Rovnice matematické fyziky

Domácí úkol č. 2

1. Fourierovou metodou řad řešte rovnici vedení tepla v tyči o délce L s danými okrajovými a počátečními podmínkami:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \kappa \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$u(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \qquad u(x,0) = Ax(2L - x).$$

   Pro numerické hodnoty $L = 1$ m, $\kappa = 1$ s·m^{-2}, $A = 100$ K·m^{-2} znázorněte časový vývoj průběhu teploty v tyči pomocí trojrozměrného grafu ve vhodném měřítku.

2. Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla v rovině:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \kappa \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad x, y \in R.$$

   Nejprve nalezněte obecné řešení metodou Fourierovy transformace a poté určete řešení pro počáteční podmínku

$$\varphi(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

3. Nalezněte Greenovu funkci $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pro Laplaceovu rovnici $\Delta u = 0$ na čtvrtprostoru $x \geq 0$, $y \geq 0$ se smíšenými okrajovými podmínkami:

$$u(0,y,z) = 0, \quad y > 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0,z) = 0, \quad x > 0.$$