy trajektorie:

$$a_H = \frac{1}{2}(r_a + a_Z) = 5,53 \text{ au.}$$

Doba letu

$$t = \frac{1}{2}T_H = \frac{1}{2}T_Z \cdot \sqrt{\frac{a_H^3}{a_Z^3}} = 6,51 \text{ roku.}$$

Ze zákona zachování energie:  $\frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM}{r_a} = -\frac{GmM}{2a_H}$  po úpravě pro rychlost sondy v aféliu:

$$v_a = \sqrt{GM_S \left( \frac{2}{r_a} - \frac{1}{a_H} \right)} = \sqrt{2GM_S \frac{a_Z}{r_a (r_a + a_Z)}} = 3,99 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**3 body**

*Poznámka:* K odvození můžeme použít přímo ZZE a druhý Keplerův zákon:

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM_S}{a_Z} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM_S}{r_a}.$$

a  $v_p = v_a \frac{a_{\text{Saf}}}{a_Z}$ , odkud po dosazení a úpravě dostáváme

$$v_a = \sqrt{2GM_S \frac{a_Z}{r_a (r_a + a_Z)}} = 3,99 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) Při vzdalování sondy od mateřské lodi dochází podle Dopplerova jevu ke snížení frekvence nosné vlny přijímaného signálu. Platí:

$$f_1 = f \cdot \left( \frac{c - v}{c} \right) \Rightarrow \Delta f = f - f_1 = f \cdot \frac{v}{c} = 42 \text{ kHz.}$$

**2 body**

d) Gravitační síla mezi Saturnem a Titanem je silou dostředivou, proto

$$M_T \frac{4\pi^2}{T_T^2} \cdot r_T = G \frac{M_{\text{Sat}} M_T}{r_T^2} \Rightarrow M_{\text{Sat}} = \frac{4\pi^2 r_T^3}{G T_T^2} = 5,70 \cdot 10^{26} \text{ kg.}$$

Gravitační zrychlení na povrchu Titanu:

$$a_g = G \frac{M_T}{R_T^2} = 1,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

**2 body**

# Závěr

Cílem této práce bylo sestavit tematicky členěnou sbírku úloh vybraných ročníků celostátních kol Fyzikální olympiády a k těmto ročníkům vyhodnotit základní charakteristiky položkové analýzy a analýzy testu jako celku. Dalším cílem bylo kartograficky znázornit zastoupení účastníků a jejich škol v rámci krajů České republiky. Stanovené cíle se nám podařilo naplnit. Práce je členěna do pěti kapitol.

V první kapitole jsme představili fyzikální soutěže, kterých by se mohl fyzikální nadšenec v ČR zúčastnit. Velkou část této kapitoly jsme věnovali Fyzikální olympiádě a její stručné historii. Během popisu jednotlivých soutěží, jsme upozorovali, že většina pořadatelů se nezabývá čistě přípravou a vymyšlením úloh, ale také tvorbou doplňujících studijních textů, pořádáním přednášek a seminářů či organizací vícedenních soustředění pro nejlepší řešitele. Je zjevné, že fyzikální soutěže v České republice si více než na samotné soutěži zakládají na celkové péči o fyzikální talenty. V závěru kapitoly jsme se zamysleli nad nižší účastí žen na fyzikálních soutěžích a tuto problematiku se pokusili vysvětlit s využitím několika zahraničních výzkumů.

Ve druhé kapitole jsme zavedli pojmy geografické informační systémy, kartogram, pseudokartogram a kartodiagram. Kartografické vyjadřovací prostředky, které jsme využívali pro znázornění účasti škol a jejich řešitelů v krajích, jsme ujasnili na vlastních mapových výstupech.

Třetí kapitola se již zabývala analýzou vlastností soutěžních ročníků celostátních kol Fyzikální olympiády. Rozbor byl proveden za 17leté období, od 46. do 62. ročníku, a to jak na úrovni analýzy vlastností soutěžních úloh, tak analýzy vlastností soutěžních ročníků jako celku.

V rámci položkové analýzy jsme zjišťovali obtížnost položky pomocí indexu obtížnosti  $P$ , citlivost položky pomocí Pearsonova korelačního koeficientu a analýzu nenormovaných odpovědí jako relativní počet výsledků s nulovým bodovým ohodnocením. Z výsledků vyplývá, že celkem 84 % všech početních úloh splňuje naše kritéria. Největší obtíže měli žáci ve 47. ročníku, u kterého nevyhovují tři úlohy z pěti, dvě početní a úloha experimentální. Kromě tohoto ročníku, již všechny ostatní experimentální úlohy hodnotíme jako vyhovující. Po porovnání průměrné obtížnosti s a bez započítání experimentální úlohy bylo patrné, že pro řešitele je jednodušší praktická část soutěže než početní.

U analýzy vlastností soutěžních ročníků jako celku jsme stanovili spolehlivost testu pomocí koeficientu Cronbachova alfa, který nahlíží na reliabilitu jako na vnitřní konzistenci testu. Z rozboru vyplývá, že většina ročníků nabývá hodnot kolem 0,6, která je hranicí mezi homogenitou a heterogenitou testu. U většiny ročníků tedy nelze spolehlivě říci, že jsou výsledky žáků srovnatelné. K podobným závěrům jsme dospěli i v bakalářské práci *Analýza vlastností souboru úloh vybraných ročníků Fyzikální olympiády*. Avšak ani tehdy ani dnes nás nízké hodnoty Cronbachova alfa nepřekvapily, jelikož každý ročník je tvořen úlohami ověřující různé oblasti fyziky, a každý žák tak může preferovat jinou z těchto oblastí.

Úvodem čtvrté kapitoly jsme se zabývali vývojem počtu účastníků v čase a podílem žen a mužů v jednotlivých ročnících. Zjistili jsme, že za posledních 17 let se počet řešitelů výrazně neměnil. Kde jsme zpozorovali ale velké odlišnosti, bylo mezi počtem žen a mužů ve všech ročnících od 46. do 62. ročníku. Podíl žen se pohyboval v rozmezí od 5 % do 17 % a průměrně činil 9 %. Jednou z možných příčin může být například to, že ženy se více zajímají o přírodovědné předměty, které mají blíže k lékařství (biologie a chemie), což se může promítat také na odlišné účasti v jednotlivých přírodovědných olympiádách.

Pro znázornění zastoupení řešitelů a jejich příslušných škol za období 17 let jsme použili metody pseudokartogramu. Naše mapové výstupy přibližně odpovídají výsledkům přírodovědné gramotnosti z šetření PISA z roku 2015. Kraje s nejnižším počtem účastníku na 10 000 žáků středních škol byl Ústecký a Středočeský kraj. Naopak nejvyšší podíl se nacházel v Pardubickém kraji a kraji Vysočina. Při bližším zkoumání jsme zjistili, že vyjma Hlavního města Prahy a Ostravy-města, mají všechny okresy s městem nad 80 tisíc obyvatel znatelně vyšší podíl řešitelů na počet obyvatel. Dále jsme zpozorovali, že největší počet zúčastněných škol na 100 SŠ má kraj Pardubický, Zlínský, Liberecký kraj a kraj Vysočina. Naopak nejnižší hodnoty se nacházejí v Hlavním městě Praze, Středočeském, Královéhradeckém a Karlovarském kraji.

Závěrečná kapitola je již zaměřena na sbírku úloh celostátních kol Fyzikální olympiády. Sbíрка byla vytvořena za 17leté období, od 46. do 62. ročníku a obsahuje tak početnou sérii 68 vyřešených příkladů. Úlohy byly roztříděny do témat na základě obsahu sbírek Karla Bartušky a seřazené podle rostoucí obtížnosti, která byla vyčíslena indexem obtížnosti  $P$ . Hodnoty indexu obtížnosti se pohybují v intervalu od 20 % do 89 %, což považujeme za žádoucí, jelikož je sbírka tvořena úlohami s odlišnou obtížností.

Věřím, že tato sbírka nalezne uplatnění nejen při přípravě středoškolských studentů na Fyzikální olympiádu, potažmo jiné fyzikální soutěže, ale také jako materiál pro práci s žáky se zvýšeným zájmem o fyziku i při přípravě pro řešitele FO organizované v jednotlivých krajích.

# Literatura

- [1] VERHOEFF, Tom. *The Role of Competitions in Education*, 2006. [online, cit. 14. 4. 2022]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/228714944\\_The\\_role\\_of\\_competitions\\_in\\_education](https://www.researchgate.net/publication/228714944_The_role_of_competitions_in_education).
- [2] PRÝMASOVÁ, Lenka; LUKAVSKÁ Eva. *Co přináší soutěž do života žáků?*, 2008. [online, cit. 14. 4. 2022]. Dostupné z: <https://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVN/2330/CO-PRINASI-SOUTEZ-DO-ZIVOTA-ZAKU.html>.
- [3] ČÁP, Ivo. *PROPAGÁCIA PRÍRODNÝCH VIED PROSTREDNÍCTVOM TALENTOVÝCH SÚŤAŽÍ*. Možnosti motivace mládeže ke studiu přírodních věd. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2008. [online, cit. 15. 4. 2021]. Dostupné z: <https://www.ndk.cz/periodical/uuid:17411d00-4f2c-11ea-9703-5ef3fc9bb22f>.
- [4] FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA. *Co je Fyzikální olympiáda*. [online, cit. 5. 7. 2022]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/co-je-fo>.
- [5] VOLF, Ivo. *PADESÁT LET FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY - PŮL STOLETÍ PÉČE O FYZIKÁLNÍ TALENTY*. 50 LET FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY PADESÁT LET PÉČE O TALENTY. Hradec Králové, MAFY, 2009.
- [6] VYBÍRAL, Bohumil. *OHLÉDNUTÍ ZA PADESÁTI LETY FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY*. Možnosti motivace mládeže ke studiu přírodních věd. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2008. [online, cit. 6. 7. 2022]. Dostupné z: <https://www.ndk.cz/periodical/uuid:17411d00-4f2c-11ea-9703-5ef3fc9bb22f>.
- [7] VOLF, Ivo, KLUHAVEC, Daniel. *Čtyřicet let fyzikální olympiády*. [online, cit. 29. 8. 2022]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/40letFO.pdf>.
- [8] VOLF, Ivo. Padesát let práce se zájemci o fyziku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 2009. [online, cit. 6. 7. 2022]. Dostupné z: [https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146327/Rozhledy\\_084-2009-4\\_6.pdf](https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146327/Rozhledy_084-2009-4_6.pdf).
- [9] POLMA, Richard. *Geneze účastníka IPhO 1967-2017*. Dizertační práce. Hradec Králové, Univerzita Hradec Králové, 2018.
- [10] ASTRONOMICKÁ OLYMPIÁDA. *Co je Astronomická olympiáda?*. [online, cit. 16. 4. 2022]. Dostupné z: [https://olympiada.astro.cz/co\\_je\\_ao.html](https://olympiada.astro.cz/co_je_ao.html).
- [11] FYKOS. *Co je to FYKOS?*. [online, cit. 17. 4. 2022]. Dostupné z: <https://fykos.cz/o-nas/co-je-fykos>.

- [12] VÝFUK. *Kdo jsme a co děláme aneb krátká historie Výfuku*. [online, cit 17. 4. 2022]. Dostupné z: [https://vyfuk.mff.cuni.cz/o\\_vyfuku/historie](https://vyfuk.mff.cuni.cz/o_vyfuku/historie).
- [13] FERMIHO ÚLOHY. *Fermiho problémy - základní informace*. [online, cit 18. 4. 2022]. Dostupné z: <http://isouteze.upol.cz/fermi/index.html>.
- [14] FYZIKLÁNÍ. *O čem je Fyziklání?*. [online, cit 19. 4. 2022]. Dostupné z: <https://fyziklani.cz/o-soutezi>.
- [15] FYZIKLÁNÍ. *Jak soutěž vznikla?*. [online, cit 19. 4. 2022]. Dostupné z: <https://fyziklani.cz/historyi>.
- [16] PANOŠ, Stanislav. *Pravidla soutěže Turnaj mladých fyziků*. [online, cit 20. 4. 2022]. Dostupné z: <https://tmf.fzu.cz/34/pdf/pravidla.pdf>.
- [17] KOKEŠOVÁ, Magdaléna. *VYHODNOCENÍ DOTAZNÍKOVÉHO ŠETŘENÍ ABSOLVENTŮ MFF UK*. Praha, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2021. [online, cit. 29. 8. 2022]. Dostupné z: <https://www.mff.cuni.cz/cs/fakulta/dotaznikova-setreni>.
- [18] ZATOČILOVÁ, Iveta. *Matfyz je i pro holky. Tak proč jich máme pořád málo?*. [online, cit. 29. 8. 2022]. Dostupné z: <https://www.matfyz.cz/clanky/matfyz-je-i-pro-holky-tak-proc-jich-mame-porad-malo>.
- [19] DEW, Matthew, et al. Gendered performances in introductory physics: A study from a large land-grant university. *Physical review Physics education research*, 2021, **17**(2), 010106. [online, cit. 30. 8. 2022]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/349170550\\_Gendered\\_performance\\_differences\\_in\\_introductory\\_physics\\_A\\_study\\_from\\_a\\_large\\_land-grant\\_university](https://www.researchgate.net/publication/349170550_Gendered_performance_differences_in_introductory_physics_A_study_from_a_large_land-grant_university).
- [20] WILSON, Kate, et al. Differences in gender performance on competitive physics selection tests. *Physical review Physics education research*, 2016, **12**(2), 020111. [online, cit. 30. 8. 2022]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/305789867\\_Differences\\_in\\_gender\\_performance\\_on\\_competitive\\_physics\\_selection\\_tests](https://www.researchgate.net/publication/305789867_Differences_in_gender_performance_on_competitive_physics_selection_tests).
- [21] HALPERN, C.P, et al. Science of Sex Differences in Science and Mathematics. *Psychological Science in the Public Interest*, 2007, **8**(1). [online, cit. 30. 8. 2022]. Dostupné z: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1111/j.1529-1006.2007.00032.x>.
- [22] FÁROVÁ, Nina. *Jak se žije ženám ve fyzice*. [online, cit. 30. 8. 2022] Dostupné z: <https://genderaveda.cz/zeny-ve-fyzice/>.
- [23] GELETIČ, Jan; HLADIŠ, Libor, ŠIMÁČEK, Petr. *GIS PRO GEOGRAFY*. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2019. [online, cit. 10. 4. 2022]. Dostupné z: [https://geography.upol.cz/soubory/studium/opory/D\\_GIS.pdf](https://geography.upol.cz/soubory/studium/opory/D_GIS.pdf).
- [24] SMUTNÝ, Jaroslav. *GEOGRAFICKÉ INFORMAČNÍ SYSTÉMY*. Brno, Vysoké učení technické v Brně. [online, cit. 10. 4. 2022]. Dostupné z: <http://lences.cz/domains/lences.cz/skola/subory/Skripta/CN02-Geograficke%20informacni%20systemy/M01-Geografick%C3%A9%20informa%C4%8Dn%C3%AD%20syst%C3%A9my.pdf>.

- [25] JAROŠ, Jakub; LYSÁK, Jakub *KARTOGRAM*. [online, cit. 11. 4. 2022]. Dostupné z: <https://www.natur.cuni.cz/geografie/geoinformatika-kartografie/ke-stazeni/projekty/moderni-geoinformacni-metody-ve-vyuce-gis-a-kartografie/kartogram/>.
- [26] ČERBA, Otakar. *Kartodiagramy*. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni, 2004. [online, cit. 12. 4. 2022]. Dostupné z: <http://geomatika.kma.zcu.cz/studium/tka/Slides/kartodiagramy.pdf>.
- [27] MICHALCOVÁ, Jana. *Analýza vlastností souboru úloh vybraných ročníků Fyzikální olympiády*. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, 2020.
- [28] CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu*. Praha, Grada Publishing, a.s., 2006.
- [29] DING, Lin, et al. Evaluating an electricity and magnetism assessment tool: Brief electricity and magnetism assessment *Physical review special Topics-Physics education research*, 2006, **2**(1), 010105. Dostupné z: <https://journals.aps.org/prper/abstract/10.1103/PhysRevSTPER.2.010105>.
- [30] VAFKOVÁ, Lada. *Položková analýza v systému STATISTICA*. Bakalářská práce. Brno, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2015. [online, cit. 10. 7. 2022]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/t350m/Plny\\_text\\_BP.pdf](https://is.muni.cz/th/t350m/Plny_text_BP.pdf).
- [31] CSÚ. *Český statistický úřad: Školy a školská zařízení za školní rok 2020/2021*. [online, cit. 2. 8. 2022]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/srovnani-kraju-v-ceske-republice-2019>.
- [32] BLAŽEK, Radek; PŘÍHODOVÁ, Silvie. *Mezinárodní šetření PISA 2015*. Praha, 2016. [online, cit. 2. 8. 2022]. Dostupné z: <https://www.csicr.cz/cz/Dokumenty/Publikace-a-ostatni-vystupy/Narodni-zprava-PISA-2015>.
- [33] PROKOP, Daniel. *Slepé skvrny: O chudobě, vzdělávání, populismu a dalších výzvách české společnosti*. Host, 2019. ISBN: 978-80-7577-991-5.
- [34] MŠMT. *Ministerstvo zjišťovalo stav učitelů v regionálním školství*. [online, cit. 2. 8. 2022]. Dostupné z: <https://www.msmt.cz/ministerstvo/novinar/ministerstvo-zjistovalo-stav-ucitelu-v-regionalnim-skolstvi>.
- [35] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy I*. Praha, Prometheus, 1997.
- [36] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy II*. Praha, Prometheus, 1997.
- [37] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy III*. Praha, Prometheus, 1998.
- [38] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy IV*. Praha, Prometheus, 2000.