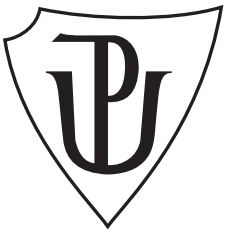
Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra optiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vlastnosti prostoročasu v okolí kosmické struny



Vypracoval:	**Miroslav Mlynář**
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	Obecná fyzika a matematická fyzika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	květen 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 15. května 2012

.....

Miroslav Mlynář

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Miroslav Mlynář
Název práce	Vlastnosti prostoročasu v okolí kosmické struny
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra optiky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2012
Abstrakt	Bakalářská práce přehledně popisuje vlastnosti prostoročasu v okolí kosmické struny a pomocí počítačových modelů ukazuje vliv tzv. kónické singularity na pohyb částic a světelných paprsků v okolí kosmické struny.
Klíčová slova	kosmická struna, obecná teorie relativity
Počet stran	34
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Miroslav Mlynář
Title	Properties of the cosmic strings spacetime
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Optics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2012
Abstract	Bachelor thesis neatly describes the properties of spacetime around a cosmic string and using computer models it show the effect of the conical singlarity on the motion of particles and light rays around cosmic string.
Keywords	cosmic string, general theory of relativity
Number of pages	34
Number of appendices	0
Language	czech

Obsah

Úvod **6**

1 Einsteinovy rovnice a jejich řešení v případě kosmické struny **7**
1.1 Einsteinovy rovnice gravitačního pole 7
1.2 Einsteinovy rovnice v případě kosmické struny 9

2 Pohyb volných částic a světelných paprsků v okolí kosmické struny **17**
2.1 Volná částice a světelný paprsek v okolí gravitujícího tělesa 17
2.2 Pohyb v okolí kosmické struny 18

3 Detekce kosmických strun **22**
3.1 Úhly mezi paprsky 22
3.2 Časové zpoždění fotonů 23
3.3 Dopplerův efekt 24
3.4 Stanovení horní a dolní meze pro deficitní úhel 26

4 Počítačové modely **27**
4.1 Pohyb fotonu v okolí kosmické struny 27
4.2 Kosmická struna jako gravitační čočka 27

Závěr **32**

Literatura **33**

Úvod

Kosmická struna je topologický defekt, jehož vznik je předpokládán jako důsledek fázového přechodu vakua spojeneného s narušením kalibrační symetrie v raných fázích vývoje vesmíru. Jedná se o velice tenkou a hustou trubici přibližně průměru protonu [19].

Pokusy sladit teorii velkého sjednocení s obecně relativistickými modely raného vesmíru předpovídají existenci minimálně dvou typů kosmických strun. První typ vzniká při oddělení silné jaderné od elektroslabé síly. Průměr této struny se odhaduje na 10^{-28} cm a její lineární hustota řádově na 10^{22} g/cm. Druhý typ vzniká při oddělení slabé a elektromagnetické síly. S průměrem okolo 10^{-15} cm a lineární hustotou řádově 10^{4} g/cm [5].

V této práci se zabýváme kosmickými strunami z pohledu obecné teorie relativity. Studovaný prostoročas je model zajímavý i z didaktického hlediska. Díky své jednoduchosti umožňuje seznámení se základy obecné teorie relativity a má i zajímavé vazby na astrofyzikální a kosmologická pozorování. Bylo by dobré zařadit danou problematiku do výuky na VŠ (např. do předmětu KEF/UOTR na PřF UP). Z tohoto důvodu jsou v textu přehledně shrnuty i základní vztahy obecné teorie relativity.

Celá práce je rozdělena na čtyři oddíly. První část pojednává o řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole okolo tzv. kosmické struny a odvození metrického tenzoru. Druhá část se týká odvození rovnic pro pohyb částic a světelných paprsků v okolí této struny. Třetí část obsahuje přehled základních vlastností získané metriky a možnosti pozorování kosmických strun v praxi. Čtvrtá část ukazuje jednoduchý počítačový model ilustrující vliv tzv. kónické singularity na pohyb částic a světelných paprsků v jejím okolí.

Obrázky použité v textu jsou vytvořeny v programu Macromedia Flash MX 2004. Pro modelování pohybu částic a světelných paprsků v okolí kosmické struny byl použit program Wolfram Mathematica 6. Text byl vysázen typografickým softwarem LaTeX.

V literatuře můžeme najít různé konvence pro značení indexů. V práci je použita konvence podle [6]. Malými latinskými písmeny v indexu jsou značeny prostoročasové souřadnice. Malými písmeny řecké abecedy jsou naproti tomu značeny pouze prostorové souřadnice. V textu nevypisujeme znamení sumy, namísto toho je použito Einsteinovo sumační pravidlo. Opakování indexů bude tedy znamenat součet přes všechny jeho hodnoty.

V závěru úvodu bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph.D. za jeho rady, připomínky, návrhy a čas, který mi věnoval při řešení dané problematiky.

Kapitola 1

Einsteinovy rovnice a jejich řešení v případě kosmické struny

Gravitační působení je obecnou teorií relativity interpretováno jako jako zakřivení prostoročasu. V první kapitole shrnujeme základní vlastnosti Einsteinovy rovnice gravitačního pole a jejich aplikaci na tzv. kosmickou strunu. Nalezneme tvar metriky kosmické struny ve válcových souřadnicích a dokážeme, že prostoročas v okolí tohoto objektu je plochý, avšak odlišný od Minkowského prostoročasu speciální teorie relativity.

1.1 Einsteinovy rovnice gravitačního pole

Základní rovnice obecné teorie relativity s kterými budeme v této kapitole pracovat, formuloval v roce 1915 Albert Einstein. Jejich tvar je [3]

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \varkappa T_{ij}. \tag{1.1}$$

Rovnice (1.1) vyjadřují závislost mezi objektem na levé straně popisujícím geometrické vlastnosti prostoročasu a objektem na pravé straně popisujícím rozložení a toky energie a hybnosti v dané fyzikální soustavě. Rovnice splňují princip obecné kovariance, tj. tvar rovnic se při přechodu do jiné souřadnicové soustavy nemění. Obecně se jedná o soustavu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Nelinearita těchto rovnic velmi komplikuje jejich řešení [3].

První člen rovnice (1.1) tj. R_{ij}, nazýváme Ricciho tenzor. Vzniká úžením Riemannova tenzoru křivosti [6], tedy

$$R_{ij} = R^k_{ikj} = \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{l,k} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{lj}. \tag{1.2}$$

Symbolem $_{,k}$ označujeme, jak je zvykem, parciální derivaci podle k-té souřadnice.

Riemannův tenzor křivosti souvisí s paralelním přenosem vektorů v prostoročase (viz. [3]) a umožňuje nám jednoznačně rozhodnout, zda je, či není prostoročas zakřiven nezávisle na volbě souřadnicové soustavy [6]. Prostoročas, kde v každém bodě je splněna podmínka

$$R^l_{ikj} = \Gamma^l_{ij,k} - \Gamma^l_{ik,j} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj} = 0, \tag{1.3}$$

nazýváme globálně plochý. Jinými slovy v tomto prostoročase lze zavést globální kartézskou soustavu souřadnic.

Objekty Γ^k_{ij} z rovnice (1.2) jsou tzv. Christoffelovy symboly. Tento pojem souvisí s potřebou nezávislosti parciálních derivací vektorových a tenzorových polí na volbě

souřadnicové soustavy (viz [17]). Lze dokázat, že se obecně nejedná o tenzorové vektory (viz např. [2]). K výpočtu jednotlivých komponent nám poslouží vztah [2]

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}(g_{li,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}). \tag{1.4}$$

Christoffelovy symboly mají obecně 64 komponent. Jsou však symetrické v dolních indexech

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, \tag{1.5}$$

což redukuje počet nezávislých složek na 40. Za tuto vlastnost vděčíme lokální plochosti prostoročasu. Umožňuje nám v infinitezimálním okolí každého bodu prostoročasu zavést inerciální vztažnou soustavu, ve které platí stejné fyzikální zákony jako ve speciální teorii relativity [3].

Výrazy g_{ij} z rovnice (1.4) nazýváme kovariantními složkami metrického tenzoru. Funkce g_{ij} musí být spojité a mít spojité parciální derivace do druhého řádu včetně a to podle všech proměnných (souřadnic). Tento tenzor je úzce provázán s metrikou prostoročasu, která určuje prostoročasový interval, platí

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j; \tag{1.6}$$

výrazy x^i jsou tzv. prostoročasové souřadnice.

Pro pohyb částice s nenulovou klidovou hmotností jsou patrně fyzikálně relevantní pouze prostoročasové intervaly $\mathrm{d}s^2 < 0$. Nebo-li je nutné, aby časová složka metriky byla dominantní. Těmto intervalům říkáme časupodobné. Pro částice s nulovou klidovou hmotností, tedy např. pro fotony, je $\mathrm{d}s^2 = 0$.

Metrický tenzor nám udává, jak pomocí změn souřadnic měřit skutečné vzdálenosti v prostoročase [17]. Lze dokázat, že metrický tenzor je symetrický [6]. Pro takovéto tenzory platí

$$g_{ij} = g_{ji}. \tag{1.7}$$

A tato vlastnost se dále přenáší i na další objekty. Díky symetrii má metrický tenzor (a všechny ostatní tenzory v rovnici (1.1)) deset nezávislých složek. Počet nezávislých rovnic, které rovnice (1.1) zastupuje, je však šest, protože čtyři rovnice odrážejí volbu souřadnic.

Členy g^{ij} z rovnice (1.4) jsou kontravariantní složky metrického tenzoru. Mezi kontravariantními a kovariantními složkami platí vztah

$$g^{ij}g_{ik} = \delta^j_k. \tag{1.8}$$

Jelikož je gravitační pole v obecné teorii relativity popisováno geometrií prostoročasu, hrají kovariantní složky metrického tenzoru roli potenciálů gravitačního pole. Podle rovnice (1.4) obsahují definice Christoffelových symbolů první parciální derivace metrického tenzoru podle souřadnic. Z fyzikálního hlediska mají tedy Christoffelovy symboly význam „intenzit gravitačního pole“. Druhá parciální derivace metrického tenzoru podle souřadnic v rovnici (1.2) určuje význam Riemannova tenzoru křivosti, jednotlivé složky odpovídají slapovým silám gravitačního pole [3].

Členy T_{ij} v rovnici (1.1) jsou kovariantními složkami tenzoru energie a hybnosti. Mezi kovariantními a kontravariantními složkami tenzoru energie a hybnosti platí vztah

$$T_{ij} = g_{ik}g_{jl}T^{kl}. \tag{1.9}$$

Význam složek tenzoru T^{ij}, již jsou obecně funkcemi souřadnic a času, je patrný z maticového zápisu

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} c^2\rho & c\boldsymbol{\sigma} \\ c\boldsymbol{\sigma} & \tau_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je hustota hybnosti a $\tau_{\alpha\beta}$ je tenzor napětí. Výraz $c\boldsymbol{\sigma}$ je hustota hybnosti dělená rychlostí světla c a $c^2\rho$ je hustota energie [7].

Zbylé parametry v rovnici (1.1) jsou konstanty. Konstanta R je invariant Ricciho tenzoru. Vzniká jeho úžením a nazýváme jej skalární křivost

$$R = g^{ij}R_{ij}. \tag{1.11}$$

Konstantu $\varkappa$ určíme z řešení limitního případu Einsteinových rovnic gravitačního pole (někdy též označovaného jako Newtonovská limita). Její hodnota je [6]

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{1.12}$$

kde $G = (6{,}67259 \pm 0{,}00085)\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$ je gravitační konstanta a $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ je rychlost světla ve vakuu [10]. Parametr Λ označujeme jako kosmologickou konstantu. Podle současných odhadů je její velikost obdivuhodně malá $\Lambda \leq 10^{-52}\,\mathrm{m}^{-2}$ [7]. Zaveďme pro jednoduchost geometrodynamickou soustavu jednotek, položme konstanty G a c v rovnici (1.12), jak je zvykem, rovny jedné.

1.2 Einsteinovy rovnice v případě kosmické struny

Uvažujme nekonečně dlouhou kosmickou strunu o hustotě ρ. Předpokládejme rovnoměrné rozložení hmotnosti. Pro jednoduchost vezměme případ, kdy se kosmická struna nepohybuje a nedeformuje.

Zaveďme vztažnou soustavu spojenou s kosmickou strunou. Vzhledem k symetrii problému bude výhodné volit válcovou souřadnicovou soustavu. Osu z orientujme podél struny. Podoba metriky pro kosmickou strunu má v polárních souřadnicích tvar [11]

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{c}^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + b^2(r)\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{1.13}$$

Pro tenzor energie a hybnosti kosmické struny volíme tvar [7]

$$T^{ij} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Člen $b^2(r)$ z rovnice (1.13) určíme pomocí Einsteinových rovnic gravitačního pole.

Postup hledání členu $b^2(r)$ je zřejmý. Ze znalosti (1.13) vypočteme Christoffelovy symboly podle (1.4), z nich pak sestavíme Ricciho tenzor (1.2), následně úžením Ricciho tenzoru dostaneme skalární křivost (1.11), tenzor energie a hybnosti upravíme s využitím (1.9), nakonec sestavíme a vyřešíme rovnici (1.1) a dostaneme tak člen $b(r)$.

Vně kosmické struny je tenzor energie a hybnosti roven nulovému tenzoru. Pravá strana rovnice (1.1) bude nulová. Dostáváme tak dvě řešení, které bude nutné spojit dohromady.

Nyní se zaměřme na vnitřní řešení. Kovariantní složky metrického tenzoru nabývají z (1.13), v dalším textu pro jednoduchost položme c rovno jedné, jak je obvyklé, a z (1.6) podoby

$$g_{ii} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} -1 & 1 & b^2(r) & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Při výpočtu Christoffelových symbolů (1.4), je potřeba znát i kontravariantní složky metrického tenzoru. S využitím vztahu (1.8) a tvaru maticového zápisu kovariantního metrického tenzoru (tj. má tvar diagonální matice), vidíme

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}. \tag{1.16}$$

konkrétně

$$g^{ii} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{b^2(r)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

S využitím (1.15) a (1.17) vyjádřeme Christoffelovy symboly podle (1.4).

Všechny složky metrického tenzoru obsahující v dolním indexu souřadnici t jsou konstantní. Jejich derivace podle ostatních souřadnic jsou rovny nule. Derivace složek g_{ij} podle souřadnice t jsou rovny nule, protože žádná ze složek g_{ij} není funkcí souřadnice t

$$\Gamma^t_{ij} = \frac{1}{2} g^{tt}(g_{ti,j} + g_{jt,i} - g_{ij,t}) = 0. \tag{1.18}$$

Z obdobného důvodu je

$$\Gamma^z_{ij} = \frac{1}{2} g^{zz}(g_{zi,j} + g_{jz,i} - g_{ij,z}) = 0. \tag{1.19}$$

Složky metrického tenzoru obsahující v dolním indexu souřadnici r jsou konstantní. Jejich derivace podle ostatních souřadnic jsou rovny nule. Ovšem složka $g_{\phi\phi}$ je funkcí souřadnice r

$$\Gamma^r_{ij} = \frac{1}{2} g^{rr}(g_{ri,j} + g_{jr,i} - g_{ij,r}).$$

Po dosazení

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} g_{\phi\phi,r} = -b(r)\frac{\mathrm{d}b(r)}{\mathrm{d}r}. \tag{1.20}$$

Derivace složek g_{ij} podle souřadnice ϕ jsou rovny nule, protože žádná ze složek g_{ij} není funkcí souřadnice ϕ. Nicméně komponenta metrického tenzoru $g_{\phi\phi}$ je funkcí souřadnice r

$$\Gamma^\phi_{ij} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi}(g_{\phi i,j} + g_{j\phi,i} - g_{ij,\phi}).$$

Po dosazení

$$\Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,r} = \frac{\mathrm{d}b(r)}{b(r)\mathrm{d}r}. \tag{1.21}$$

Zároveň podle rovnice (1.5)

$$\Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{\mathrm{d}b(r)}{b(r)\mathrm{d}r}. \tag{1.22}$$

Použijme výraz (1.2) a sestavme Ricciho tenzor. Všimněme si, že Christoffelovy symboly v žádném z indexů neobsahují souřadnice t a z. Komponenty Ricciho tenzoru s těmito souřadnicemi v indexech jsou rovny nule. Takže z původních šestnácti komponent zbývají čtyři. A jelikož je Ricciho tenzor tenzorem symetrickým (v našem případě $R_{r\phi} = R_{\phi r}$), stačí vypočíst jen tři komponenty. Konkrétně R_{rr}, $R_{r\phi}$ a $R_{\phi\phi}$. Pro názornost budeme dělit výrazy na více částí. V textu budou uvozeny do závorek s indexem.

Pro začátek si zvolme komponentu R_{rr} a vypočtěme ji z (1.2)

$$R_{rr} = \Gamma^k_{rr,k} - \Gamma^k_{rk,r} + \Gamma^k_{rr}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^l_{rk}\Gamma^k_{rl}.$$

Protože

$$\Gamma^k_{rr} = 0, \tag{1.23}$$

je

$$R_{rr} = -\Gamma^k_{rk,r} - \Gamma^l_{rk}\Gamma^k_{rl}.$$

Nastavme $k = r$, zbylý index l probíhá souřadnicemi r a ϕ

$$(R_{rr})_1 = -\Gamma^r_{rr,r} - \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{rr} - \Gamma^\phi_{rr}\Gamma^r_{r\phi}.$$

S využitím (1.23)

$$(R_{rr})_1 = 0. \tag{1.24}$$

Nyní nastavme $k = \phi$, zbylý index l probíhá souřadnicemi r a ϕ

$$(R_{rr})_2 = -\Gamma^\phi_{r\phi,r} - \Gamma^r_{r\phi}\Gamma^\phi_{rr} - \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^\phi_{r\phi}.$$

Znovu využijme (1.23)

$$(R_{rr})_2 = -\Gamma^\phi_{r\phi,r} - (\Gamma^\phi_{r\phi})^2 \tag{1.25}$$

Spojme rovnice (1.24) a (1.25) dohromady

$$R_{rr} = (R_{rr})_1 + (R_{rr})_2 = -\Gamma^\phi_{r\phi,r} - (\Gamma^\phi_{r\phi})^2 \tag{1.26}$$

Dále se blíže podívejme na komponentu $R_{\phi\phi}$, podle (1.2)

$$R_{\phi\phi} = \Gamma^k_{\phi\phi,k} - \Gamma^k_{\phi k,\phi} + \Gamma^k_{\phi\phi}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^l_{\phi k}\Gamma^k_{\phi l}.$$

Christoffelovy symboly

$$\Gamma^k_{\phi k,\phi} = 0,$$

pak

$$R_{\phi\phi} = \Gamma^k_{\phi\phi,k} + \Gamma^k_{\phi\phi}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^l_{\phi k}\Gamma^k_{\phi l}.$$

Volme pevný index $k = r$, index l nabývá hodnot r a ϕ

$$(R_{\phi\phi})_1 = \Gamma^r_{\phi\phi,r} + \Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^r_{rr} - \Gamma^r_{\phi r}\Gamma^r_{\phi r} + \Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{r\phi} - \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\phi\phi}.$$

S využitím (1.23),

$$\Gamma^r_{\phi r} = 0,$$

a s vědomým, že se poslední dva členy odečtou,

$$(R_{\phi\phi})_1 = \Gamma^r_{\phi\phi,r}. \tag{1.27}$$

Zbývá volit pevný index $k = \phi$, index l nabývá hodnot r a ϕ

$$(R_{\phi\phi})_2 = \Gamma^\phi_{\phi\phi,\phi} + \Gamma^\phi_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi\phi} - \Gamma^\phi_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi\phi}\Gamma^r_{\phi r} - \Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi r}.$$

Člen

$$\Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0, \tag{1.28}$$

tedy

$$(R_{\phi\phi})_2 = -\Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi r}. \tag{1.29}$$

Spojme rovnice (1.27) a (1.29) dohromady

$$R_{\phi\phi} = (R_{\phi\phi})_1 + (R_{\phi\phi})_2 = \Gamma^r_{\phi\phi,r} - \Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi r}. \tag{1.30}$$

Zbývá poslední komponenta $R_{r\phi}$, která je podle (1.2) rovna

$$R_{r\phi} = \Gamma^k_{r\phi,k} - \Gamma^k_{rk,\phi} + \Gamma^k_{r\phi}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^l_{rk}\Gamma^k_{\phi l}. \tag{1.31}$$

Část

$$\Gamma^k_{rk,\phi} = 0. \tag{1.32}$$

Aplikací rovnice (1.32) na (1.31) dostáváme

$$R_{r\phi} = \Gamma^k_{r\phi,k} + \Gamma^k_{r\phi}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^l_{rk}\Gamma^k_{\phi l}.$$

Nastavme $k = r$, zbylý index l probíhá souřadnicemi r a ϕ

$$(R_{r\phi})_1 = \Gamma^r_{r\phi,r} + \Gamma^r_{r\phi}\Gamma^r_{rr} - \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\phi r} + \Gamma^r_{r\phi}\Gamma^\phi_{r\phi} - \Gamma^\phi_{rr} - \Gamma^r_{\phi\phi}. \tag{1.33}$$

Využijme (1.23) a

$$\Gamma^r_{r\phi} = 0$$

Výraz (1.33) se pak velmi zjednoduší a to na

$$(R_{r\phi})_1 = 0. \tag{1.34}$$

Navolme pevný index $k = \phi$, index l nabývá hodnot r a ϕ

$$(R_{r\phi})_2 = \Gamma^\phi_{r\phi,\phi} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^\phi_{\phi\phi} - \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^\phi_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^r_{\phi r} - \Gamma^r_{r\phi}\Gamma^\phi_{\phi r}.$$

Využijme (1.28) a (1.32), poslední dva členy se odečtou

$$(R_{r\phi})_2 = 0. \tag{1.35}$$

Sloučením (1.34) a (1.35)

$$R_{r\phi} = (R_{r\phi})_1 + (R_{r\phi})_2 = 0.$$

Do rovnic (1.26) a (1.30) dosaďme (1.20) a (1.21)

$$R_{rr} = -\frac{\mathrm{d}^2 b(r)}{b(r)\mathrm{d}r^2}, \tag{1.36}$$

a

$$R_{\phi\phi} = -\frac{b(r)\mathrm{d}^2 b(r)}{\mathrm{d}r^2}. \tag{1.37}$$

Dalším krokem v řešení Einsteinových rovnic je vypočítat skalární křivost z rovnice (1.11), s užitím vztahu (1.16)

$$R = g^{ii}R_{ii} = \frac{R_{ii}}{g_{ii}},$$

po dosazení (1.36) a (1.37)

$$R = -2\frac{\mathrm{d}^2 b(r)}{b(r)\mathrm{d}r^2}. \tag{1.38}$$

Kontravariantní složky tenzoru energie a hybnosti (1.14) je potřeba upravit na kovariantní složky vtahem (1.9). Výpočet se zjednoduší, když si uvědomíme, že složky tenzoru energie a hybnosti tvoří diagonální matici

$$T_{ij} = g_{ik}g_{jl}T^{kl} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix}.$$

Známe všechny potřebné části a můžeme tak sestavit rovnice (1.1). V našem případě se nejedná o problém kosmologického charakteru, proto můžeme Λ položit rovno nule. Takto vzniklý objekt na levé straně rovnice (1.1) se nazývá Einsteinovým tenzorem

a označujeme ho G_{ij}. S využitím tvaru maticového zápisu metrického a Ricciho tenzoru dostáváme

$$G_{ii} = R_{ii} - \frac{1}{2} g_{ii} R = 8\pi T_{ii}.$$

Konkrétně pro náš případ

$$G_{tt} = R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} R = 8\pi T_{tt}.$$

Člen R_{tt} je roven nule, pak

$$-\frac{\mathrm{d}^2 b(r)}{b(r)\mathrm{d}r^2} = 8\pi\rho. \tag{1.39}$$

Dále

$$G_{rr} = R_{rr} - \frac{1}{2} g_{rr} R = 8\pi T_{rr}.$$

Členy R_{rr} a $R\, g_{rr}/2$ jsou si rovny. Pravá strana rovnice je nulová. Složka Einsteinova tenzoru G_{rr} má triviální řešení. Z obdobného důvodu má triviální řešení i složka $G_{\phi\phi}$. Zbývá komponenta G_{zz}

$$G_{zz} = R_{zz} - \frac{1}{2} g_{zz} R = 8\pi T_{zz}.$$

Složka R_{zz} je rovna nule, tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 b(r)}{b(r)\mathrm{d}r^2} = -8\pi\rho. \tag{1.40}$$

Vidíme, že rovnice (1.39) a (1.40) jsou stejné. Potřeba nalezení neznámé funkce $b(r)$ nás přivedla k řešení jedné obyčejné lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}^2 b(r)}{\mathrm{d}r^2} + 8\pi\rho b(r) = 0. \tag{1.41}$$

Postup řešení těchto typů rovnic najdeme např. v [13]. Prvním krokem je sestavení charakteristického polynomu pro rovnici (1.41), druhým je nalezení kořenů tohoto polynomu, třetím je sestavení odpovídajícího řešení a čtvrtým krokem je aplikace okrajových podmínek a přepis řešení rovnice (1.41) do finálního tvaru.

Charakteristický polynom je ve tvaru

$$\alpha^2 + 8\pi\rho = 0.$$

Kořeny tohoto polynomu jsou komplexní

$$\alpha_{1,2} = \pm 2i\sqrt{2\pi\rho},$$

řešení rovnice (1.41) je ve tvaru

$$b(r) = C_1 \cos\left(2r\sqrt{2\pi\rho}\right) + C_2 \sin\left(2r\sqrt{2\pi\rho}\right). \tag{1.42}$$

Pro přehlednější zápis volme substituci

$$\lambda = 2\sqrt{2\pi\rho}. \tag{1.43}$$

Gravitační působení je v našem případě buzeno hmotou uzavřenou v objemu nekonečně dlouhého válce a poloměru r, kde $r \in \langle 0, r_0 \rangle$. Výraz r_0 udává vzdálenost od středu

kosmické struny po její hranici. Se zmenšujícím se λ dochází k vymizení gravitačního působení. V jazyce obecné teorie relativity to znamená, že prostoročas bez přítomnosti kosmické struny se stává Minkowského plochým prostoročasem. Matematicky se daná skutečnost dá vyjádřit následovně [11]

$$\lim_{\lambda \to 0} b(r) = r. \tag{1.44}$$

Podmínku (1.44) využijeme k nalezení konstant C_1 a C_2. Dosadmě ji do (1.42)

$$\lim_{\lambda \to 0} b(r) = \lim_{\lambda \to 0} C_1 \cos \lambda r + \lim_{\lambda \to 0} C_2 \sin \lambda r = r. \tag{1.45}$$

Rozveďme funkce $\cos \lambda r$ a $\sin \lambda r$ v Taylorovu řadu do prvního řádu, příspěvky vyšších řádů zanedbejme

$$\cos \lambda r \approx 1, \tag{1.46a}$$
$$\sin \lambda r \approx \lambda r. \tag{1.46b}$$

Dosaďme (1.46a) a (1.46b) do (1.45)

$$\lim_{\lambda \to 0} b(r) = C_1 + C_2 \lambda r = r.$$

Volme $C_1 = 0$, pak

$$C_2 = \frac{1}{\lambda}.$$

Tímto jsme stanovili integrační konstanty pro (1.42). Řešení uvnitř struny tak nabývá tvaru

$$b(r) = \frac{\sin \lambda r}{\lambda}. \tag{1.47}$$

Jak už jsme zmínili, rovnice (1.41) platí pouze pro vnitřek kosmické struny kde $\rho = \rho_0$. Vně kosmické struny je $\rho = 0$. Výraz (1.41) se tak zjednoduší na

$$\frac{\mathrm{d}^2 b(r)}{\mathrm{d}r^2} = 0.$$

Po dvojí integraci vychází

$$b(r) = C_3 r + C_4. \tag{1.48}$$

Máme dvě řešení pro dvě oblasti prostoročasu. Označme si je indexy. Pro případ $0 \leq r \leq r_0$ volme index $_1$, pro případ $r_0 \leq r \leq \infty$ volme index $_2$. Oblast $r = r_0$ je místem, kde řešení plynule přechází jedno v druhé, tj. jsou v tomto bodě spojitá. Spojitost funkcí je dána rovností funkčních hodnot a hodnot prvních derivací funkcí v daném bodě. Vyjádřeno matematicky

$$b(r_0)_1 = b(r_0)_2 \tag{1.49a}$$
$$\frac{\mathrm{d}b(r_0)_1}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}b(r_0)_2}{\mathrm{d}r} \tag{1.49b}$$

Do (1.49a) a (1.49b) dosadíme (1.47), (1.48) a jejich derivace

$$\frac{\sin \lambda r_0}{\lambda} = C_3 r_0 + C_4, \tag{1.50a}$$
$$\cos \lambda r_0 = C_3. \tag{1.50b}$$

Hodnotu (1.50b) dosaďme do (1.50a) a vyjádřeme zbylou konstantu C_4, tedy

$$C_4 = \frac{\sin \lambda r_0}{\lambda} - r_0 \cos \lambda r_0. \tag{1.51}$$

Pro popis pohybu volné částice a světelného paprsku v okolí kosmické struny nás nadále bude zajímat jen řešení vně kosmické struny. Dosaďme (1.50b) a (1.51) do (1.48), po úpravě

$$b(r) = (r - r_0) \cos \lambda r_0 + \frac{\sin \lambda r_0}{\lambda}. \tag{1.52}$$

Se zvětšujícím se r, budou příspěvky od členů s r_0 stále zanedbatelnější. Pro nás bude zajímavější situace, kdy $r \to r_0$. V tomto případě je nutné brát příspěvky s r_0 v potaz. Rozveďme funkce $\cos \lambda r_0$ a $\sin \lambda r_0$ v Taylorovu řadu do druhého řádu (nižší řád by vedl k Minkowského prostoročasu), příspěvky vyšších řádů zanedbejme

$$\cos \lambda r_0 \approx 1 + \frac{\lambda^2 r_0^2}{2}, \tag{1.53a}$$

$$\sin \lambda r_0 \approx \lambda r_0. \tag{1.53b}$$

Dosaďme (1.53a) a (1.53b) do (1.52), zanedbejme členy vyšších řádů, dosaďme za λ z (1.43) a upravme rovnici do tvaru

$$b(r) = r(1 - 4\pi\rho r_0^2), \tag{1.54}$$

nebo též

$$b(r) = r(1 - 4\mu),$$

kde

$$\mu = \pi\rho r_0^2. \tag{1.55}$$

Našli jsme hledaný tvar funkce $b(r)$

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(1 - 4\mu)^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{1.56}$$

Dosaďme (1.54) do rovnice pro metriku (1.13), při umocňování zanedbejme členy vyšších řádů

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(1 - 8\pi\rho r_0^2)\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Minkowského prostoročas získáváme jako zvláštní případ, při kterém člen $8\pi\rho r_0^2$ v závorce vypadává. Prostorová souřadnice ϕ se tedy v okolí kosmické struny liší oproti plnému úhlu 2π o tzv. deficitní úhel

$$\varepsilon = 8\pi\mu = 8\pi^2\rho r_0^2. \tag{1.57}$$

Díky rovnici (1.3) můžeme rozhodnout o tom, zda je, či není prostoročas v okolí kosmické struny globálně plochý. Při konstrukci Riemannova tenzoru křivosti využijme (1.18), (1.19), (1.20) a (1.21). Vidíme, že Riemannův tenzor křivosti má jedinou složku a tou je

$$R^r_{\phi r\phi} = \Gamma^r_{\phi\phi,r} - \Gamma^r_{\phi r,\phi} + \Gamma^m_{\phi\phi}\Gamma^r_{mr} - \Gamma^m_{\phi r}\Gamma^r_{m\phi}.$$

Christoffelův symbol $\Gamma^r_{\phi r}$ není funkcí souřadnice ϕ, jeho derivace podle této souřadnice je rovna nule. Člen Γ^r_{mr} je roven nule. Volný index m nabývá jediné možné hodnoty $m = \phi$. Složka Riemannova tenzoru křivosti má z výše uvedených důvodů podobu

$$R^r_{\phi r\phi} = \Gamma^r_{\phi\phi,r} - \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\phi\phi}. \tag{1.58}$$

Dosaďme rovnici (1.54) do (1.20) a (1.21)

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r(1 - 4\pi\rho_0 r_0^2), \tag{1.59a}$$

$$\Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}. \tag{1.59b}$$

Dosaďme (1.59a), jeho derivaci podle souřadnice r a (1.59b) do (1.58)

$$R^r_{\phi r\phi} = 0.$$

Stejný výsledek dostáváme i pro $b(r) = r(1-4\mu)$. Dokázali jsme, že prostoročas v okolí kosmické struny je globálně plochý.

V rovnici (1.56) fixujme souřadnici t a z. Pak tato rovnice reprezentuje dvourozměrnou plochu s chybějícím klínem deficitního úhlu. Pokud si představíme, že hrany klínu spojíme dohromady, tak plocha přejde v plášť kužele s kosmickou strunou ve vrcholu. Povrch kužele je plochý, vně struny jsou lokálně zachovány všechny zákony Eukleidovské geometrie. Vrchol je singulární bod, kde je křivost nekonečná. Lokální plochost prostoročasu v okolí kosmické struny znamená, že v její blízkosti nepůsobí gravitační síla. Částice v klidu umístěná do vzdálenosti např. 1 cm od struny jí nebude přitahována, třebaže kosmická struna může mít vysokou lineární hustotu, přepočtenu do soustavy jednotek SI vztahem [5]

$$\rho = \frac{c^2\mu}{G} = 10^{22}\mathrm{g/cm}. \tag{1.60}$$

Zaveďme novou souřadnici $\psi = (1-\varepsilon)\phi$, metrika (1.56) přechází na tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{c}^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\psi^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Což odpovídá plochému Minkowského prostoročasu. Úhlová souřadnice ψ nabývá hodnoty mezi 0 a $2\pi(1-\varepsilon)$, nikoli 0 a 2π, ve shodě s výše uvedenou transformací.

V závěru kapitoly uveďme, že kosmická struna popsaná metrikou (1.56) není fyzikálně jediný možný případ. Můžeme například uvažovat metriku, kde $(1-\varepsilon) > 1$. Pak bychom dostali kosmickou strunu nikoli s úhlovým deficitem, ale s úhlovým přebytkem [4].

Existence deficitního/přebytečného úhlu, představující topologický defekt, bývá v literatuře označována jako kónická singularita.

Kapitola 2

Pohyb volných částic a světelných paprsků v okolí kosmické struny

Problém nalezení trajektorií částic a světelných paprsků v zakřiveném prostoročase je možné řešit několika způsoby. V této kapitole je použito variačního principu a zákonů zachování.

2.1 Volná částice a světelný paprsek v okolí gravitujícího tělesa

Volnou částicí v klasické fyzice rozumíme takovou částici, na kterou nepůsobí žádné síly, tudíž ani gravitace. Namísto gravitační interakce pracuje obecná teorie relativity v případě volné částice se zakřiveným prostoročasem. Volnou částicí zde proto rozumíme takovou částici, jejíž pohyb je ovlivněn pouze gravitací.

Při vyšetřování pohybu volné částice v okolí gravitujícího tělesa využijeme variačního principu. Hledejme spojnici mezi dvěma událostmi v prostoročase a to takovou, která dává extrém funkcionálu akce

$$\delta S = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L} \mathrm{d}\tau = 0.$$

Parametr τ volme tak, aby byl invariantní. Tímto parametrem je vlastní čas částice, tj. čas měřený na ideálních hodinách spojených s pohybující se částicí [10].

Problém $\delta S = 0$ vede na Lagrangeovy rovnice 2. druhu, upravené pro obecnou teorii relativity

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\right)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0. \tag{2.1}$$

Funkce $\mathcal{L}$ z rovnice (2.1) má stejný význam, jako Lagrangeova funkce, tzv. lagranžián, v klasické mechanice. Lagranžián může být velice komplikovanou funkcí. Obecně se jedná o funkci zobecněných souřadnic, zobecněných rychlostí a popřípadě i parametru, kterým je v našem případě vlastní čas částice [16]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x^i, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}, \tau\right).$$

Lagranžián je v obecné teorii relativity definován jako [8]

$$\mathcal{L}\left(x^i, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\right) = \sqrt{-g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}} \tag{2.2}$$

a křivky vyhovující rovnicím (2.1) odpovídají geodetickým čarám v prostoročase.

Nezávisí-li lagranžián, analogicky jako v klasické mechanice, na některé ze zobecněných souřadnic x^i, pak se rovnice (2.1) zjednodušují. Konstanty vzniklé integrací zbývajících členů podle vlastního času částice se během celého pohybu zachovávají. Označujeme je jako zobecněné hybnosti [6]

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\right)}. \tag{2.3}$$

Interpretace takto získaných zobecněných hybností nalezneme např. v publikaci [6]. Pokud bude cyklickou souřadnicí čas, lze přisoudit jemu odpovídající kovariantní složce zobecněné hybnosti význam zobecněné energie vztažené na jednotku hmotnosti

$$p_t = -m_0 \tilde{E}, \tag{2.4}$$

Bude-li cyklickou souřadnicí úhlová souřadnice, pak jí odpovídající kovariantní složce zobecněné hybnosti bude dán význam momentu hybnosti vztaženého na jednotku hmotnosti

$$p_\alpha = m_0 \tilde{L}. \tag{2.5}$$

Aplikací zobecněné energie a momentu hybnosti na kvadrát vektoru čtyřhybnosti, který je invariantem, obdržíme po úpravách analogii Binetova vzorce v obecné teorii relativity pro prostoročas sféricky symetrického centrálního tělesa [3].

Invariant vektoru čtyřhybnosti je definován jako [3]

$$g_{ij} p^i p^j = -m_0^2, \tag{2.6}$$

kde pro složky vektoru čtyřhybnosti p^i platí [3]

$$p^i = m_0 \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}. \tag{2.7}$$

V případě pohybu světelných paprsků je postup obdobný. Jelikož je klidová hmotnost fotonu rovna nule, je i pravá strana rovnice (2.6) nulová.

$$g_{ij} p^i p^j = 0. \tag{2.8}$$

2.2 Pohyb v okolí kosmické struny

Prvním krokem je sestavení kovariantních složek metrického tenzoru pro kosmickou strunu. Budeme pracovat s jistým zjednodušením celé situace, plynoucím z postupu výpočtu členu $g_{\phi\phi}$. S využitím (1.56), (1.57) a (1.6)

$$g_{ii} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} -1 & 1 & r^2(1-\varepsilon)^2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Dosaďme (2.9) do (2.2)

$$\mathcal{L} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2(1-\varepsilon)^2 \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}. \tag{2.10}$$

Tento lagranžián dosaďme do rovnice (2.1). Pro zjednodušení uvažujme pohyb v rovině $z = 0$. Postupujme po částech. Začněme u souřadnice t

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0,$$

kde člen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Vidíme, že langranžián není explicitně závislý na časové souřadnici. Souřadnice t je tedy cyklickou souřadnicí, které odpovídá, podle (2.3), zobecněná hybnost

$$p^t = p_t = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = -m_0 \tilde{E}. \tag{2.11}$$

Rovnice (2.4) připisuje konstantě $\tilde{E}$ význam zobecněné energie, v našem případě vztažené na jednotku klidové hmotnosti.

Pokračujme se souřadnicí r

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0,$$

Po dosazení příslušných derivací obdržíme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right) - \frac{1}{\mathcal{L}} r(1-\varepsilon)^2 \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0.$$

Z výše uvedeného souřadnice r není cyklickou souřadnicí. Zbývá souřadnice ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0,$$

kde člen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0.$$

Opět zde máme cyklickou souřadnici, je jí ϕ. Odpovídá ji, podle (2.3), zobecněná hybnost

$$p_\phi = r^2(1-\varepsilon)^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}. \tag{2.12}$$

Rovnice (2.5) připisuje konstantě $\tilde{L}$ význam momentu hybnosti, v našem případě vztaženého na jednotku klidové hmotnosti.

Druhým krokem je dosazení rovnic (2.7) a (2.9) do rovnice (2.6)

$$m_0^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + r^2(1-\varepsilon)^2 \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right] = -m_0^2$$

Posledním krokem je vydělení levé i pravé strany rovnice výrazem m_0^2, následné nalezení veličin $\tilde{E}$ a $\tilde{L}$ podle rovnice (2.11) a (2.12) a vyjádření druhé mocniny podílu diferenciálu $\mathrm{d}r$ a $\mathrm{d}\tau$ jako rozdílu druhé mocniny zobecněné energie $\tilde{E}$ a efektivního potenciálu $U_{\mathrm{ef}}(r)$

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - U_{\mathrm{ef}}(r),$$

kde

$$U_{\mathrm{ef}}(r) = 1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2(1-\varepsilon)^2}.$$

Zkombinujeme oba předešlé vztahy dohromady

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2(1-\varepsilon)^2}\right). \tag{2.13}$$

Pro fotony platí obdobný postup. V druhém kroku použijeme namísto rovnice (2.7) rovnici (2.8), třetí krok je stejný

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \frac{\tilde{L}^2}{r^2(1-\varepsilon)^2}. \tag{2.14}$$

Vydělením výrazem

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$$

a s využitím vztahu (2.12) odstraňme z rovnice (2.13) závislost na vlastním čase částice

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \frac{r^4(1-\varepsilon)^4}{\tilde{L}^2}\left(\tilde{E}^2 - 1 - \frac{\tilde{L}^2}{r^2(1-\varepsilon)^2}\right). \tag{2.15}$$

Pro další úpravu je výhodné zavést místo proměnné r proměnnou u [3]

$$u = \frac{1}{r}, \tag{2.16}$$

zároveň tímto vztahem vyjádřeme podíl totálních diferenciálů

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}.$$

Dosaďme předešlé dvě rovnice do (2.15), výraz zderivujme podle proměnné u a upravme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + (1-\varepsilon)^2u = 0. \tag{2.17}$$

Pro pohyb fotonů v okolí kosmické struny platí stejná rovnice. Při řešení rovnice (2.17) postupujeme analogicky jako u rovnice (1.41). Sestavme charakteristický polynom

$$\alpha^2 + (1-\varepsilon)^2 = 0,$$

kořeny této kvadratické rovnice jsou

$$\alpha_{1,2} = \pm(1-\varepsilon)i,$$

Řešení rovnice (2.17) nabývá tvaru

$$u(\phi) = C_5\cos\left[(1-\varepsilon)\phi\right] + C_6\sin\left[(1-\varepsilon)\phi\right].$$

Vyjádřeme konstanty C_5 a C_6 v závislosti na ϕ_0 [9]

$$C_5 = C_7\cos\left[(1-\varepsilon)\phi_0\right],$$

$$C_6 = C_7\sin\left[(1-\varepsilon)\phi_0\right].$$

Dosaďme tyto do předešlé rovnice

$$u(\phi) = C_7\{\cos\left[(1-\varepsilon)\phi\right]\cos\left[(1-\varepsilon)\phi_0\right] + \sin\left[(1-\varepsilon)\phi\right]\sin\left[(1-\varepsilon)\phi_0\right]\}.$$

S využitím součtových vzorců pro goniometrické funkce (viy např. [14]) upravíme rovnici do podoby

$$u(\phi) = C_7\cos\left[(1-\varepsilon)(\phi-\phi_0)\right].$$

Přejdeme od pomocné proměnné u zpět k proměnné r vztahem (2.16)

$$r(\phi) = \frac{1}{C_7 \cos\left[(1-\varepsilon)(\phi-\phi_0)\right]}.$$

Zbývá určit konstantu C_7. Bude-li úhel ϕ roven ϕ_0, pak $r = d$, kde d je vzdálenost mezi kosmickou strunou a nejbližším bodem trajektorie testovací částice. Hledaná hodnota konstanty je

$$C_7 = \frac{1}{d}.$$

Výsledný vztah pro pohyb testovací částice v okolí kosmické struny nabývá tvaru

$$r(\phi) = \frac{d}{\cos\left[(1-\varepsilon)(\phi-\phi_0)\right]}. \tag{2.18}$$

Interpretace vztahu (2.18) je zřejmá, jedná se, až na člen $(1-\varepsilon)$, o rovnici přímky v polárních souřadnicích. Dodejme, že pro pohyb fotonů v okolí kosmické struny platí stejná funkční závislost.

Jako doplněk uveďme rovnice asymptot. Podmínku $r(\phi) \to \infty$ lze splnit jen pokud $\cos\left[(1-\varepsilon)(\phi-\phi_0)\right] \to 0$. Tedy

$$(1-\varepsilon)(\phi-\phi_0) = \pm\frac{\pi}{2},$$

elementární úpravou pak

$$\phi = \phi_0 \pm \frac{\pi}{2(1-\varepsilon)},$$

pro přímku by druhý tvar na pravé straně nabýval hodnoty $\pm\pi/2$.

Světelné paprsky a částice se pohybují po geodetických křivkách, mající vlastnosti přímek na rozvinutém plášti kužele [5]. Této skutečnosti využijeme v následující kapitole. Tvar trajektorie je kvalitativně znázorněn na obrázku (4.1).

Kapitola 3

Detekce kosmických strun

V předchozí kapitole jsem si ukázali matematický model pohybu částic a světelných paprsků v okolí kosmické struny. Zjistili jsme, že trajektorie lze interpretovat jako přímky na rozvinutém plášti kužele. Tato kapitola ukazuje, jakým způsobem lze tuto vlastnost využít k pozorování kosmických strun. Následující úvahy vycházejí z modelu popsaného v [5].

Pokud chceme pozorovat efekty popsané v předchozí kapitole, musí nutně z hlediska pozorovatele za kosmickou strunou ležet objekt emitující světlo. Tímto objektem může být např. galaxie, kvasar, popřípadě lze uvažovat i pozadí reliktního kosmologického záření.

3.1 Úhly mezi paprsky

Kosmická struna ovlivňuje světelné paprsky v principu podobně jako gravitační čočka. Mějme vzdálený zdroj světla a úhel mezi polohou zdroje a kosmickou strunou (pro názornost volíme kvasar označený jako qso) označme θ (viz. obrázek 3.1). Aby docházelo k rozdvojení obrazu, musí $0 < \theta < \varepsilon/2$, kde ε je deficitní úhel. Pokud bude úhel $\theta = 0$, pak vzdálenosti r_1 a r_2 jsou stejně velké a k rozdvojení obrazu nedojde. Oba obrazy splynou v jeden. Dodejme, že r_1 je vzdálenost, kterou putuje světlo od jednoho obrazu k pozorovateli O a r_2 je vzdálenost, kterou putuje světlo od druhého obrazu k pozorovateli O. Podobně když $\theta = \varepsilon/2$. Úhel α_2 je úhel pod kterým vidí pozorovatel druhý obraz zdroje, $\alpha_2 = 0$. I v tomto případě bude pozorovatelný pouze jeden obraz zdroje.

K výpočtu úhlu α_1 pod kterým vidí pozorovatel první obraz zdroje použijeme sinovou větu

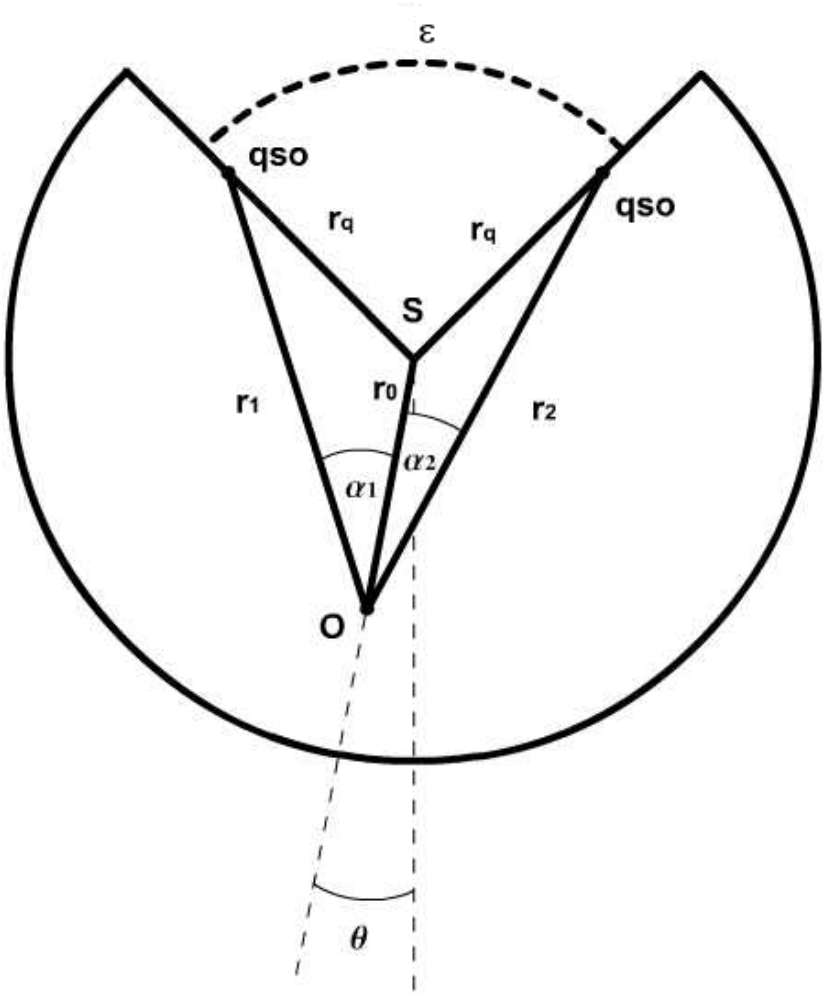
$$\frac{\sin \alpha_1}{r_q} = \frac{\sin\left(\varepsilon + \theta - \alpha_1\right)}{r_0}.$$

Kde r_q je vzdálenost od zdroje světla ke kosmické struně a r_0 je vzdálenost mezi kosmickou strunou a pozorovatelem. Jelikož jsou ε, θ, α_1 velice malé úhly přecházejí jejich siny přímo v hodnoty jednotlivých úhlů

$$\frac{\alpha_1}{r_q} = \frac{\varepsilon + \theta - \alpha_1}{r_0}.$$

Výsledný vztah upravíme a vyjádříme z něj

$$\alpha_1 = \frac{r_q}{R}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \theta\right).$$



Obrázek 3.1: Rozvinutý prostoročas v okolí kosmické struny

Kde $R = r_0 + r_q$. Analogicky postupujeme při výpočtu úhlu pod kterým vidí pozorovatel druhý obraz zdroje

$$\alpha_2 = \frac{r_q}{R}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \theta\right).$$

Úhel mezi oběma obrazy $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ je proto

$$\alpha = \frac{r_q \varepsilon}{R}.$$

3.2 Časové zpoždění fotonů

Když bude splněna podmínka $\theta > 0$, tak $r_1 < r_2$ a signál od objektu přicházející po dráze r_2 bude opožděn oproti signálu přicházejícím po dráze r_1. Časový rozdíl mezi příjmem prvního a druhého signálu je $\Delta t = \Delta r/c$, kde $\Delta t = t_2 - t_1$ a $\Delta r = r_2 - r_1$. Časový údaj t_1 je čas, za který foton urazí vzdálenost r_1, analogicky t_2 je čas, za který foton urazí vzdálenost r_2. Pro výpočet r_1 a r_2 využijeme kosinovou větu

$$r_1^2 = r_0^2 + r_q^2 - 2r_0 r_q \cos\left(\pi - \frac{\varepsilon}{2} - \theta\right),$$

a

$$r_2^2 = r_0^2 + r_q^2 - 2r_0 r_q \cos\left(\pi - \frac{\varepsilon}{2} + \theta\right).$$

Goniometrickou funkci kosinus upravíme podle vzorce pro rozdíl argumentů a výsledný člen rozvineme v Taylorovu řadu do druhého řádu, ostatní členy řady zanedbáme

$$\cos\left(\pi - \frac{\varepsilon}{2} - \theta\right) = -\cos\left(\frac{\varepsilon}{2} + \theta\right) \approx -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \theta\right)^2.$$

Pak

$$r_1^2 = r_0^2 + r_q^2 + 2r_0 r_q - 2r_0 r_q \cos\left(\pi - \frac{\varepsilon}{2} + \theta\right) - 2r_0 r_q,$$

substitucí $R^2 = r_0^2 + r_q^2 + 2r_0 r_q$ a upravenou funkcí kosinus, obdržíme

$$r_1^2 = R^2\left[1 - \frac{r_0 r_q}{R^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \theta\right)\right],$$

po odmocnění

$$r_1 = R\left[1 - \frac{r_0 r_q}{2R^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \theta\right)^2\right]. \tag{3.1}$$

Obdobně pro

$$r_2 = R\left[1 - \frac{r_0 r_q}{2R^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \theta\right)^2\right]. \tag{3.2}$$

Pro časový rozdíl zachycení fotonů platí

$$\Delta t = \frac{r_0 r_q \varepsilon \theta}{Rc}.$$

Typický dvojitý obraz vzdáleného objektu může mít $r_q \sim r_0$ a $\theta \sim \varepsilon/4$, tedy

$$\Delta t = \frac{R\varepsilon^2}{16c}.$$

Jako příklad uveďme hypotetickou strunu s $\varepsilon = 2{,}5\,10^{-4}$, ležící mezi objektem vzdáleným $R \sim 10^{10}$ světelných let od pozorovatele. Časový rozdíl mezi přijetím prvního a druhého paprsku vychází $\Delta t \sim 40$ let. Současná pozorovací technika není schopna zaznamenat změny v řádech desítek let. Tento fakt komplikuje detekci kosmických strun.

3.3 Dopplerův efekt

Malé posunutí struny směrem napravo od pozorovatele je fyzikálně ekvivalentní malému posunutí zdroje a pozorovatele směrem nalevo. Pohyb vzdáleného zdroje nalevo odpovídá rotaci rozvinutého pláště kužele protisměru hodinových ručiček o malý úhel γ. Vzdálenost o kterou se zdroj posune je $r_q\gamma$. Zároveň se pozorovatel posune po směru hodinových ručiček o malý úhel δ. Vzdálenost o kterou se posune pozorovatel je $r_0\delta$. Vzdálenost o kterou se vůči struně posunou zdroj i pozorovatel je stejná $r_q\gamma = r_0\delta$. To znamená, že se pozorovatel posune o úhel $\delta + \gamma = (1 + r_q/r_0)\gamma$. Proto úhel θ vzroste o hodnotu $\Delta\theta = (1 + r_q/r_0)\gamma$ (viz obrázek 3.2). Struna se pohybuje vzhledem k objektu a pozorovateli rychlostí

$$v_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_q\gamma) = r_q\dot{\gamma} = \frac{r_0 r_q \dot{\theta}}{R}. \tag{3.3}$$

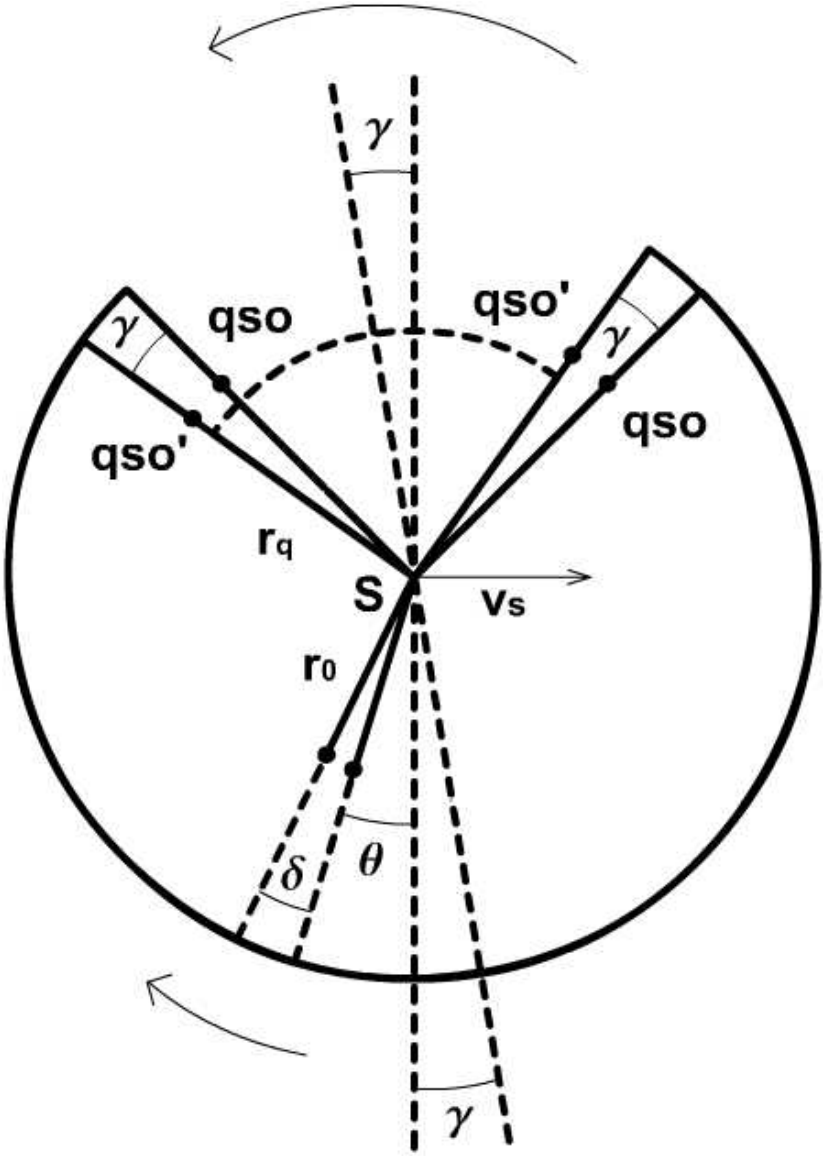
Změny v úhlu θ způsobují změny v r_1 a r_2, vzniká tak Dopplerův efekt. Z rovnice (3.1), (3.2) a (3.3) dostáváme

$$\dot{r_1} = -\frac{r_0 r_q}{R}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \theta\right)\dot{\theta} = -\left(\frac{\varepsilon}{2} + \theta\right)v_s,$$

a

$$\dot{r_2} = \frac{r_0 r_q}{R}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \theta\right)\dot{\theta} = \left(\frac{\varepsilon}{2} - \theta\right) v_s.$$

Změna vlnové délky



Obrázek 3.2: Změna úhlu θ

$$\Delta\lambda_1 = \lambda\left(1 + \frac{\dot{r_1}}{c}\right) = \lambda\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} + \theta\right)\frac{v_s}{c}\right],$$

ekvivalentně

$$\Delta\lambda_2 = \lambda\left(1 + \frac{\dot{r_2}}{c}\right) = \lambda\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \theta\right)\frac{v_s}{c}\right].$$

Podél dráhy r_1 se projevuje modrý posuv. Protože výraz $(\varepsilon/2 - \theta)$ vzhledem k podmínce pro vznik obrazů je vždy kladný, projevuje se podle dráhy r_2 červený posuv.

3.4 Stanovení horní a dolní meze pro deficitní úhel

Rozdíl ve vlnových délkách fotonů přicházejících po dráze r_1 a r_2 je

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda_2 - \Delta\lambda_1 = \lambda v_s \frac{\varepsilon}{c}. \tag{3.4}$$

Protože podíl $\Delta\lambda/\lambda$ je řádu ε, měření by mohlo stanovit horní mez pro deficitní úhel ε a tím i pro lineární hustotu kosmické struny.

V případě struny pohybující se rychlostí v_s by se projevovaly diskontinuity reliktního záření. Wienuv posunovací zákon říká, že když teplota černého tělesa roste, zkracuje se vlnová délka, neboli součin $\lambda_m T$ = konstanta, kde λ_m odpovídá vlnové délce, při níž je hodnota spektrální hustoty zářivého toku při dané teplotě zářiče maximální. Diferencováním a nahrazením jednotlivých diferenciálů rozdíly daných veličin, výsledek upravíme na

$$\Delta T/T = -\Delta\lambda/\lambda.$$

Z této rovnice a z rovnice (3.4) vyjádříme rozdíl teplot jako

$$\Delta T = T v_s \frac{\varepsilon}{c}.$$

Ve směru pohybu struny bude teplota reliktního záření nižší než za strunou. Družice WMAP měla experimentální limit pro měření anisotropie reliktního záření v měřítkách odpovídajících $\Delta T/T \sim 7 \cdot 10^{-5}$ [20]. Tento projekt však žádné diskontinuity v reliktním záření způsobené kosmickými strunami nezaznamenal. Probíhající experimenty s družicí Planck by měli dosáhnout experimentálního limitu pro měření anisotropie reliktního záření v měřítkách odpovídajících $\Delta T/T \sim 2 \cdot 10^{-6}$ [18]. V současné době lze z tohoto poznatku a z předešlé rovnice stanovit horní mez pro deficitní úhel

$$\varepsilon \leq \frac{c}{v_s} \cdot 10^{-5}.$$

Za předpokladu, že nebudou detekovány žádné diskontinuity reliktního záření, způsobené kosmickými strunami ani v rámci projektu Planck, budeme si muset na zpřesnění tohoto údaje počkat na další generace sond typu WMAP nebo Plack.

Jako příklad problémů spojených s detekcí kosmických strun uveďme pár galaxií CSL-1 pozorovaných Hubbleovým kosmickým teleskopem mezi dubnem 2005 a únorem 2006 v „hlubokém poli“ (deep field). Tento pár galaxií byl považován za kandidáta na obraz získaný gravitační čočkou, kde čočkujícím objektem mohla být kosmická struna. K potvrzení této domněnky však nedošlo. Pravděpodobně jde o dvě nezávislé galaxie [1].

Kapitola 4

Počítačové modely

V této kapitole uvádíme počítačové modely ilustrující některé výše popsané jevy. Při vytváření počítačového modelu v softwaru Mathematica využíváme již předdefinovaných funkcí a procedur.

4.1 Pohyb fotonu v okolí kosmické struny

Pohyb fotonů v okolí kosmické struny v rovině kolmé ke struně samotné je popsán diferenciální rovnicí (2.17), jejíž řešení má tvar (2.18). Aby byl vliv kosmické struny patrný je zde zvolena velká hodnota deficitního úhlu $\varepsilon = 0{,}09$ rad. Pro názornost je vyznačena i poloha struny.

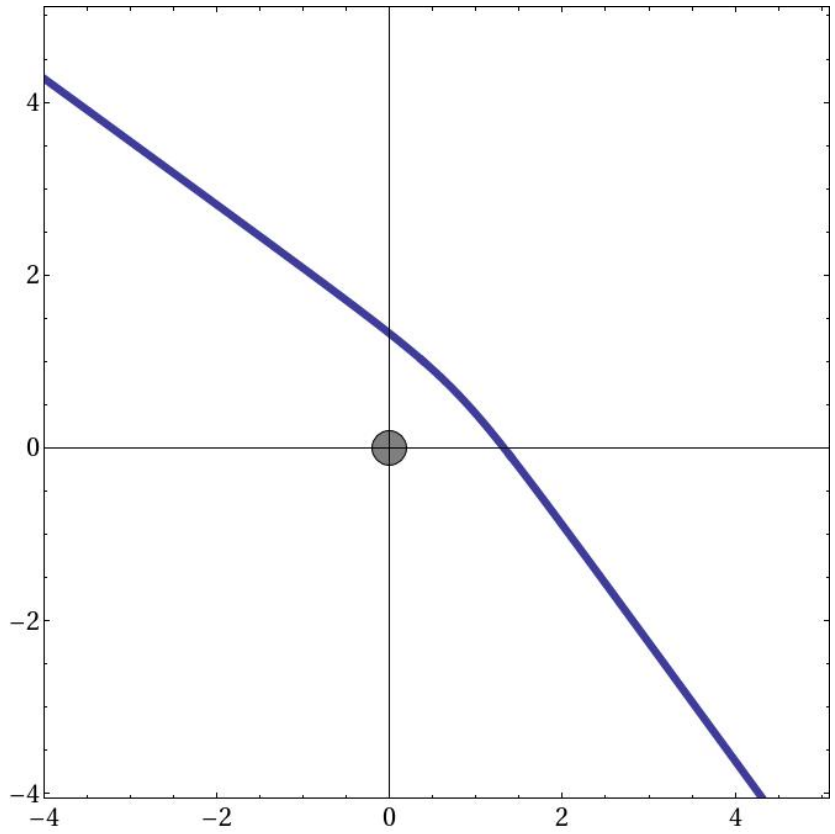
VÝPIS PROGRAMU:

```
phi0 = 45/180*Pi;
d = 1;
epsilon = 0.09;
p1 = ParametricPlot[{d/Cos[(1 - epsilon)*(phi - phi0)]*Cos[phi],
d/Cos[(1 - epsilon)*(phi - phi0)]*Sin[phi]},
{phi, phi0 - Pi/2/(1 - epsilon), phi0 + Pi/2/(1 - epsilon)},
Frame -> True, PlotStyle -> {Thickness[0.01]}];
p2 = Graphics[{Gray, Disk[{0, 0}, 0.2]}];
p3 = Graphics[{Circle[{0, 0}, 0.2]}];
Show[p1, p2, p3]
PolarPlot[d/Cos[(1 - epsilon)*(phi - phi0)],
{phi, phi0 - Pi/2/(1 - epsilon),
phi0 + Pi/2/(1 - epsilon)}, PlotStyle -> {Thickness[0.01]}]
```

Grafický výstup (obrázek 4.1) ukazuje ohyb světelného paprsku v blízkosti kosmické struny ve válcových souřadnicích prostoročasu popsaného metrikou (1.56). Ke znázornění trajektorie fotonu je vyžito řešení pohybové rovnice (2.18) při volbě parametrů $\phi_0 = \pi/4$ rad a $d = 1$.

4.2 Kosmická struna jako gravitační čočka

Při vhodném umístění struny vůči pozorovateli a zdroji dochází k rozdvojení obrazu, jak je viděno na obrázku 4.2. Sestavení tohoto programu vychází z úvah v kapitole 3.



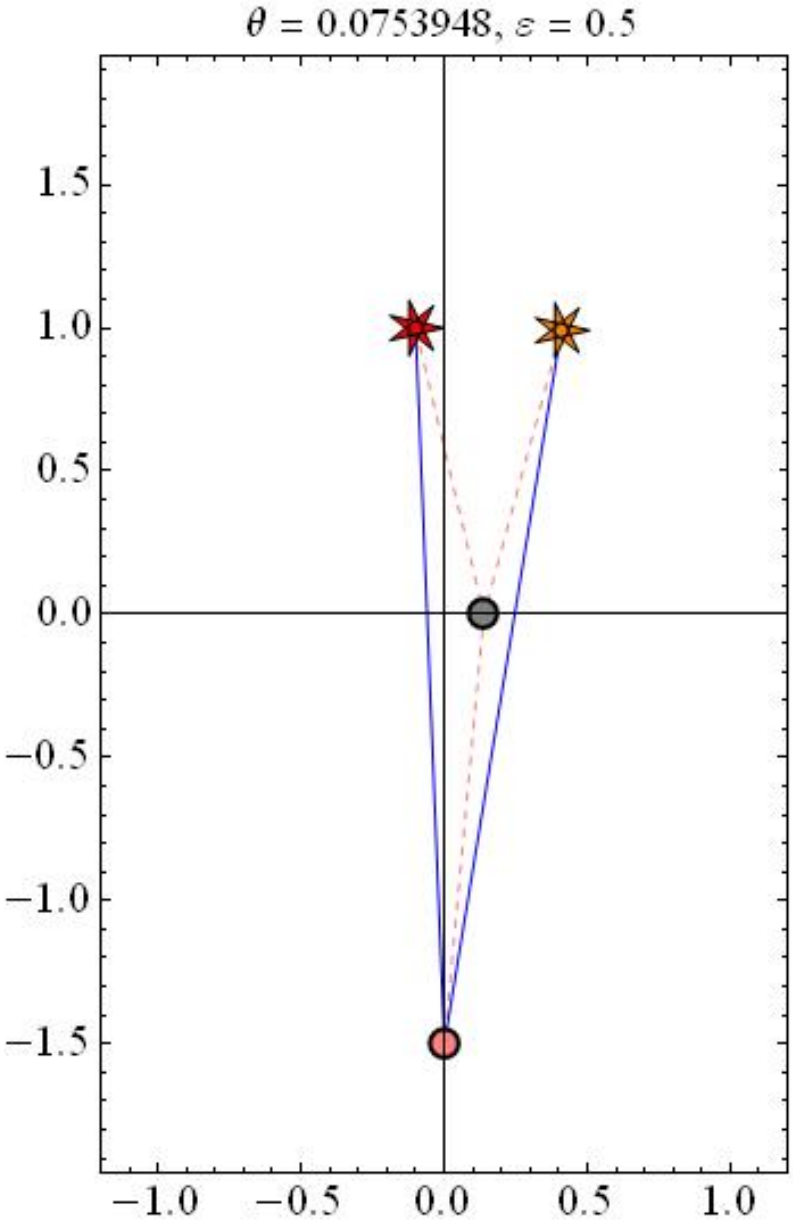
Obrázek 4.1: Příklad pohybu fotonu v okolí kosmické struny

Deficitní úhel je volen velký tak, aby byl patrný vliv tzv. kónické singularity na průchod světelných paprsků. Na přiloženém CD je program, krerý umožňuje animovat změnu polohy struny vůči zdroji a pozorovateli. V tomto prvním případě uvažujeme bodový vzdálený zdroj (např. hvězdu).

VÝPIS PROGRAMU:

```
epsilon = .5;
xz = -.1;
yz = 1;
xp = 0;
yp = -1.5;
tl = 1;
Manipulate[xs = t; ys = 0;
rz = Sqrt[(xz - xs)^2 + (yz - ys)^2];
rp = Sqrt[(xp - xs)^2 + (yp - xs)^2];
R = rz + rp;
theta = ArcTan[xp - xs, yp - ys] - (ArcTan[xz - xs, yz - ys] -
epsilon/2 - \[Pi]);If[Abs[theta] < epsilon/2, {xo = xs + rz*
Cos[ArcTan[xz - xs, yz - ys] - epsilon], yo = ys +
rz*Sin[ArcTan[xz - xs, yz - ys] - epsilon]}, {xo = xz, yo = yz}];
Show[{Graphics[{Dashed, Pink, Line[{{xz, yz}, {xs, ys}, {xp, yp}}]}],
Graphics[{Dashed, Pink, Line[{{xo, yo}, {xs, ys}}]}],
Graphics[{Blue, Line[{{xz, yz}, {xp, yp}, {xo, yo}}]}],
Graphics[{EdgeForm[Thin], Red,
```

```
Polygon[Table[{xz + .1*Cos[a], yz + .1*Sin[a]},
{a, 0, 6 Pi, 2 Pi 3/7}]]}], Graphics[{EdgeForm[Thin],
Orange, Polygon[Table[{xo + .1*Cos[a], yo + .1*Sin[a]}, {a, 0, 6 Pi,
2 Pi 3/7}]]}], Graphics[{EdgeForm[Thick], Gray, Disk[{xs, ys},
{.05, .05}]}], Graphics[{EdgeForm[Thick], Pink, Disk[{xp, yp},
{.05, .05}]}]}, PlotLabel -> Style[Row[{theta = ", Abs[theta], ",
epsilon = ", epsilon}], FontSize -> 18],
AspectRatio -> Automatic, Frame -> frame, Axes -> osy,
BaseStyle -> {FontSize -> 20}, PlotRange -> {{-1.2*tl, 1.2*tl},
{-1.3*Max[Abs[yz], Abs[yp]], 1.3*Max[Abs[yz], Abs[yp]]}},
{t, -tl, tl, 0.001, Appearance -> "Labeled"}, {frame, {True, False}},
{osy, {True,False}},ControlPlacement -> Left]
```



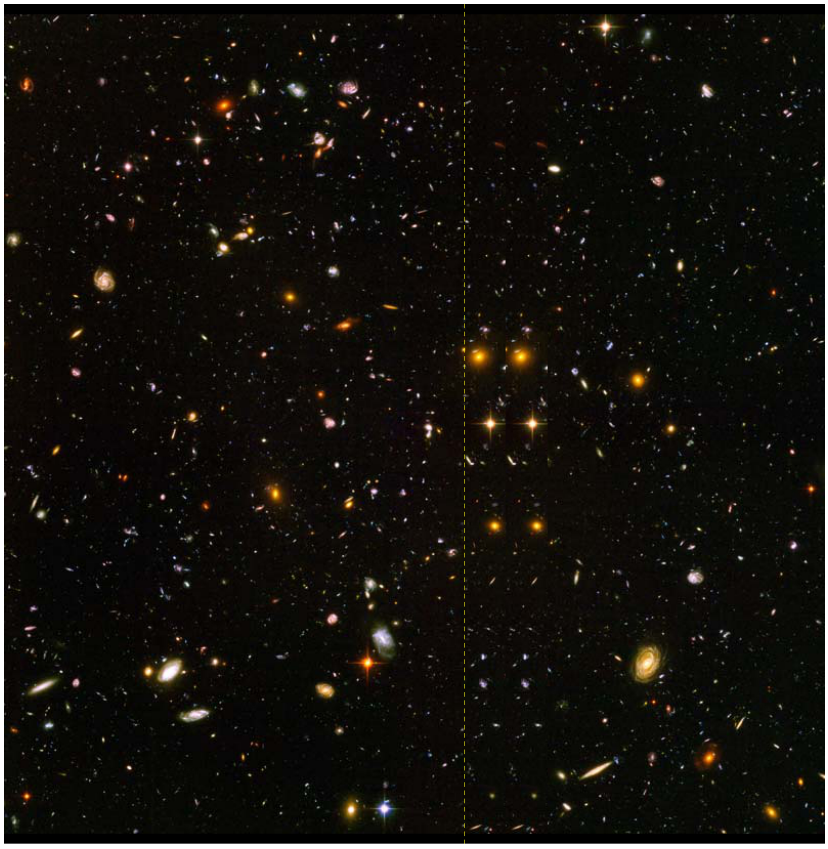
Obrázek 4.2: Příklad čočkování objektu strunou

Tento zjednodušený model lze použít i k znázornění vlivu kosmické struny na tvar nebodových sledovaných objektů (např. kvazarů, galaxií, apod.). Pro názornost jsou

využity snímky z Hubbleova kosmického dalekohledu. Čárkovaná čára vyznačuje polohu kosmické struny.

VÝPIS PROGRAMU:

```
theta = 0*Degree;
obrazek=ImageRotate[Import["./hs-M81M.jpg"],theta];
{w, h} = ImageDimensions[obrazek];
Manipulate[obr1 = ImageCrop[ImageTake[obrazek, {0, h},
{w - s, w - s + epsilon}], {Full, h + 20}];
obr2 = ImageCrop[obrazek, {w - s + epsilon], h + 20}, Right];
obr3 = ImageCrop[ImageTake[obrazek, {0, h}, {w - s + 2*epsilon, w}],
{Full, h + 20}];
Show[{ImageAssemble[{obr2, obr1, obr3}], Graphics[
If[lin, {Dashed, Yellow, Line[{{w - s, 0}, {w - s, h + 20}}]}
, {}]]}], {s, .05*w, .95*w}, {epsilon, 0, s},
{{lin, True, "Show string"}, {False, True}},
ControlPlacement -> Left]
```



Obrázek 4.3: Příklad vlivu kosmické struny na vzdálený objekt, v tomto případě na „hlubokém poli“ (deep field). Použit byl snímek z Hubbleova kosmického teleskopu: NASA, ESA, and S. Beckwith (STScI) and the HUDF Team, `http://hubblesite.org/gallery/album/the_universe/pr2006012b/`.

V obou případech vidíme, že obraz vytvořený strunou je nedeformovaný a zachovává velikost, jeho zvětšení je rovno jedné. Typickým znakem obrazů vytvořených kosmickou strunou je přítomnost ostrých rozhraní a přechodů. Zobrazen je vždy jen pás,

Obrázek 4.4: Příklad vlivu kosmické struny na vzdálený objekt, v tomto případě na galaxii. Použit byl snímek z Hubbleova kosmického teleskopu: NASA, ESA, and A. Zezas (Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics); GALEX data: NASA, JPL-Caltech, GALEX Team, J. Huchra et al. (Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics); Spitzer data: NASA/JPL/Caltech/Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, `http://hubblesite.org/gallery/album/galaxy/pr2007019j/`.

jehož velikost je dána hodnotou deficitního úhlu a vzdáleností mezi strunou, zdrojem a pozorovatelem. Výsledky zíkané výše uvedeným programem kvalitativně odpovídají výstupům z přesnějších a komplexnějších algoritmů uvedených např. [15] a popisu vlastností obrazu v [12].

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo přehledně popsat vlastnosti prostoročasu v okolí kosmické struny a pomocí počítačových modelů ukázat vliv tzv. kónické singularity na pohyb částic a světelných paprsků v okolí kosmické struny.

V první kapitole jsou popsány základní rovnice Einsteinovy teorie gravitace a jejich aplikace na problém kosmické struny. Odvodili jsme tvar metriky v okolí kosmické struny ve válcových souřadnicích a dokázali jsme lokální plochost. Bylo ukázáno, že prostorová souřadnice ϕ se v okolí kosmické struny liší oproti plnému úhlu 2π o tzv. deficitní úhel $8\pi\mu$, kde μ je parametr určený lineární hustotou struny podle vztahu (1.55) a (1.60). Při fixování souřadnice t a z mají roviny kolmé ke kosmické struně geometrické vlastnosti rozvinutého pláště kužele.

Druhá kapitola je věnována pohybu částic a světelných paprsků v okolí kosmické struny. K řešení tohoto problému jsme přistoupili přes variační počet a zákony zachování. Dokázali jsme, že světelné paprsky a částice se pohybují po geodetických křivkách, které v jisté analogii odpovídají přímkám na rozvinutém plášti kužele. Tato skutečnost umožňuje, že kosmická struna se za určitých podmínek může chovat jako jednoduchá gravitační čočka.

Třetí kapitola se věnuje teoretickým možnostem detekování kosmických strun ve vesmíru. Při vhodné konfiguraci struny, zdroje a pozorovatele zaznamenává pozorovatel 2 obrazy bodového zdroje. Z časového zpoždění fotonů doprovázeného Dopplerovým efektem, lze stanovit horní mez pro deficitní úhel. Pohyb kosmické struny vůči reliktnímu mikrovlnému záření by se měl projevit také diskontinuitami v teplotě reliktního vesmírného pozadí, z něhož by mělo být možné stanovit horní mez pro deficitní úhel. Dosavadní snahy o detekci kosmických strun prozatím nevedli k žádným prokazatelným výsledkům [1].

Poslední čtvrtá kapitola se týká počítačového modelu vlivu kosmické struny na pohyb fotonů a volných částic v jejím okolí. Grafické výstupy ukazují ohýbání světelného paprsku a rozdvojení obrazu při případném pozorování. Při pozorování vzdálených nebodových zdrojů (kvazarů, galaxií, apod.) by se přítomnost kosmické struny měla projevit zdvojením pásu, jehož poloha a velikost jsou určeny pozicí struny mezi zdrojem a pozorovatelem a velikostí deficitního úhlu závisejícího na lineární hustotě struny.

Literatura

[1] AGOL E., HOGAN C.J., PLOTKIN R.M. *Hubble Imaging Excludes Cosmic String Lens [online].* 2006, 2006-04-14 [cit. 2012-04-24]. URL: `arXiv:astro-ph/0603838v3`.

[2] BUDINSKÝ, B. *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi.* Praha: SNTL, 1970.

[3] DVOŘÁK, L. *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru.* Praha: SPN, 1984.

[4] GRIFFITHS, J.B., PODOLSKÝ J. *Exact Space-Times In Einstein's General Relativity.* New York: Cambridge university press, 2009. ISBN-13 978-0-521-88927-8

[5] HELLIWELL, T.M., KONKOWSKI, D.A. Cosmic string: Gravitation without local curvature, *Am.J. Phys.*, 1987, **55**, s. 401.

[6] HORSKÝ, J., NOVOTNÝ, J., ŠTEFANÍK, M. *Mechanika ve fyzice.* Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-0208-1.

[7] HORSKÝ, J., NOVOTNÝ, J., ŠTEFANÍK, M. *Úvod do fyzikální kosmologie.* Praha: Academia, 2004. ISBN 80-200-1241-9.

[8] KUCHAŘ, K. *Základy obecné teorie relativity.* Praha: Academia, 1968.

[9] KVASNICA, J. *Matematický aparát fyziky.* Praha: Academia, 1997. ISBN 80-200-0603-6.

[10] MECHLOVÁ, E., KOŠŤÁL, K. a kol. *Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz.* Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-151-5.

[11] PADMANABHAN, T. *Gravitation: foundation and frontiers.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN: 978-0-521-88223-1.

[12] PEACOCK, J.A. *Cosmological Physics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999. ISBN: 0-521-42270-1.

[13] REKTORYS, K. *Co je a k čemu je vyšší matematika.* Praha: Academia, 2001. ISBN 80-200-0883-7.

[14] REKTORYS, K. a spolupracovníci *Přehled užité matematiky I.* Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-180-9.

[15] SAZHIN, M.V., SAZHINA, O. S., CAPACCIOLI, M., LONGO, G., PAOLILLO, M., RICCIO, G. Gravitational Lens Images Generated by Cosmic Strings, *The Open Astronomy Journal*, 2010, **3**, s. 200.

[16] TILLICH, J., RICHTEREK, L. *Klasická mechanika [online]*. 2008, 2008-01-06 [cit. 2011-12-03]. URL: http://muj.optol.cz/richterek/doku.php?id=mechanika.

[17] ULLMAN, V. *Gravitace, černé díry a fyzika prostoročasu*. Ostrava: ČSAV, 1986.

[18] Esa Science & Technology. Planck [online]. 2009-09-17. [cit. 2012-04-22]. URL: http://sci.esa.int/science-e/www/object/index.cfm?fobjectid=45498

[19] Kosmická struna. Wikipedia [online]. 2011-10-22. [cit. 2011-10-18]. URL: http://cs.wikipedia.org/wiki/Kosmick%C3%A1_struna.

[20] National Aeronautics and Space Administration. WMAP [online]. 2010-09-22. [cit. 2012-04-22]. URL: http://map.gsfc.nasa.gov/mission/.